数理解析研究所講究録
第2065巻 2018年 63-74

ヒルベルト空間における二つの可換な hybrid 写像の共通不動点

(Common fixed points of two commutative hybrid mappings in Hilbert spaces)

東海大学 理学部 情報数理学科 高阪 史明
(Fumiaki Kohsaka, Department of Mathematical Sciences,
Tokai University, Japan)*

概要

ヒルベルト空間における二つの可換な hybrid 写像の共通不動点問題に関して得られた共通不動点の存在定理と近似定理を紹介する.

1 はじめに

本稿では, ヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合 C 上の二つの可換な hybrid 写像 S, T について, 方程式 $Su = Tu = u$ を満たす点 $u \in C$ を求める共通不動点問題の解の存在定理と近似定理を紹介する. これらは, 文献 [17] において得られた結果である.

非線形写像の共通不動点を近似する方法は色々と知られているが, ここでは, 非線形エルゴード理論と関連のある写像列

$$V_n = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} S^k T^l \quad (n = 0, 1, \dots) \tag{1.1}$$

を用いた近似法を研究する. 特に, S と T の共通不動点が存在する場合に, C の任意の有界部分集合 D について, 点列 $\{V_n y - SV_n y\}$ と $\{V_n y - TV_n y\}$ が原点に $y \in D$ に関して一様収束することを示す. さらに, この結果を用いることにより, 共通不動点定理, 共通不動点への平均収束定理, 強収束定理, 弱収束定理を得る. なお, これらの収束定理を得る際,

* 〒259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1; f-kohsaka@tsc.u-tokai.ac.jp

写像列 $\{V_n\}$ が文献 [1] で導入された条件 (S) を満たすことを示し, 文献 [1,16] で得られた収束定理を適用する.

Hybrid 写像の概念は, 文献 [2] において導入されたものであり, ヒルベルト空間における nonexpansive 写像と nonspreading 写像の一般化である. C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とするとき, 写像 $T\colon C \to H$ が hybrid [2] であるとは, ある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + 2(1-\lambda)\langle x - Tx, y - Ty\rangle \quad (\forall x, y \in C)$$

が成り立つことをいう. このとき, T を λ-hybrid 写像という. 特に, 1-hybrid 写像は nonexpansive 写像と一致し, 0-hybrid 写像は文献 [18] で導入された nonspreading 写像と一致する. また, $\lambda \in [0,1)$ の場合, 不連続な λ-hybrid 写像が存在する [2, Example 3.4]. Hybrid 写像に関する研究については, 例えば文献 [1–5, 16, 17] を参照すると良い. また, T の不動点全体の集合 $\{u \in C : Tu = u\}$ を $\mathcal{F}(T)$ で表す.

Hybrid 写像について, 次の不動点定理と平均収束定理が成り立つ.

定理 1.1 ([2, Theorems 4.1 and 5.2]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. また, $T\colon C \to C$ を λ-hybrid 写像とする. このとき, T が不動点を持つことは $\{T^n x\}$ が有界となるような $x \in C$ が存在することと同値である. この場合, 任意の $x \in C$ について, 点列

$$\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k x\right\}$$

は $\{P_{\mathcal{F}(T)} T^n x\}$ の強極限に弱収束する. ここで, $P_{\mathcal{F}(T)}$ は H から $\mathcal{F}(T)$ の上への距離射影とする.

これは, nonexpansive 写像に対する Browder [9] の不動点定理と Baillon [7] の非線形エルゴード定理を hybrid 写像に対して一般化するものである.

定理 1.2 ([9, Theorem 1]). C をヒルベルト空間 H の空でない有界閉凸集合とし, $T\colon C \to C$ を nonexpansive 写像とする. このとき, T は不動点を持つ.

定理 1.3 ([7, Théorème]). C をヒルベルト空間 H の空でない有界閉凸集合とし, $T\colon C \to C$ を nonexpansive 写像とする. このとき, 任意の $x \in C$ について, 点列

$$\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k x\right\}$$

は $\{P_{\mathcal{F}(T)}T^n x\}$ の強極限に弱収束する.

