

計算尺を使った数学教育

Learning Mathematics with a slide rule

大島利雄

TOSHIO OSHIMA*¹

城西大学 理学部

FACULTY OF SCIENCE, JOSAI UNIVERSITY

Abstract

大学における数学科の講義において、理解を助けるためにグラフや表などを用いることが有効である。その一環で、数の大きさや対数などの関数やその逆関数の理解を助けるため、学生に計算尺を作成させ、その原理を理解してもらうことを試みた。これらは数式処理を用いて作成した教材であり、講義の概略や計算尺を使った内容について解説する。

1 はじめに

教育現場で、学生の主体的学修が近年特に求められている。数学においても同様で、学生は学ぶべき内容を主体的に学修し理解することが肝要であるが、その達成の程度の判定には入試を含め筆記の試験に依ることが多い。学修して理解するよりも試験にパスすること（出題される試験問題が解けるようになること）が勉学の目的となって、内容を理解する、という本来の目的を持たない学生が多く見られる。主体的学修は近年アクティブラーニングと言われるが、大学の数学科で4年次に行われることが多い少人数のセミナーは、その典型例で、工夫して行えば、学生の主体的学修を理想的に実現することができ、試験などを行わなくても、セミナーの中において学生の達成度（理解できているかどうか？）の判断が容易で、臨機応変の指導が可能である。

中高で主体的な学修を経験せずに大学に入学してくる学生が多く、早い時期から正しい学び方を身につけないと、大学での数学教育は無意味なものになってしまう。まず、論理的思考とその表現能力を身につけることが必要である。大学での基礎数学教育は、通常は線形代数と微積分であり、学生はこれらの十分な理解のもと、後期教育に進むべきであるが、なかなか現実はそのようになっていない。私は城西大の理学部数学科に所属しており、後期教育とは、卒業までの後期2年間の理学部数学科の教育のこととなる。3年次では、複素解析と実解析の専門科目を今年度担当している。共に1年間の教科であるが、実解析で計算尺を取り入れた教育を試みたので、それについて記してみたい。

*¹ t-oshima@josai.ac.jp

城西大の数学科では、実解析の中身は、ルベグ積分、フーリエ解析、関数解析などが該当し得ると思われるが、私はフーリエ解析（主にフーリエ級数）を主体とし、最終的には微分方程式や関数解析などに関連する話まで持って行くのを最終目標として内容を設定した。中核をなすフーリエ級数では、いくつかの収束定理やパーセヴァルの等式、ギブス現象、離散フーリエ級数などの他、多項式近似定理、直交多項式、一様分布定理（無理数 r に対し、 nr の小数部分が $n = 1, 2, \dots$ で $[0, 1]$ において一様分布する）、 $\sin x$ の無限積展開など、周辺の関連する話題を盛り込んでいる。

我々が物事を理解するのは、本や話など言葉からだけでなく、視覚や聴覚などによる感覚的な理解が重要と考えられ、これは数学においても考慮すべきと思う。これらはアナログ的なものと考えられるが、現在は画像や動画、音楽などもデジタルな形に変換して保存や作成を行い、それがアナログ的なものに変換されて我々の認識される形となる場合が多い。数学教育においても、単なる式の変換規則や数の計算だけでなく、大きさを長さで表したり、グラフや模型を用いたり、また、音や光の強さを対数的に理解するなど、人間の感覚にあった教育が効果的ではないか、と考へ、計算尺を教材に取り入れた理由である。現在では、これらのアナログ的なものもコンピュータを利用して昔より容易にデジタル的に実現できる。

2 近似の話

2.1 テイラーの定理

大学での微積分で習得すべき最初の重要な結果はテイラーの定理であろう。これを正しく理解することによって微分の理解が深まると考えられる。この定理は抽象的で、学生には理解が困難であるので、それを再度やり直して理解を深めることを最初に行った。すなわち、30 週の講義のうちの最初の 10 週弱が「近似」ということがテーマの講義となった。

テイラーの定理は、1 年で学んだのと同じ導入ではなく、以下の左辺の計算を部分積分を行うことによって求めさせる演習から始めた（数学的帰納法の練習にもなる）。

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a),$$

$$\int_a^x (x-t)f''(t)dt = [(x-t)f'(t)]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x f'(t)dt = -f'(a)(x-a) + f(x) - f(a),$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (t-a)f''(t)dt.$$

$$\int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t)dt = ?, \dots, \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = ?$$

