数理解析研究所講究録
第2061巻 2018年 39-47

On the cycle map of a finite group

芝浦工業大学・システム理工学部　亀子　正喜
MASAKI KAMEKO
COLLEDGE OF SYSTEMS ENGINEERING AND SCIENCE,
SHIBAURA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

1　はじめに

今回の RIMS 研究集会「有限群のコホモロジー論とその周辺」で “On the cycle map of a finite group” という題で話をさせていただきました. 同名の論文 [5] は Annals of K-theory で出版されていますので研究集会では論文の背景と結果について話をさせていただきました. この機会にその時のメモに加筆, 書き直しをして報告させていただきます. 以下に述べる視点はトポロジーの専門家の間で共有されているものというよりは私の個人的な視点かもしれないことをお断りしておきます. また位相空間は一般の位相空間ではなくたとえば CW 複体とホモトピー同値なものなど適当な条件を満たすものに制限して考えるとします.

トポロジーは位相空間と連続写像の圏について研究する分野で代数トポロジーは位相空間と連続写像の圏から代数的な圏 (たとえばアーベル群, 加群, 次数付き環とその間の準同型の圏) への関手について研究する分野といえます. このように考えるならば代数トポロジストにとって群, アーベル群は位相空間と連続写像の圏を調べるための道具ということになります. 位相空間 X のホモトピー型を研究する際にこれをホモトピー群 $\pi_i(X)$ がわかりやすい空間に分解して考えることができます.

ホモトピー群がわかりやすい空間は Eilenberg-MacLane 空間と呼ばれる空間で $K(\pi,n)$ とかきます. π は群で n は 1 以上の整数 で π は $n\geq 2$ のときはアーベル群とします. (π,n) 型の Eilenberg-MacLane 空間 $K(\pi,n)$ は

$$\pi_i(K(\pi,n)) = \begin{cases} \pi & (i=n), \\ 0 & (i\neq 0) \end{cases}$$

という性質を持ち, ホモトピー型は一意に定まります. 連結な位相空間は Postnikov 分解

$$\cdots \to X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 = pt$$

と呼ばれるファイバー系列の極限と同一視できます. この Potnikov 分解のなかの f_n のファイバーが Eilenberg-MacLane 空間 $K(\pi_i(X), n)$ になりますので Eilenberg-MacLane 空間は位相空間の基本構成要素ということができます. $n \geq 2$ のとき, ホモトピー群 $\pi_n(X)$ はアーベル群ですが $\pi_1(X)$ はアーベル群とは限りません. $n = 1$ の時には Eilenberg-MacLane 空間の π は一般には離散群 G にとれ, $K(G, 1)$ を離散群 G の分類空間と呼びます. 分類空間には $n \geq 2$ のときの Eilenberg-MacLane 空間の構成方法とは違う構成方法が知られています. 離散群 G が自由に作用する 1 点とホモトピー同値な空間 E を作ることができれば $K(G, 1)$ を E/G で定義することができます. そしてこの空間の mod p コホモロジーは群 G の mod p コホモロジーと同じになります. ですので群 G のコホモロジーの研究は位相空間の基本的な構成要素のコホモロジーの研究ということになります. それ故に代数トポロジストにとって群のコホモロジーは重要な研究対象ということになります.

Eilenberg-MacLane 空間 $K(\pi, n)$ のホモトピー群は（定義から）わかりますがそのコホモロジー群, コホモロジー環は非常に複雑です. たとえば π が巡回群 $\mathbb{Z}/2$, $n \geq 2$ の場合の Eilenberg-MacLane 空間の mod 2 コホモロジー環は無限変数の多項式環になります.

ホモトピー型による定義からはなぜ群 G のコホモロジーと分類空間 BG のコホモロジーが一致するのかはわかりにくいのですが Eilenberg-MacLane 空間 $K(G, 1)$ の場合は G が自由に作用する 1 点とホモトピー同値な空間が

$$EG = \left(\coprod_{n \geq 0} \Delta^n \times G^{n+1} \right) / \sim$$

ただし

$$\Delta^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_0 + \cdots + t_n = 1,\ t_i \geq 0,\ i = 0, \ldots, n\}$$

という形で定義でき, この構成をよく見ればこれが係数の G-加群のレゾリューションのバー構成に対応していることがみてとれるので群のコホモロジーと分類空間のコホモロジーが一致することがわかります.