また, Wittmann [24] は nonexpansive 写像に対する次の強収束定理を得た.

定理 1.4 ([24, Theorem 2]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, $T\colon C \to C$ を nonexpansive 写像で $\mathcal{F}(T)$ が空でないものとする. また, $x_0 \in C$ とし,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_0 + (1-\alpha_n)Tx_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

とする. ここで, $\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ の数列で

$$\alpha_n \to 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$$

を満たすものとする. このとき, $\{x_n\}$ は $P_{\mathcal{F}(T)}(x_0)$ に強収束する.

Baillon の定理と Wittmann の定理に動機付けられ, Shimizu–Takahashi [19] は, 可換な nonexpansive 写像の共通不動点への強収束定理を得た.

定理 1.5 ([19, Theorem 1]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, $S, T\colon C \to C$ を nonexpansive 写像で $ST = TS$ を満たし, $F := \mathcal{F}(S) \cap \mathcal{F}(T)$ が空でないものとする. また, $x_0 \in C$ とし,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_0 + (1-\alpha_n)\frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i+j=k} S^i T^j x_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

とする. ここで, $\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ の数列で $\alpha_n \to 0$ と $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を満たすものとする. このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(x_0)$ に強収束する.

さらに, Atsushiba–Takahashi [6] は, バナッハ空間における可換な nonexpansive 写像の共通不動点への弱収束定理を得た.

定理 1.6 ([6, Theorem 1]). E を一様凸バナッハ空間とし, そのノルムが Fréchet 微分可能であるか E が Opial 条件を満たすとする. また, C を E の空でない閉凸集合とし, $S, T\colon C \to C$ を nonexpansive 写像で $ST = TS$ を満たし, $F := \mathcal{F}(S) \cap \mathcal{F}(T)$ が空でないものとする. さらに, $x_0 \in C$ とし,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} S^k T^l x_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

とする. ここで, $\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ の数列で $\sup_n \alpha_n < 1$ を満たすものとする. このとき, $\{x_n\}$ は F の点に弱収束する.

本稿の考察対象である写像列 (1.1) は, Atsushiba–Takahashi [6] が nonexpansive 写像の共通不動点問題の研究において用いたものである. 以下で紹介する結果から分かるように, この写像列はヒルベルト空間における二つの可換な hybrid 写像の共通不動点問題の研究においても有用である. この写像列を用いることにより, hybrid 写像の共通不動点の存在定理や共通不動点への収束定理を得ることができる.

2 準備

実数全体の集合と非負の整数全体の集合をそれぞれ $\mathbb{R}$ と $\mathbb{N}$ で表す. 本稿で扱う線形空間は全て実線形空間であるとする. ヒルベルト空間 H の内積とそれに付随するノルムを, それぞれ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と $\|\cdot\|$ で表す. また, H における閉単位球と中心が原点で半径が $r > 0$ の閉球を, それぞれ B_H と rB_H で表す. さらに, 恒等写像を I, S^0, T^0 で表す.

C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, $T\colon C \to H$ とする. また, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. このとき, 次が成り立つ.

- T が λ-hybrid 写像で $\mathcal{F}(T)$ が空でないとき, T は quasi-nonexpansive 写像である. つまり, $\|u - Tx\| \le \|u - x\|$ $(\forall u \in \mathcal{F}(T), x \in C)$ が成り立つ. このとき, [12, Theorem 1] と [15, Corollary 1] より $\mathcal{F}(T)$ は閉凸集合である.
- T が 1-hybrid であることは T が nonexpansive であることと同値である.
- T が 0-hybrid であることは T が nonspreading [18] であることと同値である.
- T が 1/2-hybrid であることは T が Takahashi [22] の意味で hybrid であることと同値である.
- $\lambda > 1$ のとき, λ-hybrid 写像は恒等写像のことである.
- T が firmly nonexpansive 写像 [10, 11, 13, 14], つまり, $2T - I$ が nonexpansive であるとき, 任意の $\lambda \in [0, 1]$ について T は λ-hybrid 写像である [2, Lemma 3.1].
- T が λ-hybrid であるとき, $I - T$ は原点で demiclosed である. つまり, C の点列 $\{z_n\}$ が $u \in C$ に弱収束し, $\{(I - T)z_n\}$ が原点に強収束するとき, $(I - T)u = 0$ が成り立つ [2, Lemma 3.2].

ヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合 C と $x \in H$ が与えられると,

$$\|\hat{x} - x\| \le \|y - x\| \quad (\forall y \in C)$$

を満たす $\hat{x} \in C$ がただ一つ存在する. このとき, $P_C(x) = \hat{x}$ $(\forall x \in H)$ によって定まる一価写像 $P_C\colon H \to C$ を H から C の上への距離射影という. 特に, C が H の閉部分空間で

ある場合, P_C は H から C の上への直交射影と一致する. 距離射影 P_C は H 上の firmly nonexpansive 写像であり, $\mathcal{F}(P_C) = C$ が成り立つ. 非線形解析学とその周辺については文献 [20, 21] を参照すると良い.

C と F をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, $\{S_n\}$ を C 上の写像列とする. このとき, $\{S_n\}$ が F に関して条件 (S) を満たすとは, C の任意の有界点列 $\{z_n\}$ について, $\{S_n z_n\}$ の任意の弱収束部分列の極限が F に属することをいう. これは Aoyama [1] により導入された概念であり, 次の二つの写像列 $\{S_n\}$ の抽象化である.

補題 2.1 ([1, Lemma 3]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. また, $T\colon C \to C$ を λ-hybrid 写像で $\mathcal{F}(T)$ が空でないものとし,

$$S_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とする. このとき, $\{S_n\}$ は $\mathcal{F}(T)$ に関して条件 (S) を満たす.

補題 2.2 ([1, Lemma 4]). H をヒルベルト空間とし, $A\colon H \to 2^H$ を極大単調作用素で $A^{-1}0$ が空でないものとする. また, $\{\lambda_n\}$ を正の実数列で $\lambda_n \to \infty$ を満たすものとし,

$$S_n = (I + \lambda_n A)^{-1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とする. このとき, $\{S_n\}$ は $A^{-1}0$ に関して条件 (S) を満たす.

条件 (S) を満たす写像列について, 次の強収束定理と弱収束定理が成り立つ.

定理 2.3 ([1, Theorem 1]). C と F をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合で $F \subset C$ を満たすものとし, $\{S_n\}$ を C 上の写像列で次を満たすものとする.

(i) $\|w - S_n x\| \le \|w - x\| \quad (\forall n \in \mathbb{N}, w \in F, x \in C)$.
(ii) $\{S_n\}$ は F に関して条件 (S) を満たす.

また, $u, x_0 \in C$ とし,

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) S_n x_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

とする. ここで, $\{\alpha_n\}$ は $[0, 1]$ の数列で $\alpha_n \to 0$ と $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を満たすものとする. このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(u)$ に強収束する.

定理 2.4 ([16, Theorem 3.1]). H, C, F, $\{S_n\}$ を定理 2.3 と同じものとする. また, $x_0 \in C$ とし,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) S_n x_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

とする．ここで，$\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ の数列で $\sup_n \alpha_n < 1$ を満たすものとする．このとき，$\{x_n\}$ は $\{P_F(x_n)\}$ の強極限に弱収束する．

次の補題は，写像列 (1.1) の漸近挙動を研究する際に大切な役割をする．この等式は，文献 [8, Theorem 1] と [19, Lemma 1] の証明で用いられたものである．

補題 2.5 ([17, Lemma 2.2]). $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ をヒルベルト空間 H の有限点列とし，$z = (n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} x_k$ とおく．このとき

$$\|z-u\|^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(\|x_k - u\|^2 - \|x_k - z\|^2 \right)$$

