

# On Zariski multiple of different torus types

岡山理科大学・総合情報学部・情報科学科 \* 川島 正行

Masayuki Kawashima

Department of Information Science

Okayama University of Science

## 1 Introduction

複素射影平面  $\mathbb{P}^2$  内の次数が  $d$  の平面曲線の中で無限直線  $L_\infty$  と横断的に交わるもの全体を  $\mathcal{M}_d$  で表す:

$$\mathcal{M}_d = \{C \subset \mathbb{P}^2 \mid \deg C = d, C \cap L_\infty\}.$$

曲線  $C \in \mathcal{M}_d$  に対して,  $C$  の特異点集合を  $\text{Sing}(C)$  で表し,  $C$  の特異点の型の集合を  $\Sigma(C)$  で表す. さらに  $\mathcal{M}_d(\Sigma)$  で  $\Sigma(C) = \Sigma$  なる平面曲線  $C \in \mathcal{M}_d$  全体を表す.

我々は  $C \in \mathcal{M}_d$  のトポロジー、特に位相不変量に興味がある. 位相不変量はどのように、何によって決定されているだろうか. 一次元ホモロジー群はよく知られているように

$$H_1(\mathbb{P}^2 \setminus C) = \mathbb{Z}^{r-1} \oplus \mathbb{Z}_{d_0}.$$

となる. ここで  $r$  は  $C$  の既約成分の個数,  $d_0$  は各成分の次数の最大公約数である. このように  $H_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$  には  $C$  の特異点の情報は関係ないことがわかる. 一方, 基本群  $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$  については次の事柄が知られている. まず  $C$  が特異点を持たず既約な曲線るとき

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C) \cong \mathbb{Z}_d$$

と可換群になっている. このほかにも  $C$  の特異点が  $A_1$  のみの場合も可換群になること

---

〒700-0005 岡山県岡山市北区理大町 1-1,  
kawashima@mis.ous.ac.jp

が知られている。非可換な例としては  $C \in \mathcal{M}_4(3A_2)$  のとき

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C) \cong \langle a, b \mid aba = bab, a^2b^2 = 1 \rangle$$

がある。このように基本群は特異点の型の情報で決まりそうだが実際にはそうではなく以下のような Zariski による例が知られている。

**Example 1** (O. Zariski [4, 5]).  $C_1, C_2 \in \mathcal{M}_6(6A_2)$  とし  $C_1$  に対してはその特異点集合  $\text{Sing } C_1$  を通るような 2 次曲線  $D \in \mathcal{M}_2$  が存在し,  $C_2$  に対してはそのような 2 次曲線は存在しないとする。このときそれぞれの基本群は

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C_1) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3, \quad \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$$

となる。同じ次数、同じ特異点の型にも関わらず、特異点集合を通る特別な 2 次曲線の存在性でその基本群に影響を与えることがわかる。

このような曲線のペア  $(C_1, C_2)$  は *Zariski Pair* と呼ばれている。([3]). もっと一般に  $k$  個の曲線の組  $(C_1, \dots, C_k)$  が *Zariski  $k$ -plet* であるとは任意の  $i, j$  に対して  $(C_i, C_j)$  が *Zariski Pair* であるときをいう。

これまでに多くの Zariski pair, triple,  $k$ -plet の例が報告されている。その中で中心的な役割を果たしているのが以下のトーラス曲線と呼ばれる平面曲線のクラスである。

**Definition 1.** 整数  $p$  と  $q$  を  $d$  を割る正整数とする。このとき平面曲線  $C = \{F = 0\} \in \mathcal{M}_d$  が  $(p, q)$  型のトーラス曲線であるとは、2 つの斉次多項式  $F_{d/p}, F_{d/q}$  が存在して

$$F = F_{d/p}^p + F_{d/q}^q, \quad \deg F_j = j$$

の形に書けるときをいう。次数が  $d$  の  $(p, q)$  型トーラス曲線全体を  $\mathcal{T}_d(p, q)$  で表す。

トーラス曲線  $C: F_{d/p}^p + F_{d/q}^q = 0$  に対して

$$C_{d/p}: F_{d/p} = 0, \quad C_{d/q}: F_{d/q} = 0$$

を  $C$  の成分曲線という。  $C$  上の点  $P$  がこの 2 つの曲線の上にあるとき  $P$  は  $C$  の特異点になるがこの特異点を  $C$  の内特異点という。また内特異点でない  $C$  の特異点を外特異点という。外特異点は決定するには複雑な計算をしなくてはならないが内特異点に関しては以下のことが知られている。