特に、 $t \in [a, x]$ ($x < a$ ならば、 $t \in [x, a]$) のとき、ある正数 C に対して $|f''(t)| \leq C$ とな

るとする. このとき $|\int_a^x (x-t)f''(t)dt| \leq |\int_a^x C|t-a|dt| = \frac{C}{2}|x-a|^2$ であるので

$$|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)| \leq \frac{C}{2}|x-a|^2 \quad (1)$$

となる (この式を理解することを「近似の話」での主目標に設定した). たとえば

$$\sqrt{5} = 2(1 + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{10} = 3(1 + \frac{1}{9})^{\frac{1}{2}}$$

に対して適用すると $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ の近似値 $2(1 + \frac{1}{8}) = \frac{9}{4} \doteq 2.25$, $3(1 + \frac{1}{18}) \doteq 3.1667$ を得る.

$\sqrt{5}$ の近似値として $\frac{9}{4}$ を考えたが, これを使うと $\sqrt{5} = \frac{9}{4}\sqrt{\frac{16}{81} \cdot 5} = \frac{9}{4}\sqrt{1 - \frac{1}{81}}$ が得られ, これを繰り返すと $\sqrt{5}$ に急速に収束する有理数列が得られる ($a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{5}{a_n})$).

一方, テイラーの定理を示すのは

$$g(0) = 0, g'(x) \geq 0 \quad (\forall x \in [0, 1]) \Rightarrow g(x) \geq 0 \quad (\forall x \in [0, 1]),$$

$$g(0) = g'(0) = 0, g''(x) \geq 0 \quad (\forall x \in [0, 1]) \Rightarrow g(x) \geq 0 \quad (\forall x \in [0, 1]), \dots$$

$$g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n-1)}(0) = 0, g^{(n)}(x) \geq 0 \quad (\forall x \in [0, 1]) \Rightarrow g(x) \geq 0 \quad (\forall x \in [0, 1])$$

などとし, $\alpha \leq f^{(n)}(x) \leq \beta \quad (\forall x \in [0, 1])$ のとき $g(x) = f(x) - f(0) - f'(0)x - \dots - f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \alpha\frac{x^n}{n!}$ を考える, というようなやり方もある (微分可能な関数の値域は区間となること — 導関数の連続性は不要 — を使えば, 元々のテイラーの定理も示せる).

2.2 対数表

高校で学習した 4 桁常用対数表を題材にする. まず

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \dots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}$$

を積分して, $\log(1+x)$ や $\log \frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x)$ の $x=0$ での n 次までの展開とその誤差の評価を行う (具体的にテイラーの定理の剰余項まで求めるので, 復習になる. また, 前者では $x=1$ とおいて無限級数の和が求まる: $x \geq 0 \Rightarrow \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$ に注意). これを元に, $\log_{10} x$ ($x \in [1, 10]$) の値を電卓程度の機能で十分正確に計算するやり方 (誤差の評価も含む) を学修する (たとえば $x=2, 3, \dots, 9$ のときに計算する. あとはそれを用いて, 一般的な計算法を考える: 計算されている x との比が 1 に近い x を選ばばよい).

たとえば $\log 2 = \log \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$, $\log 5 - 2\log 2 = \log(1 + \frac{1}{4}) = \log \frac{1+\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}$, $\log 3 = \frac{1}{2}(\log(1 - \frac{1}{10}) + \log 2 + \log 5)$, $\log 7 = \frac{1}{2}(\log(1 - \frac{1}{50}) + \log 2 + 2\log 5)$ など, いろいろ工夫できる.

さらに (1) のバリエーションとして, 以下を示す.