が任意の $u \in H$ について成り立つ．

証明. $u \in H$ とするとき，H がヒルベルト空間であることより

$$\|x_k - u\|^2 = \|x_k - z\|^2 + \|z-u\|^2 + 2\langle x_k - z, z-u \rangle$$

が成り立つ．これを $k \in \{0,1,\dots,n\}$ について加えると

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \|x_k - u\|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \|x_k - z\|^2 + (n+1)\|z-u\|^2 + 2\left\langle \sum_{k=0}^{n} x_k - (n+1)z, z-u \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{n} \|x_k - z\|^2 + (n+1)\|z-u\|^2 .
\end{aligned}$$

となる．両辺に $1/(n+1)$ を掛けて結論を得る． □

次の補題は [23, Lemma 3.2] の一般化である．

補題 2.6 ([17, Lemma 2.3]). F をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし，$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ を H の有向点列で

$$\alpha, \alpha' \in \mathcal{A},\ \alpha \le \alpha',\ p \in F \Longrightarrow \|p - x_{\alpha'}\| \le \|p - x_\alpha\|$$

を満たすものとする．このとき，次が成り立つ．

(i) $\alpha, \alpha' \in \mathcal{A}$ かつ $\alpha \le \alpha'$ であれば，$\|P_F x_{\alpha'} - x_{\alpha'}\| \le \|P_F x_\alpha - x_\alpha\|$ が成り立つ．
(ii) $\{P_F x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ は F の点に強収束する．

また, hybrid 写像の有界性に関する次の補題が成り立つ.

補題 2.7 ([17, Lemma 2.5]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. また, $T\colon C \to C$ を λ-hybrid 写像とする. このとき, C の任意の空でない有界部分集合 U について, $T(U)$ は有界となる.

証明. 結論を否定すると, C の有界点列 $\{z_n\}$ で $\|z_n\| > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ と $\|Tz_n\| \to \infty$ を満たすものが存在する. ここで $y \in C$ を固定するとき, T が λ-hybrid であることから

$$\begin{aligned}\|Tz_n - Ty\|^2 &\leq \|z_n - y\|^2 + 2(1-\lambda)\langle z_n - Tz_n, y - Ty\rangle \\ &\leq \|z_n - y\|^2 + 2|1-\lambda|\,\|z_n - Tz_n\|\,\|y - Ty\|\end{aligned}$$

となる. よって

$$\|Tz_n\| - 2\|Ty\| + \frac{\|Ty\|^2}{\|Tz_n\|} \leq \frac{(\|z_n\| + \|y\|)^2}{\|Tz_n\|} + 2|1-\lambda|\left(\frac{\|z_n\|}{\|Tz_n\|} + 1\right)\|y - Ty\|$$

が任意の $n \in \mathbb{N}$ について成り立つ. これより矛盾が得られるため, 結論が成り立つ. □

3 一様収束定理と共通不動点定理

本節では, 二つの可換な hybrid 写像に対して定まる写像列 (1.1) に関する一様収束定理と共通不動点の存在定理を得る.

本節を通して以下を仮定する.

- C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とする.
- $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ とし, $S\colon C \to C$ を λ-hybrid 写像, $T\colon C \to C$ を μ-hybrid 写像とする.
- C 上の写像列 $\{V_n\}$ を (1.1) で定める.

次の重要な補題は [19, Lemma 1] の手法を参考にして得られたものである. この補題が本稿の結果を得る際に本質的な役割をする.

補題 3.1 ([17, Lemma 3.1]). D を C の空でない部分集合で

$$\{S^k T^l y : y \in D,\, k, l \in \mathbb{N}\}$$

が有界であるものとする. このとき, 次が成り立つ.

(i) $\lim_n \sup_{y \in D} \|V_n y - SV_n y\| = 0$.

(ii) $ST = TS$ ならば, $\lim_n \sup_{y\in D} \|V_n y - TV_n y\| = 0$ となる.