2 コンパクトリー群の分類空間と一般コホモロジー

離散群 G に対する分類空間の構成方法はそのまま位相群 G に対してもあてはまります.

$$EG = \left(\coprod_{n \geq 0} \Delta^n \times G^{n+1} \right) / \sim$$

の G^{n+1} に G の積位相を与えれば位相群 G の分類空間になります. G に離散位相を与えたものを G^δ とすると自然な連続写像 $G^\delta \to G$ を考えることができて連続写像 $BG^\delta \to BG$ を考えることもできますがこれは一般には同相写像でもなければホモトピー同値にもなりません. しかしながら mod p コホモロジーの同型を誘導するとの予想があります.

Conjecture 2.1 (Friedlander-Milnor 予想, [3]) 誘導準同型

$$H^*(BG) \to H^*(BG^\delta)$$

は同型である. ただし, $H^*(X)$ は位相空間 X の mod p コホモロジー群である.

コンパクトリー群 G の場合の分類空間については Borel 以来多くの（計算）結果があります. 特に $G = U(n)$ の場合は $BU(n)$ の整数係数コホモロジー環は奇数次元の生成元を持たない多項式環

$$\mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots, c_n], \quad \deg c_i = 2i,$$

となり, $c_1, \ldots, c_n$ は Chern 類と呼ばれるベクトル束の不変量になります. 分類空間の名前の由来は X 上の n 次元複素ベクトル束の同型類と X から $BU(n)$ への連続写像のホモトピー類の間に全単射があることです.

有限群はコンパクトリー群ですが, コンパクトリー群から有限群を得ることもできます. コンパクトリー群とホモトピー同値な複素線形代数群を考え基礎体を有限体 $\mathbb{F}_q$ に置き換えることにより有限シュバレー群 $G(\mathbb{F}_q)$ という重要な有限群の族が得られます. ユニタリ群 $U(n)$ に対応するものは有限体上の一般線形群 $GL_n(\mathbb{F}_q)$ です. 有限シュバレー群 $G(\mathbb{F}_q)$ に対して (コホモロジーが同型になるような別の位相空間に置き換える必要がありますが)

$$G \to BG(\mathbb{F}_q) \to BG$$

というファイバー系列が存在し, ルレイ・セールのスペクトル系列で有限シュバレー群 $G(\mathbb{F}_q)$ の mod p コホモロジーについての情報が得られます. ここで G はコ

ンパクトリー群で, 離散ではない位相を持ちます. たとえば $G=U(n)$, p が $q-1$ を割り切る場合は Quillen [7] により

$$\mathbb{Z}/p[c_1,\ldots,c_n]\otimes\Lambda(\sigma(c_2),\ldots,\sigma(c_n))$$

となります. ここで Λ は外積代数を表し, c_i は上の $BU(n)$ のコホモロジーの Chern 類で $\sigma(c_i)$ は次数 $2i-1$ の元で位相群 $U(n)$ のコホモロジーの $2i-1$ 次の生成元に対応します.

位相不変量にはコホモロジー以外にも一般コホモロジーと呼ばれているものがあります. 有限群のコホモロジーを分類空間という位相空間を経由することにより分類空間の位相不変量と捉えるならそれ以外の不変量を調べようとするのは自然なことです. 一般コホモロジーとしては例えば K-理論や安定コホモトピー論, 複素コボルディズム理論, Brown-Peterson コホモロジーなどがあり美しい定理が成り立ちます. 例えば分類空間の K-理論はその複素表現環の完備化と同型であるなどの定理が成り立ちます.

Theorem 2.2 (Atiyah-Segal, [1], [2]) 準同型

$$K(BG)\to R(G)\hat{}$$

は同型.