定理. $f(x)$ を C^2 級の関数とし, $[a, b]$ が $f(x)$ の定義域に含まれるとすると

$$\left| f(x) - \left(f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a)) \right) \right| \leq \max_{a \leq t \leq b} |f''(t)| \cdot \frac{(b-a)^2}{8} \quad (a \leq x \leq b).$$

常用対数表など任意の数表を作成するための Risa/Asir の関数を作成した ([4]).

```
os_md.ntable(log(x)/log(10), [1, 5.5], [45, 10] |str=[1, 4], top=[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9],
hline=[0, [1, 5]], vline=[0, 1, 6, z-2], dif=1);
```

これにより、関数 $\log_{10} x$ についての区間 $[1, 5.5]$ の数表を、区間を 45 等分し、さらに 10 等分し、数値は変数を小数点以下 1 桁、関数値は 4 桁の数字で作成する。最初の行には $0, 1, \dots, 9$ を入れる。先頭と次の行からも 5 行目毎に横線を、縦は $0, 1, 6$ 、最後から 2 列戻った位置に縦線を入れること、`dif=1` は、差分の範囲も入れたのを $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ の `tabular` 環境で出力することを指定している。これにより以下のような数表が作成される (冒頭部分)。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374	40	43
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755	36	39
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106	33	36

差分の部分のテーブル (の一部) については

```
os_md.ntable(x*y/10, [[1, 11], [30, 44]], [10, 14] |hline=[0, z-1, z], str=[0, 0], TeX=1);
/* x=1, 2, ..., 10 (10 個) y=30, 31, ..., 43 (14 個) */
```

とすれば以下が得られる (2 変数関数の数表で、 x が縦、 y が横で、範囲と分割の数を指定)。

1	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4
2	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	9
3	9	9	10	10	10	11	11	11	11	12	12	12	13	13
4	12	12	13	13	14	14	14	15	15	16	16	16	17	17
5	15	16	16	17	17	18	18	19	19	20	20	21	21	22
6	18	19	19	20	20	21	22	22	23	23	24	25	25	26
7	21	22	22	23	24	25	25	26	27	27	28	29	29	30
8	24	25	26	26	27	28	29	30	30	31	32	33	34	34
9	27	28	29	30	31	32	32	33	34	35	36	37	38	39
10	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43

これにより、例えば $\log_{10} 1.234$ の値は、差分のテーブルの $0934 - 0899 = 35$ の 4 の項 ($35 \times \frac{4}{10}$) から 14 を得て、 $0.0899 + 0.0014 = 0.0913$ を得る。逆引きも容易になる。

このような線形近似が有効なことを、定理から理解すると共に、約 4 桁の精度の掛け算や割り算をこの 4 桁対数表を使って学修する。また、対数表が用いられる以前は、計算に三角関数表を用いたことを学ぶ。さらに、対数方眼紙の使い方と、それが有効な現象について学修する。そのような方眼紙の作成も [4] の関数がサポートしている。

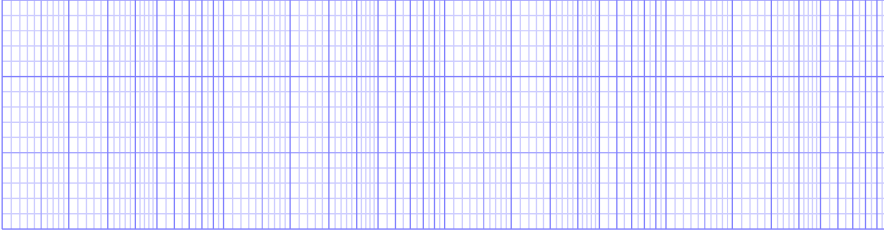
```
L=["blue!20", "blue!35", "blue!50"]$ /* 線種 : [最小目盛, 中間目盛, 通常目盛] */
X=[10, 0, 2, 0.15, L]]$ Y=[3, 0, 2, 0.15, L]]$
/* [方眼紙のサイズ (横/縦 cm), 0:等間隔か 1:対数目盛か, 一つのユニットの大きさ (cm),
  細分したときの最小幅 (cm), 線種] */
```

```

S0=xyproc(os_md.xygrid(X,Y))$ /* 2mm 方眼紙 */
U=[12,1,3,0.03,L]$ V=[3,1,3,0.03,L]$ W=[3,-1,3,0.03,L]$
S1=os_md.xyproc(os_md.xygrid(U,Y))$ /* 片対数方眼紙 */
S2=os_md.xyproc(os_md.xygrid(U,V))$ /* 両対数方眼紙 */
S3=os_md.xyproc(os_md.xygrid(U,W))$ /* 左上原点両対数方眼紙 */

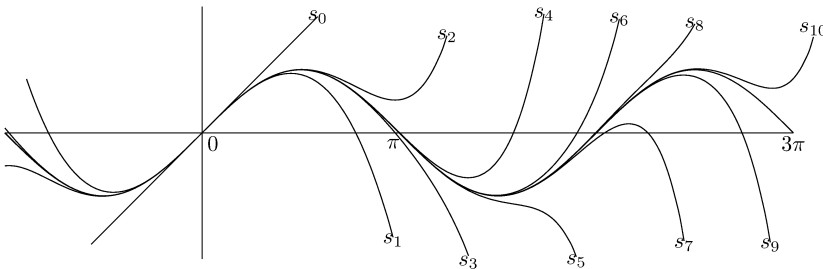
```

