

接触角条件付き面積保存型曲率流における 進行波解の安定性*

東京工業大学・理学院・数学系 可香谷 隆

Takashi KAGAYA,

Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology[†]

1 導入

偏微分方程式に対する解の漸近挙動問題は、これまで様々な研究者によって解析されてきた。その解析手法として、二つの解に対する比較原理を用いた解の漸近挙動解析、リアプノフ関数を用いた安定性理論、偏微分方程式から導出される線形化作用素に対するスペクトル解析を用いた安定性理論などが挙げられる。これらの安定性理論は、曲線の発展方程式である(外力項付き、又は面積保存型)曲率流に対しても有効であり、以降でそれぞれについて述べる。

滑らかな動くジョルダン閉曲線 $\{\gamma(t)\}_{t \geq 0}$ に対し、 V を曲線の(外向きが正の)法線速度、 κ を曲線の(外向きが正の)曲率とする。この動く平面曲線が

$$V = \kappa \quad \text{on} \quad \gamma(t) \tag{1.1}$$

を満たすとき、その曲線の流れを曲率流と呼ぶ。曲率流方程式は、曲線 γ の長さ $L(\gamma)$ を汎関数とした形式的な $L^2(\gamma)$ 勾配流として記述できる。そのため、曲率流 $\gamma(t)$ は

$$\frac{d}{dt} L(\gamma(t)) = - \int_{\gamma(t)} V^2 ds \leq 0 \quad (s: \text{弧長パラメータ}) \tag{1.2}$$

を満たし、方程式(1.1)が曲線短縮方程式とも呼ばれる由縁である。Grayson [7] はジョルダン閉曲線を初期値とする曲率流に対する漸近凸性(凸な図形への時間発展)を示し、Gage-Hamilton [5] は曲率流の凸性の保存、及び曲率流が有限時刻で一点に収縮することを示した。特に、一点に収縮する際の曲線の形状が円に漸近することも知られており、Gage-Hamilton [5] による内接円と外接円の半径比を用いた解の漸近挙動解析、Giga-Kohn [6] でも用いられた放物型のスケーリングによる正規化された曲率流に対するHuisken型単調性公式を用いた解の漸近挙動解析([1, 9] 参照)など、様々な手法によって証明できることが知られている。ここでは、本講演で用いた方程式の構造について述べるため、曲率流に対しては以下の(比較原理の拡張に相当する)性質が成り立つことに注目する。

*本講演内容は岡山理科大学の下条昌彦氏との共同研究に基づく

[†]E-mail: kagaya.t.aa@m.titech.ac.jp

命題 1.1 ([1, Proposition 1.7]). $\{\gamma_1(t)\}_{t \in [0, T]}$ 及び $\{\gamma_2(t)\}_{t \in [0, T]}$ を共に初期曲線がジョルダン曲線で時刻 $T > 0$ までの曲率流とする. この時, 全ての $t \in (0, T)$ に対して $\gamma_1(t)$ と $\gamma_2(t)$ の交点の数は有限個であり, その交点の数は t について広義単調減少である.

命題 1.1 は, 未知の曲率流 $\{\gamma_1(t)\}$ に対して, 既知の曲率流 $\{\gamma_2(t)\}$ を用いることによって, 解 $\gamma_1(t)$ の挙動を制御できることを意味する. 命題 1.1 は外力項付き曲率流や, 本講演でも用いたような接触角条件付き曲線の発展方程式に拡張されており, 例えば [2, 8] 等で解の漸近挙動解析に応用されている. 命題 1.1 の証明については, 放物型方程式に対する最大値原理, 比較原理などで用いられている議論を元にしており, 2つの解に対する局所的な解析によって証明されている.

ここで, Gage [4] によって導入された面積保存型曲率流方程式

$$V = \kappa - \frac{\int_{\gamma(t)} \kappa ds}{L(\gamma(t))} \left(= \kappa + \frac{2\pi}{L(\gamma(t))} \right) \quad \text{on } \gamma(t)$$