**Lemma 1.** 内特異点  $P \in C$  上の 2 つの成分曲線  $C_{d/p}, C_{d/q}$  上の交点数を  $\iota = I(C_{d/p}, C_{d/q}, P)$  とする。このとき成分曲線  $C_{d/q}$  が交点上で滑らかならば  $(C, P) \sim B_{\iota p, q}$  となる。

この補題から内特異点を決定するには、内特異点の上の  $C_{d/q}$  の滑らかさと交点数が重要なことがわかる。内特異点を記述するために正整数の分割を考える。正整数の組み  $(n_1, \dots, n_k)$  が正整数  $d$  の分割であるとは  $\sum_{i=1}^k n_i = d$  となるときをいう。  $d$  の分割全体を  $\mathcal{P}(d)$  で表す。

2つの平面曲線  $C_1 \in \mathcal{M}_{d_1}, C_2 \in \mathcal{M}_{d_2}$  に対してその交点  $C_1 \cap C_2$  を  $\{P_1, \dots, P_k\}$  とし、各交点  $P_i$  での交点数を  $\iota_i$  とする。このとき Bezout の定理により  $\sum_{i=1}^k \iota_i = d_1 d_2$  となり  $(\iota_1, \dots, \iota_k)$  は  $d_1 d_2$  の分割になっている。この分割を  $I(C_1, C_2)$  で表し、  $C_1$  と  $C_2$  の公点数による分割という。曲線の分割には2つ極端なものがありそれぞれ generic 分割、最大接触分割と呼ばれている：

$$\mathcal{I}_g = (1, \dots, 1), \quad \mathcal{I}_m = (d_1 \cdot d_2).$$

$I \in \mathcal{P}(d)$  として次のような多項式のペアの集合を考える：

$$\mathcal{M}_d(p, q, I) = \{(F_{d/p}, F_{d/q}) \mid I(C_{d/p}, C_{d/q}) = I\}, \quad C_i = \{F_i = 0\}.$$

このとき  $\mathcal{M}_d(p, q, I)$  から  $\mathcal{T}_d(p, q)$  に自然な写像  $\sigma_{p,q} : \mathcal{M}_d(p, q, I) \rightarrow \mathcal{T}_d(p, q)$

$$\sigma_{p,q}(F_{d/p}, F_{d/q}) = \{F_{d/p}^p + F_{d/q}^q = 0\}$$

が定まる。任意のトーラス曲線  $C \in \mathcal{T}_d(p, q)$  に対して  $\sigma_{p,q}^{-1}(C)$  の元のことを  $C$  のトーラス分解という。

$C \in \mathcal{T}_d(p, q)$  として  $(F_{d/p}, F_{d/q}) \in \sigma_{p,q}^{-1}(C)$  を  $C$  の1つのトーラス分解とする。補題1から  $C_{d/q}$  が各交点上で滑らかとするとトーラス曲線  $C$  の特異点の型  $\Sigma(C)$  は

$$\Sigma(C) = \{B_{\iota_1 p, q}, \dots, B_{\iota_k p, q}\}$$

となる。

前述した Zariski の例は  $(d, p, q) = (6, 3, 2)$  のケースで  $C_1 \in \mathcal{T}_6(3, 2)$  として  $(F_2, F_3) \in \sigma_{3,2}^{-1}(C)$  のとき  $I(C_2, C_3)$  が  $(1^6) = (1, 1, 1, 1, 1, 1) \in \mathcal{P}(6)$  で与えられる。

$\mathcal{I}_g, \mathcal{I}_m$  に対応するトーラス曲線をそれぞれ generic, 最大接触トーラス曲線であるという generic なトーラス曲線の位相不変量に関しては以下のことが知られている。

**Lemma 2.**  $C$  を generic な  $(p, q)$  型のトーラス曲線とする。このとき

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C) &\cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q \\ \Delta_C(t) &= \frac{(t^{pq/r} - 1)(t - 1)}{(t^p - 1)(t^q - 1)}, \quad r = \gcd(p, q) \end{aligned}$$

である。

トーラス分解に関しては以下のような問題が考えられている。

- 与えられたトーラス曲線に対してそのトーラス分解の個数は？
- もっと一般に  $C \in \mathcal{M}_d$  に対してそのトーラス分解の可能性の判定。