これで方眼紙の $\text{T}_\text{E}\text{X}$ のソースを得る (TikZ を用いている). 以下は片対数方眼紙の一部.



π の近似値を求める話も入れた. その一つに $\sin x$ のマクローリン展開の x^{n+1} 次の項までを $s_n(x)$ とおき, $\sin x = \frac{1}{2}$ となる $x \in (0, 1)$ を, $s_{2m-1}(x) \leq \sin x \leq s_{2m}(x)$ を利用して近似する. この展開の理解を助ける以下のグラフも [4] の `xygraph()` を使って作成した.

$\sin x$ と $s_n(x)$ のグラフ

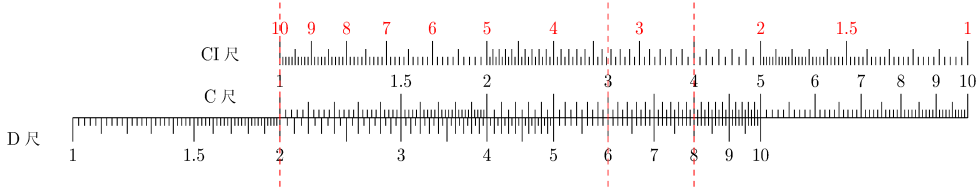


3 計算尺

$\log_{10} x$ の位置に数字 x の目盛が降られた定規を考える. x は 1 から 10 まで, 0.1 刻み程度に目盛が刻まれているとする. 1 は $\log_{10} 1 = 0$ の位置に, 10 は 1 の位置に目盛が描かれ, 2 は $\log_{10} 2 = 0.3010\dots$ の位置に描かれる. このような定規を 2 つ用意し, C 尺と D 尺という. D 尺の方は固定し (固定尺という), C 尺は (滑尺という) D 尺に並べてスライドして動かして考える. たとえば 1 の長さは 25cm 程度と想像するとよい (25cm 計算尺).

CI 尺と DI 尺は, それぞれ滑尺, 固定尺の $1 - \log_{10} x$ の位置に 1 から 10 まで目盛が描かれている. また滑尺にある A 尺と固定尺にある B 尺は, $\frac{1}{2} \log_{10} x$ の位置に 1 から 100 までの目盛が描かれている. また, K 尺は, $\frac{1}{3} \log_{10} x$ の位置に 1 から 1000 までの目盛が描かれ, L 尺は $\frac{x}{10}$ の位置に 0 から 10 まで目盛が描かれている. また, 横が同じ位置の目盛を読むために縦の線が引かれた可動のカーソルがある.

掛け算：D 尺の目盛 2 の位置に C 尺の目盛 1 をスライドさせると C 尺の目盛 3 の位置は D 尺では $\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = \log_{10} 6$ の位置に来るので、D 尺の目盛を読むと 6 となっている。このようにして 2×3 の値が、滑尺をスライドさせ、目盛を読むことで得られる。このような仕組みで掛け算が計算できる。



また D 尺の目盛 8 の位置に CI 尺の 2.5 を合わせると、C 尺の目盛 1 の位置の D 尺から $8 \times 2.5 = 20$ が、C 尺の目盛 3 の位置を D 尺で読むと、 $8 \times 2.5 \times 3 = 60$ が、CI 尺の目盛 4 から $8 \times 2.5 \div 4 = 5$ が分かる。D 尺の目盛 6 の位置に C 尺の目盛 3 を合わせて CI 尺の目盛 2.5 の位置の D 尺を読むと $6 \div 3 \div 2.5 = 0.8$ が分かる（読まれる数は、10 の整数べきが無視される）。さらに、カーソルを利用しながら滑尺を動かしていくことによって、掛け算や割り算の連続計算ができる。

