

GeoGebraにおける「軌跡」の扱い方について － LocusEquation コマンドの新機能紹介 －

龍谷大学・理工学部 大西 俊弘 (Toshihiro Onishi)
Faculty of Science and Technology,
Ryukoku University

1 はじめに

近年、世界的に普及が進んでいる数学学習・数学教育用ソフトウェア GeoGebra は、DGS(Dynamic Geometry Software)に分類されるが、CAS(数式処理)が内蔵されているのが大きな特徴である。しかし、高等学校以下では、CASをほとんど利用しておらず、効果的な教材開発もあまり進んでいない。本研究では、高等学校レベルの数学において、CAS等の機能を有効に活用することについて考察する。具体的には、2次曲線の軌跡問題を例に取り上げ、GeoGebraの新機能について紹介する。

2 GeoGebraにおける軌跡の扱い

数学Ⅲの2次曲線の単元では、次のような軌跡の問題を扱う。

例題

点Pから点A(2,0)までの距離と点Pから直線 $x=2$ までの距離が等しいという条件を満たしながら点Pが動くとき、点Pの軌跡を求めよ。

このような軌跡を求める問題について考察する際、GeoGebraを利用すると何通りものアプローチが可能である。その具体例を以下に示す。

2.1 「残像」の利用

二等辺三角形の性質を利用すると、図1に示すように、定義に従った作図を行うことができる。すなわち、点Hを準線上で動かすときの点Pの残像を調べれば、確かに放物線となること確認できる。この方法は、GeoGebraだけでなく、ほぼすべての動的幾何ソフトウェア(DGS)で行うことができる。

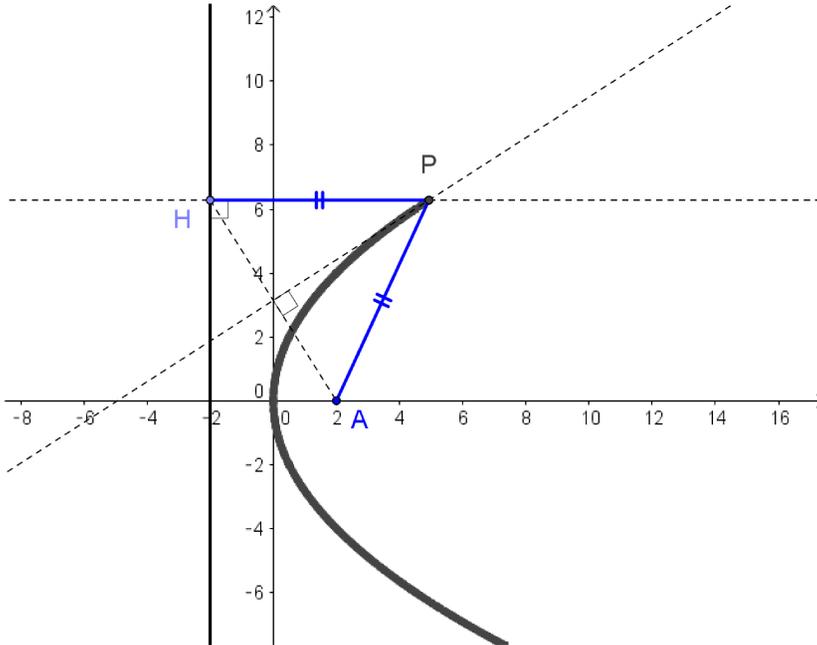


図1 定義に従った放物線の作図（「残像」の利用）

2.2 「軌跡」機能の利用

GeoGebraでは、「残像」の利用の他にも、動点Pと駆動点Hを指定するだけで、点Pの軌跡を描く機能（「軌跡」）がある。この機能は、図2に示したようにメニューから選択して利用でき、一気に軌跡を描くことが可能である。

同じ機能として、「Locusコマンド」を利用してもよい。その場合は、入力バーに、次のように入力する。

Locus [P, H]

「軌跡」機能は、軌跡がいきなり表示されるため、初学者は何が起こったか分からず、戸惑う場面もある。初学者にとっては、先に示した残像利用の方が理解しやすく、教育的である。しかし、焦点や準線が変化したときに軌跡がどのように変化するか調べる探究活動では、残像利用では時間がかかりすぎるため、「軌跡」機能は有用である。