本講演ではどの特異点のクラスにトーラス分解が存在するか、さらにそのなかに Zariski  $k$ -plet の存在性について考察する。

## 2 主結果

**Theorem 1.**  $p, q$  を正整数で  $p > q \geq 2$  とする。  $s \in \mathbb{Z}$  を  $q^s$  が  $p$  を割る最大の整数とする。このとき  $\mathcal{M}_{pq}(pB_{pq,q})$  は少なくとも  $(2s+1)$  個の異なる型のトーラス曲線を含む。即ち,  $C, D_1, \dots, D_s, H_1, \dots, H_s \in \mathcal{M}_{pq}(pB_{pq,q})$  として

$$C \in \mathcal{T}_{pq}(pq, q), \quad D_k \in \mathcal{T}_{pq}(p/q^{k-1}, q), \quad H_k \in \mathcal{T}_{pq}(q^{k+1}, q).$$

となる。さらにこの  $(2s+1)$  個は Zariski  $(2s+1)$ -plet になっている。

*Proof.* ここでは  $p = 6, q = 2$  として略証を与える。このケースでは  $s = 1$  となり  $\mathcal{M}_{12}(6B_{12,2})$  の中には 3 種類のトーラス曲線  $C, D, H$  が存在し、それぞれ

$$C \in \mathcal{T}_{12}(12, 2), \quad D \in \mathcal{T}_{12}(6, 2), \quad H \in \mathcal{T}_{12}(4, 2)$$

であり  $(C, D, H)$  は Zariski triple になっていることを示そう。まず  $12 = 12 \cdot 1 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3$  に注意すると  $B_{12,2}$  は  $B_{12,1,2} = B_{6,2,2} = B_{4,3,2}$  と考えることができる。この 3 つの分解を元に特異点の形が  $6B_{12,1,2}$  のトーラス曲線をつくるには Lemma 1 より図 1 のような交点数の組がそれぞれ

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1), \quad (2, 2, 2, 2, 2, 2), \quad (3, 3, 3, 3, 3, 3)$$

となる曲線の組

$$(C_6, C_1), \quad (D_6, D_2), \quad (H_6, H_3)$$

で  $C_6, D_6, H_6$  が各交点場で滑らかなものが存在すればいいことがわかる。このような曲線が存在することを示す。

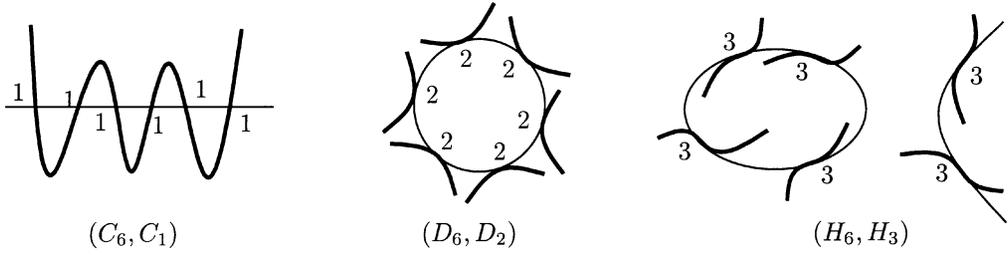


図 1

曲線の構成. まず  $(C_6, C_1)$  を構成する. ここで座標変換により直線  $C_1$  は定義多項式を  $f_1(x, y) = y$  仮定してもよい. このとき  $C_6$  の定義多項式としては

$$f_6(x, y) = y^6 - y + \prod_{i=1}^6 (x - \alpha_i)$$

とすると  $C_1 = \{y = 0\}$  との交点は

$$(\alpha_1, 0), (\alpha_2, 0), (\alpha_3, 0), (\alpha_4, 0), (\alpha_5, 0), (\alpha_6, 0)$$

となり各交点上でなめらかであることもわかる. このとき定義多項式の組み  $(f_1, f_6)$  は  $\mathcal{M}_{12}(12, 2, \mathcal{I}_g)$  であり  $\sigma_{12,2}$  によって  $C = \{f_1(x, y)^{12} + f_6(x, y)^2 = 0\} \in \mathcal{T}_{12}(12, 2)$  となり Lemma 1 によって

$$\Sigma(C) = \{6B_{12,2}\}$$

となる. この曲線はトーラス曲線の中でも線形トーラス曲線と呼ばれるクラスであり, そのアレキサンダー多項式  $\Delta_C(t)$  は [1] によって

$$\begin{aligned} \Delta_C(t) &= \frac{(t^{12} - 1)(t - 1)}{t^2 - 1} \\ &= (t - 1)(t^2 + 1)(t^2 + t + 1)(t^2 - t + 1)(t^4 - t^2 + 1) \end{aligned}$$

となることがわかる.