その一方で一般コホモロジーの計算は常コホモロジーの計算よりも難しい時もあります. 常コホモロジーから一般コホモロジーへ収束するスペクトル系列 (Atiyah-Hirzeruch スペクトル系列) の存在が知られています. ([1])

3 線形代数群の分類空間と Chow 環

有限群をコンパクトリー群とみて有限群のコホモロジーをコンパクトリー群の分類空間のコホモロジーとして捉えることができますが, さらにこれを複素線形代数群, つまり複素数上の多項式の零点集合で群の構造を持つものとみなして分類空間を考えることができます. Totaro [9] は複素線形代数群 G の忠実な表現 V を考え, そこから G の作用が自由でない部分を取り除いてできる空間を G の作用で割った空間が複素代数多様体としての構造を持つことを用いて G の分類空間が代数多様体で近似できることを示し, これを用いて複素代数多様体の不変量である Chow 環を線形代数群の分類空間に対して定義しました.

Chow 環はトポロジーで用いられる一般コホモロジーではなく, 複素代数多様体の不変量になります. 複素代数多様体 X の不変量として Chow 環それ自体が重要な研究対象であるのですが, サイクル写像と呼ばれる準同型

$$cl: CH^iX\to H^{2i}(X;\mathbb{Z})$$

によって複素代数多様体の位相空間としての構造から決まる位相不変量である整数係数コホモロジー $H^{2i}(X;\mathbb{Z})$ と結び付けられます. Totaro [8] はこのサイクル写像が複素コボルディズム理論を経由することを示しました. さらに複素線形代数群 G の分類空間のサイクル写像について以下のような予想を立てています.

Conjecture 3.1 $BP^*(BG)$ が奇数次元の 0 でない元を持たないとき,

$$cl : CH^iBG \to (BP^*(BG) \otimes_{BP^*} \mathbb{Z}_{(p)})^{2i}$$

は同型である.

また Totaro [9] は $i \leq 2$ のとき, サイクル写像

$$cl : CH^iBG \to H^4(BG;\mathbb{Z})$$

が単射で $CH^iBG_{(p)} = BP^*(BG) \otimes_{BP^*} \mathbb{Z}_p$ となり, この群が G の複素表現の Chern 類で生成されることも証明しています.

その一方で Pirutka and Yagita [6] は整数係数 Hodge 予想, 整数係数 Tate 予想の反例の構成のため例外リー群 G_2, F_4, E_8 に対してそれぞれ $p = 2,3,5$ であれば

$$cl : CH^iBG/p \to H^4(BG)$$

が単射にならないこと（上のサイクル写像 $cl : CH^iBG \to H^4(BG;\mathbb{Z})$ が単射ではあるが分裂単射ではない）を示しています. Totaro [10, Section 15] は G が有限群の場合に mod p Chow 環から mod p コホモロジーへのサイクル写像が単射でない例を複素表現環のフィルトレーションの話題と結びつけて議論しています.

4 "On the cycle map of a finite group"

前節で述べたように 2014 年に出版された著書 [10, Section 15] で Totaro は位数 p^{2p+1} の有限群 K で mod p サイクル写像

$$cl : CH^2BK/p \to H^4(BK)$$

が単射にならない例を構成しました. ここで $H^4(BK)$ は BK の mod p コホモロジーです. さらに Totaro はその著書の中で

"... but there are probably smaller examples"

と書いています. 論文 [5] ではこの問題を取り扱いました. 主結果は次の定理です.

Theorem 4.1 各素数 p に対して, 位数 p^{p+3} の有限群 H で mod p サイクル写像

$$cl : CH^2BH/p \to H^4(BH)$$

が単射にならないものが存在する.

以下 p はとくに断らない限り奇素数とします.

有限群 p_+^{1+2} を位数 p^3 の extraspecial p-群で exponent が p のものとします. これをユニタリ群 $SU(p)$ の部分群と考えます. $SU(p)$ の部分群 H_2 を考えますがこれはあとで定義します. 上の定理の有限群 H は p_+^{1+2} と H_2 を用いて

$$H = p_+^{1+2} \times H_2/\langle\Delta(\xi)\rangle,$$

ただし $\langle\Delta(\xi)\rangle$ は $SU(p) \times SU(p)$ の中心部分群で位数 p の巡回群です. コンパクトリー群群 G を

$$G = SU(p) \times SU(p)/\langle\Delta(\xi)\rangle.$$

と定義します. これらの群 G, H and H_2 の詳細はあとで述べます.

Theorem 4.2 p を奇素数とする. K を

$$G = SU(p) \times SU(p)/\langle\Delta(\xi)\rangle$$

の部分群で

$$H = p_+^{1+2} \times H_2/\langle\Delta(\xi)\rangle.$$

を含むものとする. このとき, mod p サイクル写像

$$cl : CH^2BK/p \to H^4(BK)$$

は単射ではない.