について述べる. ただし, $\{\gamma(t)\}_{t \geq 0}$ は動くジョルダン閉曲線とする. 面積保存型曲率流方程式は曲率流方程式と同様に放物型偏微分方程式として分類されるが, 方程式の右辺の第二項に非局所項を伴う点が曲率流方程式とは異なる. したがって, 面積保存型曲率流方程式は空間に対する局所的な議論を行うことは難しく, 面積保存型曲率流に対しては命題 1.1 のような交点数に対する性質は一般的には成り立たない. そのため, 面積保存型曲率流に対しては2つの解の交点数を用いた漸近挙動解析は困難である. そこで, リアプノフ関数を用いた安定性理論を用いて面積保存型曲率流に対する解の漸近挙動について考察する. 面積保存型曲率流方程式は, ジョルダン閉曲線 γ に対し, 曲線に囲まれた面積 $A(\gamma)$ の保存条件下における長さ $L(\gamma)$ の $L^2(\gamma)$ 勾配流として導出されており, そのため, 面積保存型曲率流 $\{\gamma(t)\}$ は

$$\frac{d}{dt} A(\gamma(t)) = 0, \quad \frac{d}{dt} L(\gamma(t)) = - \int_{\gamma(t)} V^2 ds \quad (1.3)$$

を満たす. ここで, 非自明ではあるが, 時間大域解 $\{\gamma(t)\}_{t \geq 0}$ が存在したと仮定して議論を行う. 任意のジョルダン閉曲線 γ に対して $L(\gamma) \geq 0$ であることに着目すると, (1.3) の二つ目の式を t について積分することによって

$$\int_0^\infty \int_{\gamma(t)} V^2 ds dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\gamma(t)} V^2 ds dt = \lim_{T \rightarrow \infty} L(\gamma(0)) - L(\gamma(T)) \leq L(\gamma(0))$$

を得る. したがって, (形式的ではあるが,) $t \rightarrow \infty$ のとき, $V \rightarrow 0$ を得る. よって, $V = 0$ となる解を解析することにより解の漸近挙動解析が可能になることがわかる. 面積保存型曲率流において $V = 0$ となる曲線は, $A^* > 0$ に対する最小化問題

$$\min\{L(\gamma) : \gamma \text{ はジョルダン閉曲線, } A(\gamma) = A^*\}$$

の最小解と一致し, この問題に対する最小解はよく知られている通り円である. 実際に, [3, 4] によって, 特定の初期曲線に対しては時間大域的な面積保存型曲率流が存在し, 円に収束することが示されている.

本講演では、上半平面内の曲線 $\Gamma(t)$ の挙動を表す、以下のような接触角条件付き面積保存型曲率流を扱った (以降問題 (P) と記述し、解の形状については図 1 参照)。

$$(方程式) \quad V = \kappa - \frac{\int_{\Gamma(t)} \kappa ds}{L(\Gamma(t))} \left(= \kappa + \frac{\psi_+ + \psi_-}{L(\Gamma(t))} \right) \quad \text{on } \Gamma(t),$$

(境界条件 1) $\Gamma(t)$ は 2 つの端点を x 軸上を持つ,

(境界条件 2) $\Gamma(t)$ は左右の端点において、それぞれ内部で接触角 $\psi_{\pm} \in (0, \pi/2)$ を生成する。

ここで、 $\Gamma(t)$ の左の端点の x 座標を $l_-(\Gamma(t))$ 、右の端点の x 座標を $l_+(\Gamma(t))$ として記述する。このとき、 $\Gamma(t)$ に対するエネルギー $E(\Gamma(t))$ を

$$E(\Gamma(t)) := L(\Gamma(t)) - \cos \psi_+ l_+(\Gamma(t)) + \cos \psi_- l_-(\Gamma(t))$$

として定義し、 $\Gamma(t)$ と x 軸とで囲まれた領域の面積を $A(\Gamma(t))$ として定義すると、

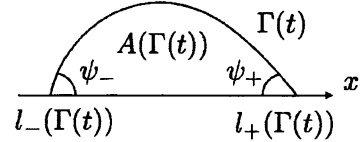


図 1: 解の形状

$$\frac{d}{dt} A(\Gamma(t)) = 0, \quad \frac{d}{dt} E(\Gamma(t)) = - \int_{\Gamma(t)} V^2 ds$$

を満たす。しかし、ここで定めたエネルギー $E(\Gamma)$ は下に有界な汎関数でないため、面積保存型曲率流に対する解の漸近挙動の考察のように、リアプノフ関数を用いた解の漸近挙動解析を行うことができない。したがって、本研究では上記の方程式から導出される線形化方程式に対するスペクトル解析を用いることによって、解の漸近挙動解析を行った。