A 尺, B 尺, K 尺を合わせて使うと、上の計算に合わせて、2 乗や平方根を含む計算などもできる。目盛外れを防ぐための 0.5 ずらした CF 尺, CFI 尺, DF 尺 ((C, CI, D) と (CF, CFI, DF) を計算途中で行き来してよい) のほか、 $3 - m \pm \log_{10} \log x$ に対応する LLm 尺, LL0m 尺や $1 + \log_{10} \sin x^\circ$ を与える S 尺 ($\sin 5.74^\circ \sim \sin 90^\circ$) や $m - 1 + \log_{10} \tan x^\circ$ を与える Tm 尺 ($m = 1, 2$) などとも考察する（関数値が $[0, 1]$ となる範囲を使う）。

計算尺の作成

このような計算尺を学生自ら作成して使い方を学ぶことにより、数の大きさの感覚、対数などの初等関数やそれらの逆関数の理解を深めてもらう。

紙製の計算尺の作成のための T_EX ソース出力のプログラムは [4] にある。現在、円形の計算尺が市販されているが、より使いやすく精度のよいものを作ることができる。種々のものが作成可能であるが (cf. [4])、次ページに比較的簡単に完成できるものを載せた。

1. しっかりした紙 (など) に印刷して、固定尺の部分と滑尺の部分 (後者は紙の幅程度に長さを大きく取る) を切り抜く。固定尺の部分は窓 (D 尺と DF 尺の間) を開け、(印刷部分が外側になるように) 袋状に三つ折りにして、固定尺を包み込むようにする。滑らかだがガタがないように滑尺が動くように幅などを微妙に調整するのがコツ。

2. 可能なら、手書き用の薄い OHP シートを窓の開いた固定尺の表面に貼って補強する。

3. 手書き用の薄い OHP シートを、幅数 cm 位に切り、幅の中央に OHP 用の赤ペンで線を引き、紙製の計算尺に巻き付けて、帯状に貼りあわせた可動のカーソルを作る。

OHP シートはペットボトルと同じ素材なので、ペットボトル工作用の接着剤を使う。その他、OHP シートへのプリンタでの印刷など、工夫してもよい。

中学生や高校生には

以上は、対数を知っている高校生や大学生対象であるが、小学生や中高生向けに、計算尺の原理を理解しながら計算尺を作成するには以下のようにすればよい。

1. 1年に1割の利息がつく預金口座があったとして、年毎の複利計算で1万円が x 年後に y 万円になる、という表を作成する ($0 \leq x \leq 25$)。まずは x が整数のときから (電卓など利用可)。1年未満の端数は、1年の利息を期間に応じて比例配分した利息とする (たとえば、2.3年後は $1.1^2 \times (1 + 0.1 \times 0.3) = 1.2463$ 万円。1円以下の端数は四捨五入)。

2. 逆に y 万円になるのは x 年かかる、という表を作成する ($1 \leq y \leq 10$ で、まずは、 y が整数のとき、次に $y = 1.1, 1.2, \dots, 1.9$ など。 x は小数点以下2桁程度まで求める)。

3. 2の表を参照して、 y の数字を基準点から x cmのところ目盛を入れて書き込んで、帯状の定規のようなものを作る ($y = 1, 1.1, \dots, 10$)。

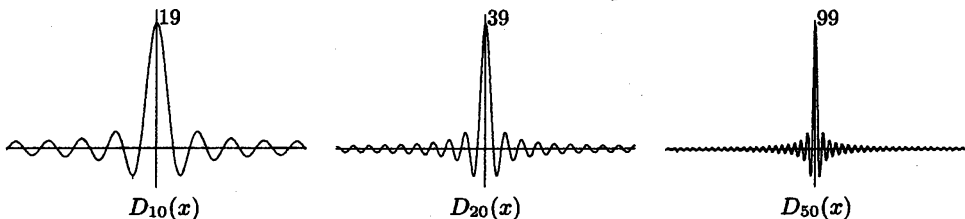
これにより尺の一つが出来た。すなわち y の位置が基準点から x cmの所にあれば (定規で測る)、 y 倍になるのは x 年かかると読める。細かな目盛は場合によっては、等分して入れてしまっても大差ないことを見る。さらに、 y' 倍になるのが x' 年かかるとすると、 $(x+x')$ 年後に何倍になるか、は $(x+x')$ cmのところ目盛からほぼ分かることを理解する。この定規2つ (切るかコピーで作る) を使って、掛け算や割り算が出来たことを学ぶ。