補題 3.1 を用いると, 次の共通不動点定理が得られる.

定理 3.2 ([17, Theorem 3.2]). $ST = TS$ であるとき, $\mathcal{F}(S)\cap\mathcal{F}(T)$ が空でないことは, $\{S^kT^lx : k,l\in\mathbb{N}\}$ が有界となるような $x\in C$ が存在することと同値である.

証明. 必要性は明らかである. 実際, $\mathcal{F}(S)\cap\mathcal{F}(T)$ が空でないとき, $u\in\mathcal{F}(S)\cap\mathcal{F}(T)$ について, $\{S^kT^lu : k,l\in\mathbb{N}\} = \{u\}$ となり, この集合は有界である. 次に必要性を示すために, $\{S^kT^lx : k,l\in\mathbb{N}\}$ が有界となるような $x\in C$ の存在を仮定し, $D=\{x\}$ とおく. ここで, 補題 3.1 より

$$\lim_{n\to\infty} \|(I-S)V_nx\| = \lim_{n\to\infty} \|(I-T)V_nx\| = 0$$

となる. $I-S$ と $I-T$ は原点で demiclosed であるから, $u\in\mathcal{F}(S)\cap\mathcal{F}(T)$ を得る. □

定理 3.2 の系として, 次の不動点定理を得る.

系 3.3 ([2, Theorem 4.1]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, $\lambda\in\mathbb{R}$ とする. また, $S\colon C\to C$ を λ-hybrid 写像とする. このとき, $\mathcal{F}(S)$ が空でないことは, $\{S^nx\}$ が有界となるような $x\in C$ が存在することと同値である.

補題 3.1 を用いると, 次の一様収束定理も得られる.

定理 3.4 ([17, Theorem 3.4]). $ST = TS$ であり, $\mathcal{F}(S)\cap\mathcal{F}(T)$ が空でないとき, C の任意の空でない有界部分集合 D について

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in D} \|V_ny - SV_ny\| = \lim_{n\to\infty}\sup_{y\in D} \|V_ny - TV_ny\| = 0$$

が成り立つ.

証明. D を C の任意の空でない有界部分集合とし, $w\in\mathcal{F}(S)\cap\mathcal{F}(T)$ とする. S と T が quasi-nonexpansive であることから, $\|w - S^kT^ly\| \le \|w-y\|$ が任意の $y\in D$ と $k,l\in\mathbb{N}$ について成り立つ. これより, 集合 $\{S^kT^ly : y\in D,\ k,l\in\mathbb{N}\}$ の有界性が得られるので, 補題 3.1 より結論が従う. □

定理 3.4 を用いると, 写像列 $\{V_n\}$ が条件 (S) を満たすことが分かる.

系 3.5 ([17, Corollary 3.6]). $ST = TS$ であり, $\mathcal{F}(S)\cap\mathcal{F}(T)$ が空でないとき, 次が成り立つ.

(i) $\|w - V_n x\| \leq \|w - x\| \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ w \in \mathcal{F}(S) \cap \mathcal{F}(T),\ x \in C)$.

(ii) $\{V_n\}$ は $\mathcal{F}(S) \cap \mathcal{F}(T)$ に関して条件 (S) を満たす.

証明. (i) は S と T が quasi-nonexpansive 写像で共通不動点を持つことから示される. (ii) を示すために, $\{z_n\}$ を C の有界点列とする. このとき, ある $\rho > 0$ が存在して, $\{z_n\}$ は閉球 ρB_H に含まれる. ここで, 定理 3.4 を用いると

$$\|(I - S)V_n z_n\| \leq \sup_{y \in C \cap \rho B_H} \|V_n y - S V_n y\| \to 0$$
$$\|(I - T)V_n z_n\| \leq \sup_{y \in C \cap \rho B_H} \|V_n y - S V_n y\| \to 0$$

が得られる. $I - S$ と $I - T$ は原点で demiclosed であるので, $\{V_n z_n\}$ の任意の弱収束部分列の極限は $\mathcal{F}(S) \cap \mathcal{F}(T)$ に属する. したがって, $\{V_n\}$ は条件 (S) を満たす. □

4　可換な hybrid 写像の共通不動点への収束定理

本節では, 二つの可換な hybrid 写像の共通不動点への平均収束定理, 強収束定理, 弱収束定理とそれらの系を得る.