2 スペクトル解析と安定性理論

1章で述べた通り、偏微分方程式に対する解の漸近挙動解析の手法の一つとして、偏微分方程式から導出される線形化作用素に対するスペクトル解析を用いた安定性理論が挙げられる。この手法は、様々な偏微分方程式に適用できるように、一般論を用いた複雑な議論を要することがあるため、ここでは簡単な場合における形式的な計算を行う。 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を境界が滑らかな領域とする。 $X_0 := L^2(\Omega)$, $X_1 := H^2(\Omega)$ とし、2階偏微分作用素 $F : X_1 \rightarrow X_0$ と X_0 上の汎関数 G を用いた偏微分方程式

$$\begin{cases} u_t(x, t) = F(u)(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = G(u)(x, t), & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \end{cases} \quad (2.1)$$

に対する時間大域解を考察する。ただし、 ν は Ω の外向き単位法線ベクトルとする。また、 $u^* \in X_1$ を (2.1) の定常解とする。このとき、

$$F(u^*)(x) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u^*}{\partial \nu}(x) = G(u^*)(x) \quad \text{on } \partial\Omega$$

であるので, (2.1) の時間大域解を $u(x, t) = u^*(x) + v(x, t)$ と記述すると, テイラー展開を用いることにより,

$$\begin{aligned}
 v_t(x, t) &= (u(x, t) - u^*(x))_t = u_t(x, t) = F(u)(x, t) \\
 &= F(u^*)(x) + D_{u^*}F(v)(x, t) + o(\|v(\cdot, t)\|_{X_1}) \\
 &= D_{u^*}F(v)(x, t) + o(\|v(\cdot, t)\|_{X_1}) \quad \text{for } (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\
 \frac{\partial v}{\partial \nu}(x, t) &= \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) - \frac{\partial u^*}{\partial \nu}(x) = G(u)(x, t) - \frac{\partial u^*}{\partial \nu}(x) \\
 &= G(u^*) + D_{u^*}G(v)(x, t) - \frac{\partial u^*}{\partial \nu}(x) + o(\|v(\cdot, t)\|_{X_0}) \\
 &= D_{u^*}G(v)(x, t) + o(\|v(\cdot, t)\|_{X_0}) \quad \text{for } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

を得る. ただし, $D_{u^*}F, D_{u^*}G$ はそれぞれ X_1, X_0 の位相を用いた u^* における F, G のフレッシュ微分とする. したがって, $\|v(\cdot, t)\|_{X_1}$ が十分小さい限り, v の挙動は偏微分方程式

$$\begin{cases} w_t(x, t) = D_{u^*}F(w)(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial w}{\partial \nu}(x, t) = D_{u^*}G(w)(x, t), & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ w(x, 0) = v(x, 0), & x \in \Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

の解 w によって支配され, 上記の方程式の解析が (2.1) の時間大域解 u に対する漸近挙動解析に繋がる. 特に, u の分解方法とこれまでの議論により, w が 0 へ漸近することが示されれば, u は u^* に漸近することが示される. ここで, (2.3) の解 w を解析するために, 以下のような作用素 $A: \mathcal{D}(A) \subset X_0 \rightarrow X_0$ を導入する.

$$\begin{aligned}
 A(\phi) &:= D_{u^*}F(\phi) \quad \text{for } \phi \in \mathcal{D}(A), \\
 \mathcal{D}(A) &:= \left\{ \phi \in X_1 : \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x) = D_{u^*}G(\phi)(x) \quad \text{for } x \in \partial\Omega \right\}.
 \end{aligned}$$

これまでの導出方法より, 作用素 A は線形であり, 方程式 (2.1) に対する u^* まわりの線形化作用素となる. また, 線形作用素 A が角域作用素のとき, 解析半群 e^{tA} を生成可能であり, (2.3) の解 w は

$$w(\cdot, t) = e^{tA}v(\cdot, 0)$$

として記述される ([10] 参照). 特に, 線形作用素 A に対するスペクトル $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ が,

$$\sup\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\} = -\omega_0 < 0 \tag{2.4}$$

を満たしているとき, 任意の $\omega \in [0, \omega_0)$ に対してある定数 $M > 0$ が存在して,

$$\|w(\cdot, t)\|_{X_1} = \|e^{tA}v(\cdot, 0)\|_{X_1} \leq Me^{-\omega t}\|v(\cdot, 0)\|_{X_1}$$

が成り立つ (A が $n \times n$ 行列の場合, $X_1 = \mathbb{R}^n$, $-\omega = -\omega_0$ は A の固有値のうち最大のものとして成り立つ). したがって, (2.4) を満たすとき, (2.1) の定常解 u^* の局所指数安定性, つまり, (2.1) の解 u に対し, $u(\cdot, 0)$ が u^* に十分近いとき, $u(\cdot, t)$ は u^* に指数的に漸近することが示される.