4. 実際に複利計算がされるのは1年ごとで連続でないから、計算尺としてある程度の誤差が生じることを理解する (今の場合、実用上あまり問題ない。10倍になるのは、約24.153年後で、 $\frac{\log 10}{\log 1.01} \approx 24.159$ 。尺の作成は、A4紙を横に使うとよい。25cm計算尺とほぼ同じサイズになる)。半年ごとの複利で1年後に1.1倍になるのは、年の利息がいくつの場合かを求めて (平方根ができればよい)、それを使うとより正確になることを学ぶとよい。これを続けることにより、指数関数や対数関数の話に繋げることが出来る。誤差の評価なども含めれば、大学レベルでも問題ない。

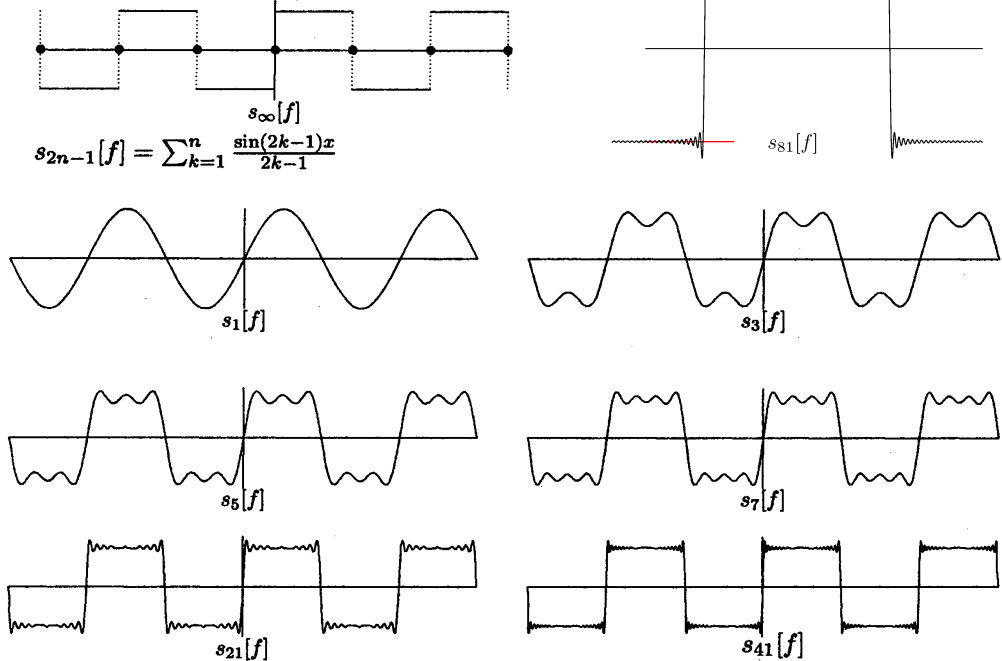
4 Fourier 解析

多くのグラフを [4] の関数 `xygraph()` を使って描画し、それを挿入したテキストを配布した。`xygraph()` は必要に応じて自動判断して細分を細かくした区分3次ベジェ曲線で曲線を描くオリジナルのもので、[2, 3] に解説がある。それを使ったいくつかの例を挙げる。

$$\text{ディリクレ核 } D_n(x) = \frac{\sin(n - \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}$$



方形波のフーリエ級数近似とギブス現象



これらを描くための [4] の関数 `fouriers()` は以下のようなものである。

`fouriers([a0, a1, ..., am], [b1, b2, ..., bn], z | cpx=1, sum=f, y=t, const=c)`

`fouriers([f, m], [g, n], z | cpx=1, sum=f, y=t, const=c)`

:: 有限 Fourier 級数 $\sum_{k=0}^m a_k \cos kz + \sum_{k=1}^n b_k \sin kz$ を返す

- `cpx=1` のときは, $\sum_{k=0}^m a_k e^{ikz} + \sum_{k=1}^n b_k e^{-ikz}$
- `[a0, a1, ..., am]` の代わりに `[f, m]` などと関数で指定可能. ただし `const=c` を指定すると, `a0` は `c` で与えられる. `f` の変数に `y` が含まれないときは, `y=t` の指定は無視.
- `sum=1`: チェザロ総和法を用いる. `sum=2`: シグマ総和法を用いる.
- `sum=s(x, y)`: フーリエ級数の有限和