集合 $\mathbb{N}^2$ 上の二項関係を $k \leq k'$ かつ $l \leq l'$ のとき $(k, l) \leq (k', l')$ と定める. このとき, $(\mathbb{N}^2, \leq)$ は明らかに有向集合となる.

補題 2.6 と系 3.5 を用いることにより, 次の平均収束定理を得ることができる.

定理 4.1 ([17, Theorem 4.1]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ とする. $S\colon C \to C$ を λ-hybrid 写像とし, $T\colon C \to C$ を μ-hybrid 写像とする. また, $ST = TS$ と $F := \mathcal{F}(S) \cap \mathcal{F}(T) \neq \emptyset$ が成り立つとする. さらに, $x \in C$ とし,

$$x_n = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} S^k T^l x \quad (n = 0, 1, \dots)$$

とする. このとき, $\{x_n\}$ は $\{P_F S^k T^l x\}_{(k,l) \in \mathbb{N}^2}$ の強極限に弱収束する.

定理 4.1 の系として, 次の平均収束定理を得る.

系 4.2 ([2, Theorem 5.2]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. また, $S\colon C \to C$ を λ-hybrid 写像で $\mathcal{F}(S)$ が空でないものとする. さらに, $x \in C$ とし,

$$x_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S^k x \quad (n = 0, 1, \dots)$$

とする. このとき, $\{x_n\}$ は $\{P_{\mathcal{F}(S)}S^n x\}$ の強極限に弱収束する.

定理 2.3 と系 3.5 を用いると, 次の強収束定理が得られる.

定理 4.3 ([17, Theorem 4.3]). H, C, S, T, F を定理 4.1 と同じものとする. また, $u, x_0 \in C$ とし,

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} S^k T^l x_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

とする. ここで, $\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ の数列で $\alpha_n \to 0$ と $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$ を満たすものとする. このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(u)$ に強収束する.

定理 4.3 の系として, 次の強収束定理を得る.

系 4.4 ([1, Theorem 2]). H, C, S を系 4.2 と同じものとする. また, $u, x_0 \in C$ とし,

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S^k x_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

とする. ここで, $\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ の数列で $\alpha_n \to 0$ と $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$ を満たすものとする. このとき, $\{x_n\}$ は $P_{\mathcal{F}(S)}(u)$ に強収束する.

定理 2.4 と系 3.5 を用いると, 次の弱収束定理が得られる.

定理 4.5 ([17, Theorem 4.6]). H, C, S, T, F を定理 4.1 と同じものとする. また, $x_0 \in C$ とし,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} S^k T^l x_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

とする. ここで, $\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ の数列で $\sup_n \alpha_n < 1$ を満たすものとする. このとき, $\{x_n\}$ は $\{P_F(x_n)\}$ の強極限に弱収束する.

定理 4.5 の系として, 次の弱収束定理を得る.

系 4.6 ([16, Corollary 5.2]). H, C, S を系 4.2 と同じものとする. また, $x_0 \in C$ とし,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S^k x_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

により定める. ここで, $\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ の数列で $\sup_n \alpha_n < 1$ を満たすものとする. このとき, $\{x_n\}$ は $\{P_{\mathcal{F}(S)}(x_n)\}$ の強極限に弱収束する.

5 可換な hybrid 写像の例

最後に, ヒルベルト空間 H における可換な hybrid 写像の例を挙げる.