なお、「軌跡」機能は、数値的に軌跡のグラフは描くものであり、その軌跡の方程式まで求めることはできない。

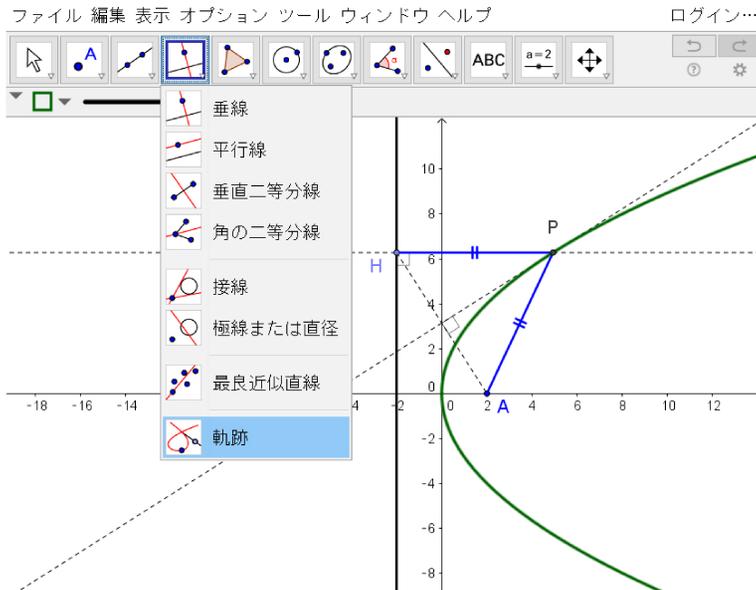


図2 放物線の作図（「軌跡」コマンドの利用）

2.3 LocusEquation コマンド（1）の利用

GeoGebra では、LocusEquation コマンドが利用できる。入力バーに、次のように入力することで、図3に示したように軌跡を瞬時に図示できるだけでなく、軌跡の方程式まで求めることが出来る。

$$\text{LocusEquation}[P,H]$$

LocusEquation コマンドとは、GeoGebra 内部でグレブナー基底を用いて高度な計算を行っているのであるが、ブラックボックス化されており、利用者からその仕組みを確認できないのが難点である。

LocusEquation コマンドにおいて、特筆すべき点は、図3を一旦作図してしまえば、焦点 A や準線をドラッグすることにより、放物線のグラフやその方程式がどのように変化するかリアルタイムに確認できることである。これは、紙と鉛筆だけでは決して実現できないメリットであり、生徒にとっては放物線の定義に対する図形的なイメージが把握しやすくなる。

また、教員にとっては、授業での演示だけでなく、適切な答えをもつ問題を作成することにも活用できる優れた機能である。

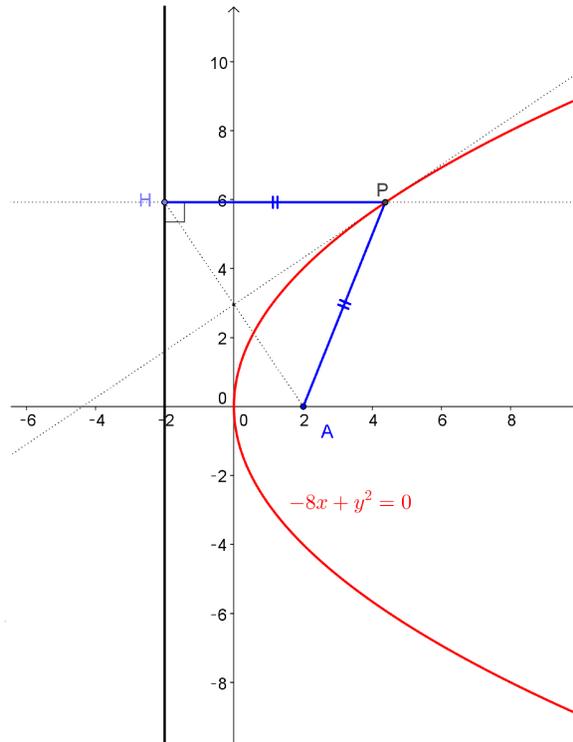


図3 LocusEquation コマンド (1) の利用

2.4 CAS (数式処理) 機能の利用

GeoGebra では CAS 機能を用いて、教科書と同じように段階を追って数式を変形して軌跡の方程式を求めることが可能である (図4 参照)。

また,GeoGebra では、CAS とグラフ機能が連動しているので、式変形と軌跡の方程式のグラフを同時に表示させることができる。

なお、図?? の1行目では、焦点を (2, 0) と具体的な座標で設定しているが、点のラベル A を用いてもよい。その場合は、点 A をドラッグすると2行目以下が瞬時に再計算され、焦点 A の移動に連動して軌跡の方程式も変化し、グラフも変化することが確認できる。これは、CAS 機能の優れた特徴である。