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} s\left(\frac{k}{n}, n\right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

において 1 とは限らない項 $s\left(\frac{k}{n}, n\right)$ で調整して総和を取る総和法を行う。

`sum=@e^(-t*x^2*y^2)`: 熱方程式を満たすフーリエ級数の `t` 秒後の温度分布を示す。

`fouriers([], [(1-(-1)^x)/2/x, 21], x);` /* $\sum_{m=0}^{10} \sin(2m+1)x$ */

`fouriers([], [(1-(-1)^x)/x, n], x)`: 方形波 (最大値は $\frac{\pi}{4}$)

`fouriers([], [(-1)^x/x, n], x)`: 鋸波 (最大値は $\frac{\pi}{2}$)

`fouriers([(1-(-1)^x)/x,n],[],x)` : 三角波 (最大値と最小値は $\pm \frac{\pi}{4}$)
`fouriers([sin(x*y)/x/y,n],[],x|const=1/2,y=t)` : 幅 $2t$ の方形パルス波
`fouriers([1,n],[],x|const=1/2)` : ディリクレ核
`fouriers([1,n],[],x|const=1/2,sum=1)` : フェイエル核
`fouriers([e^(-x^2*y),n],[],x|const=1/2,y=t)` : 熱方程式の基本解

```

P=os_md.fouriers([],[(1-(-1)^x)/x,41],x|sum=@e^(-x^2*y^2/100))$
os_md.xygraph(P,-24,[0,@pi],0,[0,1.8]|ax=[0,0],prec=6,dviout=1)$
  
```

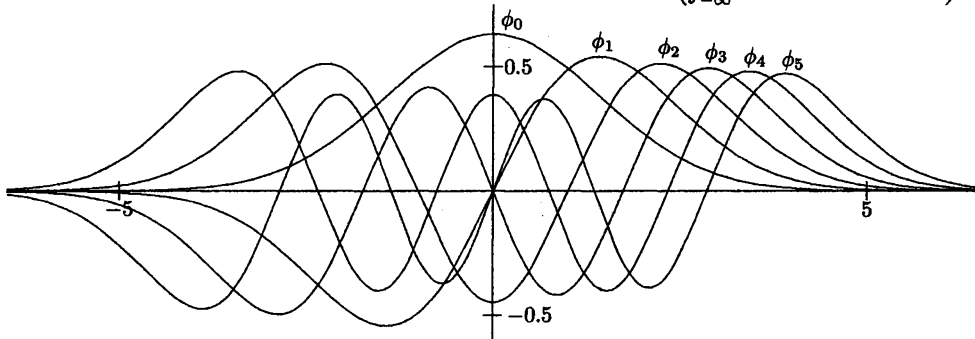
上の $1/100$ を別の値に変えると、有限の長さの一定温度 (たとえば 1000°) の棒の両端を時刻 0 以降 0° に冷やしたときの温度分布の時間経過を画像で見ることができる。

同様なやりかたで、弦の振動での波の反射と伝播が分かる「パラパラ漫画」形式動画も作成した (10 秒程度で作成可)。通常の PDF ビューアのページ送りボタンの長押しで視る。

エルミートの直交多項式とその正規直交性のグラフ

たとえば [1] などには、正規直交性が分かるようなグラフが描かれていない。

$$\phi_n(x) = (\sqrt{2\pi n!})^{-1/2} H_n(x) e^{-x^2/2} \text{ のグラフ} \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \delta_{m,n} \right)$$



参考文献

- [1] 森口繁一, 宇田川鉄久, 一松信, 「数学公式 III」, 岩波全書, 岩波書店, 1960.
- [2] 大島利雄, Risa/Asir による曲線と関数グラフの描画, 数式処理とその周辺分野の研究, 数理解析研究所講究録 **1955** (2015), 102-113.
- [3] T. Oshima, *Drawing curves*, Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis III, edited by Y. Dobashi and H. Ochiai, Mathematics for Industry **24** (2016), 95-106, Springer.
- [4] 大島利雄, os_muldif.rr, 数式処理 Risa/Asir のライブラリ, 2008-2017, <ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/muldif/>