次に  $(D_6, D_2)$ ,  $(H_6, H_3)$  であるがこれは被覆を用いて構成できる. 具体的な定義式は以下のようになる:

$$D_2: g_2(x, y) = y - x^2, \quad D_6: g_6(x, y) = \prod_{i=1}^3 (y - \beta_i^2)^2 + g_2(x, y),$$

$$H_3: h_3(x, y) = y - x^3, \quad H_6: h_6(x, y) = \prod_{i=1}^2 (y - \gamma_i^3)^3 + h_3(x, y).$$

このときそれぞれの交点を求めると

$$D_2 \cap D_6: (\pm\beta_1, \beta_1^2), (\pm\beta_2, \beta_2^2), (\pm\beta_3, \beta_3^2),$$

$$H_3 \cap H_6: (\gamma_1\omega_3^i, \gamma_1^3), (\gamma_2\omega_3^i, \gamma_2^3)$$

ここで  $\omega_3 = \exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right)$  であり  $i = 1, 2, 3$  である. 定義方程式の形からこの交点上でなめらかであることが確認でき交点数もそれぞれ

$$(2, 2, 2, 2, 2, 2), \quad (3, 3, 3, 3, 3, 3)$$

であることがわかる. このとき定義多項式の組み  $(g_2, g_6)$  と  $(h_3, h_6)$  は

$$(g_2, g_6) \in \mathcal{M}_{12}(6, 2, \mathcal{J}), \quad (h_3, h_6) \in \mathcal{M}_{12}(4, 2, \mathcal{K})$$

となっている. ここで  $\mathcal{J} = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$ ,  $\mathcal{K} = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$  である. ここで2つの写像  $\sigma_{6,2}$  と  $\sigma_{4,3}$  によってこの多項式の組みは

$$D = \{g_2(x, y)^6 + g_6(x, y)^2 = 0\} \in \mathcal{T}_{12}(6, 2),$$

$$H = \{h_3(x, y)^4 + h_6(x, y)^2 = 0\} \in \mathcal{T}_{12}(4, 2)$$

に写される. ここで Lemma 1 によって  $D$  と  $H$  の特異点は  $\Sigma(D) = \Sigma(H) = \{6B_{12,2}\}$  となる.

位相不変量の計算. ここでは曲線の違いを測る位相不変量としてアレキサンダー多項式を用いる. アレキサンダー多項式は A. Libgober らによって 20 世紀終盤に平面曲線の世界に導入された. その現実的な計算方法は以下のようなものがある ([3, 2]):

1. 基本群から Fox 微分を用いて計算する.
2. Loeser-Vaquié の公式を用いる.
3. 曲線の退化族を上手につくり、Sandwich 原理を用いる.

ここでは (3) の方法を用いて計算すると 2 つの曲線  $D, H$  のアレキサンダー多項式は以下のようになる:

$$\begin{aligned}\Delta_D(t) &= (t-1)(t^2-t+1)(t^2+t+1), \\ \Delta_H(t) &= (t-1)(t^2+1).\end{aligned}$$

この 2 つと前の  $C$  のアレキサンダー多項式を合わせるとこの 3 つの曲線のアレキサンダー多項式が異なることとなる. さらに 3 つの曲線がそれぞれ 2 つの 6 次曲線からなっていることもわかり三つ組  $(C, D, H)$  が Zariski triple となっていることがわかる.  $\square$

## 参考文献

- [1] M. Kawashima. On the fundamental group of the complement of linear torus curves of maximal contact. *Hiroshima Math. J.*, 40(1):75–99, 2010.
- [2] M. Kawashima and M. Oka. On Alexander polynomials of certain  $(2, 5)$  torus curves. *J. Math. Soc. Japan*, 62(1):213–238, 2010.
- [3] M. Oka. A survey on Alexander polynomials of plane curves. *Singularités Franco-Japonaise, Séminaire et congrès*, 10:209–232, 2005.
- [4] O. Zariski. On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve. *Amer. J. Math.*, 51:305–328, 1929.
- [5] O. Zariski. Studies in equisingularities I: equivalent singularities of plane algebraic curves. *Amer. J. Math.*, 87:507–536, 1965.