例 5.1 ([17, Example 5.1]). $S\colon H \to H$ を線形写像で $\|Sx\| = \|x\|$ $(\forall x \in H)$ を満たすものとする. また, $r > 0$ とし, T を H から rB_H の上への距離射影とする. このとき, S は 1-hybrid 写像, T は firmly nonexpansive 写像であり, $ST = TS$ が成り立つ.

例 5.2 ([17, Example 5.2]). $S\colon H \to H$ を線形写像で $\|Sx\| = \|x\|$ $(\forall x \in H)$ を満たすものとし, $U, V\colon H \to H$ を firmly nonexpansive 写像で $SU = US$, $SV = VS$, $U(H) \cup V(H) \subset rB_H$ $(\exists r > 0)$ を満たすものとする. また, $\lambda \in [0, 1)$ とし, δ を

$$\delta \geq \left(1 + 2\sqrt{\frac{2-\lambda}{1-\lambda}}\right) r$$

を満たす実数とする. さらに, $T\colon H \to H$ を

$$Tx = \begin{cases} Ux & (x \in \delta B_H) \\ Vx & (x \in H \setminus \delta B_H) \end{cases}$$

により定める. このとき, S は 1-hybrid 写像, T は λ-hybrid 写像であり, $ST = TS$ が成り立つ.

例 5.3 ([17, Example 5.3]). $S\colon H \to H$ を affine な nonexpansive 写像とし, $N\colon H \to H$ を nonspreading 写像で $SN = NS$ を満たすものとする. また, $\beta \in [0, 1)$ とし, $T\colon H \to H$ を $T = \beta I + (1-\beta)N$ により定める. このとき, S は 1-hybrid 写像, T は $-\beta/(1-\beta)$-hybrid 写像であり, $ST = TS$ が成り立つ.

参考文献

[1] K. Aoyama, *Halpern's iteration for a sequence of quasinonexpansive type mappings*, Nonlinear mathematics for uncertainty and its applications, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011, pp. 387–394.

[2] K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Fixed point and ergodic theorems for λ-hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 335–343.

[3] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Fixed point and mean convergence theorems for a family of λ-hybrid mappings*, J. Nonlinear Anal. Optim. **2** (2011), 87–95.

[4] ———, *Fixed point theorem for α-nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **74** (2011), 4387–4391.

[5] ———, *Uniform mean convergence theorems for hybrid mappings in Hilbert spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2012), 2012:193, 1–13.

[6] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. **57** (1998), 117–127.

[7] J.-B. Baillon, *Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **280** (1975), 1511–1514.

[8] H. Brézis and F. E. Browder, *Nonlinear ergodic theorems*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 959–961.

[9] F. E. Browder, *Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **53** (1965), 1272–1276.

[10] ———, *Convergence theorems for sequences of nonlinear operators in Banach spaces*, Math. Z. **100** (1967), 201–225.

[11] R. E. Bruck Jr., *Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **47** (1973), 341–355.

[12] W. G. Dotson Jr., *Fixed points of quasi-nonexpansive mappings*, J. Austral. Math. Soc. **13** (1972), 167–170.

[13] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[14] K. Goebel and S. Reich, *Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry, and Nonexpansive Mappings*, Marcel Dekker Inc., New York, 1984.

[15] S. Itoh and W. Takahashi, *The common fixed point theory of singlevalued mappings and multivalued mappings*, Pacific J. Math. **79** (1978), 493–508.

[16] F. Kohsaka, *Weak convergence theorem for a sequence of quasinonexpansive type mappings*, Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2015, pp. 289–300.

[17] ———, *Existence and approximation of common fixed points of two hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **16** (2015), 2193–2205.

[18] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **91** (2008), 166–177.

[19] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), 71–83.

[20] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[21] ———, *Introduction to Nonlinear and Convex Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.

[22] ———, *Fixed point theorems for new nonlinear mappings in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 79–88.

[23] W. Takahashi and M. Toyoda, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings*, J. Optim. Theory Appl. **118** (2003), 417–428.

[24] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math. (Basel) **58** (1992), 486–491.