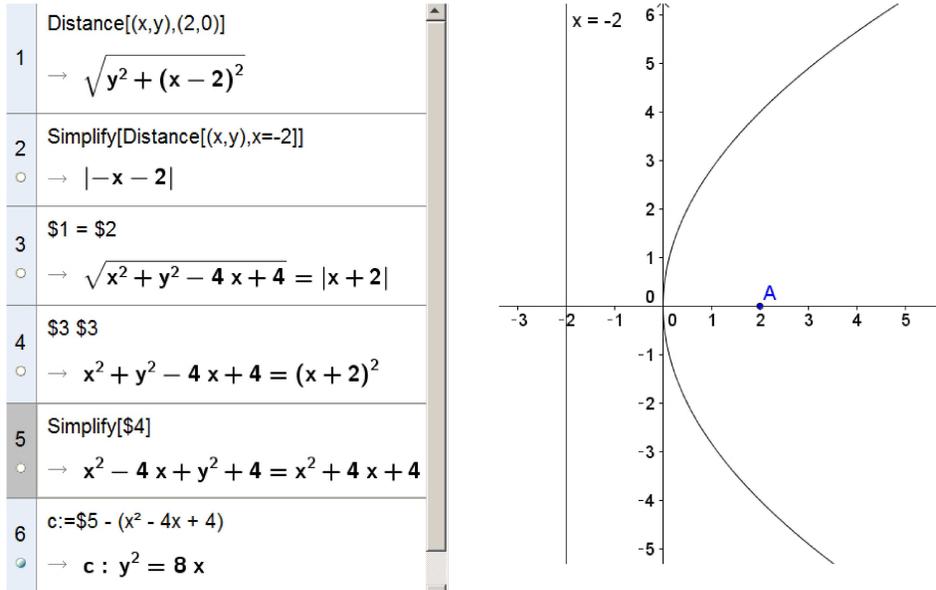


図4 CASによる計算とグラフ表示

なお、図4の3行目は、条件式 $PH=PA$ （すなわち、 $PH:PA=1:1$ ）に相当する。この3行目を $1=2/2$ と書き換えると、4行目以下も瞬時に再計算され、軌跡の方程式が楕円となる。これは、条件式 $PA=PH/2$ に相当し、離心率を2分の1に設定したことになる。グラフも連動して変化するので、式変形とグラフの関係を瞬時に把握することができる。このような点は、従来出来なかったことで、CAS利用の利点と言える。

2.5 LocusEquation コマンド（2）の利用

GeoGebraのLocusEquationコマンドには、最近新しい機能が追加された。この機能は従来の機能とはかなり趣が異なるものである。図5において、点Pは平面上の任意の点で、点Pから直線に下ろした垂線の足が点Hである。また、線分PHのラベル（名前）をh、線分PAのラベル（名前）をiとする。例えば、 $PH=PA$ （すなわち、 $PH:PA=1:1$ ）である軌跡を求めるには、次のように入力する。

$$\text{LocusEquation}(h==i, P)$$

すなわち、線分などの図形間で成り立つ関係式（条件式）を入力することによって、その関係式（条件式）を満たす軌跡を求めることが出来るようになった。軌跡はすぐに表示され、軌跡は図形の方程式として認識されている。表示された軌跡のグラフ上に点Pがないので最初は戸惑うが、図形的関係の記述だけで軌跡の方程式を求めることができるのは画期的なことである。

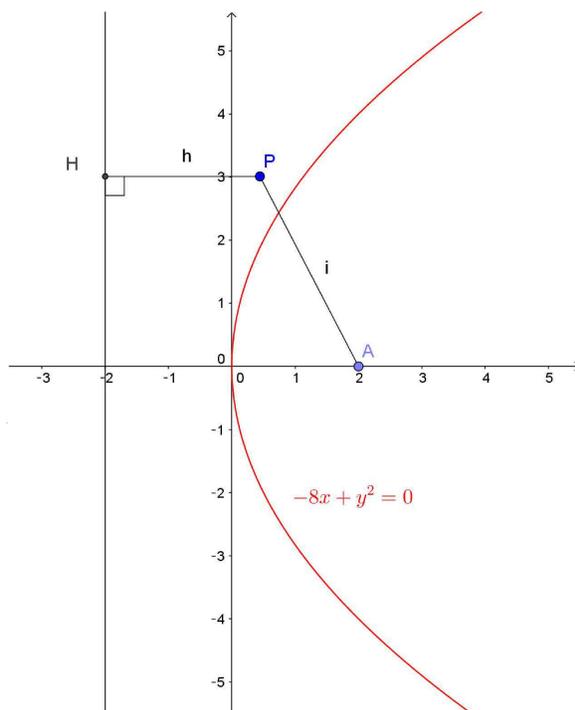


図5 LocusEquation コマンド (2) の利用

3 おわりに

計算が速くて、正確であることが重要視された時代は終わり、探究活動に GeoGebra のような高機能ソフトを活用する時代となってきた。GeoGebra の LocusEquation コマンドや CAS 機能はかなり強力である。本稿では、軌跡の分野での利用法を提案したが、もっと様々な単元で探究活動が行えるはずであるので、教材研究を進めて行きたい。

参考文献

- [1] 大西俊弘：『GeoGebra における「軌跡の方程式を求める機能」の課題』，数理解析研究所講究録，Vol.1951, pp.122-pp.135, 1981.
- [2] 大西俊弘：『CAS(数式処理) 機能を活かす教材開発：GeoGebra を利用して軌跡の方程式を求める』，日本数学教育学会秋期研究大会発表集録，Vol.48, pp.427-pp.430, 2015.
- [3] Zoltan Kovacs , Tomas Recio and M. Pilar Velez : 『GeoGebra Automated Reasoning Tools A Tutorial』 , Linz STEM Education Research Seminars handout, <http://mintlinz.pbworks.com/f/Kovacs-20160113.pdf>, 2017.