有限群 $p_+^{1+2} \times H_2/\langle\Delta(\xi)\rangle$ の位数は p^{p+3} でこれが上の定理の H になります. この定理を

$$K = p_+^{1+2} \times \left((\mathbb{Z}/p^2)^{p-1} \rtimes \mathbb{Z}/p\right)/\langle\Delta(\xi)\rangle,$$

に当てはめると Totaro の例 [10, Section 15] になります. このように mod p サイクル写像が単射にならない例を与えるだけでなく Totaro の例を含む形になっています.

$p = 2$ の場合は, Theorem 4.1 は Totaro [10, Theorem 15.13] によって証明されています. $p = 2$ の場合は, 有限群 H は位数 32 の extraspecial 2-群 2_+^{1+4} になります.

p が奇素数の場合, 有限群 H_2 を extraspecial p-group p_+^{1+2} で置き換えることはできません. このことから次の予想が立てられます.

Conjecture 4.3 p を奇素数とする. 位数が p^{p+3} 未満の有限 p-群 K に対して, *mod p* サイクル写像

$$cl : CH^2BK/p \to H^4(BK)$$

は単射である.

さて上の H をきちんと定義しましょう. 特殊ユニタリ群 $SU(p)$ の積 $SU(p) \times SU(p)$ の部分群とその商群を定義していきます. 群の有限部分集合 $\{x_1, \ldots, x_r\}$ に対して, $\langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ で $\{x_1, \ldots, x_r\}$ で生成される部分群を表します. p は奇素数とします.

まず特殊ユニタリ群 $SU(p)$ の部分群から始めます.

$$\xi = \exp(2\pi i/p),$$
$$\omega = \exp(2\pi i/p^2)$$

とし, $i \equiv j \mod p$ に対して

$$\delta_{ij} = 1,$$

$i \not\equiv j \mod p$ に対して

$$\delta_{ij} = 0$$

とします. 次の特殊ユニタリ行列 $\xi, \alpha, \beta, \sigma_1$ を考えます.

$$\begin{aligned}
\xi &= (\xi\delta_{ij}) = \mathrm{diag}(\xi, \ldots, \xi),\\
\alpha &= (\xi^{i-1}\delta_{ij}) = \mathrm{diag}(1, \xi, \ldots, \xi^{p-1}),\\
\beta &= (\delta_{i,j-1}),\\
\sigma_1 &= \mathrm{diag}(\omega\xi^{p-1}, \omega, \ldots, \omega).
\end{aligned}$$

さらに σ_k を (i,i)-成分が $i = k$ のとき $\omega\xi^{p-1}$, それ以外で ω となる対角行列とします. 次の $SU(p)$ の部分群を考えます:

$$\begin{aligned}
p_+^{1+2} &= \langle \alpha, \beta, \xi \rangle,\\
H_2 &= \langle \beta, \sigma_1, \ldots, \sigma_p \rangle.
\end{aligned}$$

p_+^{1+2} は位数 p^3, exponent p の extraspecial p-群です. $\sigma_1^p = \cdots = \sigma_p^p = \xi$,

$$\sigma_2\sigma_3^2 \cdots \sigma_p^{p-1} = \xi^{(p-1)/2}\alpha^{-1},$$

なので群 H_2 は p_+^{1+2} を部分群として含みます. H_2 の部分群で $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ で生成されるものの元は

$$\omega^j \mathrm{diag}(\xi^{i_1}, \ldots, \xi^{i_p}),$$

の形に表せます. ここで $0 \le j \le p-1$, $0 \le i_1 \le p-1, \ldots, 0 \le i_p \le p-1$, $i_1 + \cdots + i_p$ は p で割り切れます. ですのでこの部分群の位数は p^p です. β は

対角行列のなす部分群に巡回置換として作用するので, H_2 の位数は p^{p+1} になります.

