数理解析研究所講究録
第2064巻 2018年 66-68

可算離散空間の積への C^*-, C- および P-埋め込み

神奈川大学・工学部
平田 康史 (Yasushi Hirata)　矢島 幸信 (Yukinobu Yajima)
Faculty of Engineering, Kanagawa University

空間は regular T_1 とする. $\mathbb{R}$ は実数直線, $\mathbb{I}=[0,1]\subset\mathbb{R}$, $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ は可算離散空間とする.

定義 1. E は空間 X の部分集合とする. 連続関数 $f:E\to Y$ が X 上の連続関数に拡張できるとは, 連続関数 $\hat{f}:X\to Y$ で, $\hat{f}\restriction E=f$ となるものが存在することである. E が X において C^*- *(resp.* C-, P-*)* **embedded** であるとは, E から $\mathbb{I}$ *(resp.* $\mathbb{R}$, バナッハ空間*)* への任意の連続関数が, X 上の連続関数に拡張できることである.

cozero cover を使った次のような特徴づけもある.

事実 1 (see [1]). E は空間 X の空でない部分集合とする. E が X において C^*- *(resp.* C-, P-*)embedded* であるためには, E の任意の有限 *(resp.* 可算, 局所有限*)* *cozero* 被覆 $\mathcal{U}$ に対して, X の有限 *(resp.* 可算, 局所有限*)* *cozero* 被覆 $\mathcal{V}$ で, $\mathcal{V}\restriction E=\{V\cap E:V\in\mathcal{V}\}$ が $\mathcal{U}$ を細分するものが存在することが必要十分である.

閉集合については Tietze の拡張定理がよく知られている.

(Titze の拡張定理) 空間 X に対して, 以下は同値な条件である.

- X は正規空間.
- X の任意の閉集合は X において C^*-embedded.
- X の任意の閉集合は X において C-embedded.

P-embedded についても同様の定理が知られている. [2]

(Dowker の拡張定理) 空間 X に対して, 以下は同値な条件である.

- X は族正規空間.
- X の任意の閉集合は X において P-embedded.

一般に次の implication が成り立つ.

$$P\text{-embedded}\Rightarrow C\text{-embedded}\Rightarrow C^*\text{-embedded}$$

逆が成り立つのはどのようなときであろうか. 矢島は最近の研究で, 次のような結果を得た.

定理の概略. $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は一般化された距離空間の積で, 各有限 subproduct がパラコンパクトなものとする. $F \subset X$ がある種の条件をみたす閉集合のとき, F が X において C- (C^*-)embedded in X ならば, F は X において P-embedded である.

ここで, 一般化された距離空間とは, p-空間, Σ-空間, semi-stratifiable 空間を, ある種の条件をみたす閉集合とは正則閉集合, G_δ な閉集合, 近傍レトラクトを意味し, これらのいくつかの組み合わせのもとで, $C = P$ もしくは $C^* = P$ が成り立つという結果である. どの組み合わせのときに成り立つかについては, また別の機会に述べることにして, ここでは詳細は省略する. "ある種の条件を満たす閉集合" のところを, 一般の閉集合にできないか, という疑問が自然に生じる. $\mathbb{N}^\omega$ は距離付け可能, $\{0,1\}^\kappa$ はコンパクトであり, いずれも族正規であるから, 任意の閉集合は明らかに P-embedded である. そこで, (一般化された) 距離空間の正規でない積で最もシンプルなものとして, $\mathbb{N}^{\omega_1}$ に興味をもった.

Question. $\mathbb{N}^{\omega_1}$ において,

(1) C-embedded な閉集合は, P-embedded か?

(2) C^*-embedded な閉集合は, C-embedded か?

(1) については, 次のような結果が得られた.

定理 1. $\mathbb{N}^{\omega_1}$ において, *C-embedded な部分集合は P-embedded である.*

$f, g \in \mathbb{N}^\omega$ に対して,

$$f \leq^* g \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists m \in \omega \forall n \in \omega (m \leq n \to f(n) \leq g(n))$$

として $\leq^*$ を定義する. $\mathcal{B} \subset \mathbb{N}^\omega$ が **bounded** とは, $f \leq^* g$ for all $f \in \mathcal{B}$ となる $g \in \mathbb{N}^\omega$ が存在することである. $\mathcal{C} \subset \mathbb{N}^\omega$ が **unbounded** であるとは, それが bounded でない, ということである. 基数 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ は次のように定義される.

$$\mathfrak{m} \overset{def}{=} \min\{\kappa : \mathrm{MA}(\kappa) \text{ fails}\},$$

$$\mathfrak{b} \overset{def}{=} \min\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \subset \mathbb{N}^\omega \text{ is an unbounded family}\},$$

$$\mathfrak{c} \overset{def}{=} 2^\omega.$$

よく知られているように,

- $\omega_1 \leq \mathfrak{m} \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$. 特に, 連続体仮説を仮定すると $\mathfrak{b} = \omega_1$ である. (see [3])

- ZFC が無矛盾ならば, ZFC+“$\omega_1 < \mathfrak{m} = \mathfrak{c}$” も無矛盾である [5]. 特にそのようなモデルにおいては $\mathfrak{b} > \omega_1$ となる.

Question の (2) については, 次の結果が得られた.

定理 2. *$\mathfrak{b} > \omega_1$ を仮定する. $\mathbb{N}^{\omega_1}$ において, C^*-embedded な部分集合は C-embedded である.*

一方で, 次のことが知られている.

定理 3 ([4])**.** *$\mathbb{N}^{\mathfrak{c}}$ の closed discrete な可算部分集合で, $\mathbb{N}^{\mathfrak{c}}$ において C^*-embedded であるが C-embedded ではないものが存在する.*

このことから, 連続体仮説を仮定すると, $\mathbb{N}^{\omega_1}$ において C^*-embedded であるが C-embedded ではない閉集合が存在することがわかる.

定理 2, 3 から, 次の系が得られる.

系 1. *$\mathbb{N}^{\omega_1}$ において, C^*-embedded であるが C-embedded ではない (閉) 部分集合が存在するかどうかは, ZFC のみでは決定できない.*

参考文献

[1] R. A. Alo and H. L. Shapiro, *Normal topological space*, Cambridge University Press, London (1974).

[2] C. H. Dowker, *On a theorem of Hanner*, Ark. Mat. **2** (1952), 307–313.

[3] K. Kunen, *Set theory*, Studies in Logic **34**, College Publications, London (2011).

[4] E. Pol and R. Pol, *Note on countable closed discrete sets in products of natural numbers*, Topol. Appl. **175** (2014), 65–71.

[5] R. M. Solovay and S. Tennenbaum, *Iterated Cohen extensions and Souslin's problem*, Ann. of Math. **94** (1971), 201–245.