次に, 次の写像を考えます.

$$\Delta : SU(p) \to SU(p) \times SU(p), \quad m \mapsto \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}.$$

$$\Gamma_1 : SU(p) \to SU(p) \times SU(p), \quad m \mapsto \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

$$\Gamma_2 : SU(p) \to SU(p) \times SU(p), \quad m \mapsto \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}.$$

これらの写像と上で定義した $SU(p)$ の元 $\xi, \alpha, \beta, \sigma_1$ を用いて以下の群を考えます.

$$G = SU(p) \times SU(p)/\langle \Delta(\xi) \rangle,$$
$$H = \langle \Delta(\alpha), \Delta(\beta), \Delta(\xi), \Gamma_2(\beta), \Gamma_2(\sigma_1), \dots, \Gamma_2(\sigma_p) \rangle / \langle \Delta(\xi) \rangle,$$

α, β は H_2 の元なので, 部分群

$$\langle \Delta(\alpha), \Delta(\beta), \Delta(\xi), \Gamma_2(\beta), \Gamma_2(\sigma_1), \dots, \Gamma_2(\sigma_p) \rangle$$

は

$$\Gamma_1(\alpha) = \Delta(\alpha)\Gamma_2(\alpha^{-1}), \quad \Gamma_1(\beta) = \Delta(\beta)\Gamma_2(\beta^{-1}), \quad \Gamma_1(\xi) = \Delta(\xi)\Gamma_2(\xi^{-1}).$$

を含みます. したがって, 上の部分群は

$$p_+^{1+2} \times H_2 = \langle \Gamma_1(\alpha), \Gamma_1(\beta), \Gamma_1(\xi), \Gamma_2(\beta), \Gamma_2(\sigma_1), \dots, \Gamma_2(\sigma_p) \rangle$$

と同じになります. よって

$$H = p_+^{1+2} \times H_2 / \langle \Delta(\xi) \rangle.$$

となります. これで H の定義が終わりました.

最後に Theorem 4.2 の G とその部分群 H の由来について述べてこの報告の締めくくりとします. この論文のもともとの出発点は Pirutka and Yagita [6] でした. コンパクトリー群 G で mod p サイクル写像サイクル写像

$$CH^2BG/p \to H^4(BG)$$

が単射にならない例が整数係数 Hodge 予想, Tate 予想に関連していましたのでこのような群 G の例として上の $G = SU(p) \times SU(p)/\langle \Delta(\xi) \rangle$ を考えたのが [4] でした. これとは独立に Totaro [10, Section 15] は複素表現環のフィルトレーションの研究のため, 同じ G を考えその有限部分群を考えました. Totaro の例は上の G の

極大トーラスの正規化部分群の有限シュバレー群に相当するものの部分群でした.
ですので G の極大トーラスの正規化部分群の部分群 K でサイクル写像

$$CH^2BK/p \to H^4(BK)$$

が単射にならないものの中で最小のものを考えた結果が Theorem 4.2 です.

謝辞：本研究は JSPS 科研費 JP22540102 の助成を受けたものです。

References

[1] M. F. Atiyah, Characters and cohomology of finite groups, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 9 (1961), 23–64.

[2] M. F. Atiyah and G. B. Segal, Equivariant K-theory and completion, J. Differential Geometry **3** (1969), 1–18.

[3] E. M. Friedlander and G. Mislin, Cohomology of classifying spaces of complex Lie groups and related discrete groups, Comment. Math. Helv. **59** (1984), no. 3, 347–361.

[4] M. Kameko, On the integral Tate conjecture over finite fields, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **158** (2015), no. 3, 531–546.

[5] M. Kameko, On the cycle map of a finite group, Ann. K-Theory **2** (2017), no. 1. 47–72.

[6] A. Pirutka and N. Yagita, Note on the counterexamples for the integral Tate conjecture over finite fields, Doc. Math. **2015**, Extra vol.: Alexander S. Merkurjev's sixtieth birthday, 501–511.

[7] D. Quillen, On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field, Ann. of Math. (2) **96** (1972), 552–586.

[8] B. Totaro, Torsion algebraic cycles and complex cobordism, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 2, 467–493.

[9] B. Totaro, The Chow ring of a classifying space, in *Algebraic K-theory (Seattle, WA, 1997)*, 249–281, Proc. Sympos. Pure Math., 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI. 1999.

[10] B. Totaro, *Group cohomology and algebraic cycles*, Cambridge Tracts in Mathematics, 204, Cambridge Univ. Press, 2014.