一方, $\sigma(A)$ が 0 を含む場合には, (2.2) における剰余項 $o(\|v\|_{X_1}), o(\|v\|_{X_0})$ に対する精密な評価が必要となる. $0 \in \sigma(A)$ の場合の (2.1) に対する定常解の安定性理論は, 様々な研究者により解析されてきたが, 本研究では [11] による安定性理論を応用しているため, 参考文献として挙げる. その安定性理論について述べるため, $\mathcal{E} \subset X_1$ を (2.1) の定常解の集合とし, $N(A), R(A)$ をそれぞれ線形化作用素 A の核, 値域とする. したがって, $N(A)$ は A の 0 固有空間となる. ここで, [11] による安定性理論では, 特に以下の仮定が必要であることに着目する.

- (i) X_1 内において \mathcal{E} は $u^* \in \mathcal{E}$ の近傍で $m \in \mathbb{N}$ 次元の C^1 多様体である.
 - (ii) X_1 内での $u^* \in \mathcal{E}$ における \mathcal{E} の接平面は $N(A)$ と一致する.
 - (iii) 0 は A の半単純固有値である, つまり, $X_0 = N(A) \oplus R(A)$.
 - (iv) $\sigma(A) \setminus \{0\} \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$.
- (i) は (ii) における \mathcal{E} の接平面が定義可能であることを意味する. (iii) (と $N(A) \subset \mathcal{D}(A)$) により, 空間 X_0 のみならず, 空間 X_1 や線形化作用素 A をも以下のように分解できる.

$$\begin{aligned} X_1 &= N(A) \oplus X_1 \cap R(A) =: X_1^c \oplus X_1^s, \\ A_c : \mathcal{D}(A_c) := N(A) \subset X_0 &\rightarrow X_0, \quad A_c(\phi) = A(\phi) \quad \text{for } \phi \in \mathcal{D}(A_c), \\ A_s : \mathcal{D}(A_s) := \mathcal{D}(A) \cap R(A) \subset X_0 &\rightarrow X_0, \quad A_s(\phi) = A(\phi) \quad \text{for } \phi \in \mathcal{D}(A_s). \end{aligned}$$

したがって, v の挙動を $N(A), R(A)$ に分解して考察することが可能となる. 特に, (ii) の条件により, v が十分小さい範囲においては空間 $N(A)$ は \mathcal{E} の近似であることを意味し, $N(A)$ 上の v の挙動解析は “ \mathcal{E} 上に沿った v と原点との距離” の評価に相当し, $R(A)$ 上の v の挙動解析は “ v と \mathcal{E} との距離” の評価に相当する. (iii) と (iv) の条件により, 線形化作用素 A を $R(A)$ 上に制限した作用素 A_s のスペクトルは (2.4) を満たし, 後者の挙動解析においては 0 に指数的に漸近することが従う. したがって, 線形化作用素 A のスペクトルが (iv) の条件を満たす場合, A や \mathcal{E} に対する適切な仮定の下で, $u(\cdot, 0)$ がある $u^* \in \mathcal{E}$ に十分近いとき, $u(\cdot, t)$ は (u^* とは別の定常解の可能性があるが) ある $\bar{u} \in \mathcal{E}$ に指数的に漸近する.

3 主結果

以降, 問題 (P)

$$\text{(方程式)} \quad V = \kappa - \frac{\int_{\Gamma(t)} \kappa \, ds}{L(\Gamma(t))} \left(= \kappa + \frac{\psi_+ + \psi_-}{L(\Gamma(t))} \right) \quad \text{on } \Gamma(t),$$

(境界条件 1) $\Gamma(t)$ は 2 つの端点を x 軸上に持つ,

(境界条件 2) $\Gamma(t)$ は左右の端点において, それぞれ内部で接触角 $\psi_{\pm} \in (0, \pi/2)$ を生成する.

に対する $t \rightarrow \infty$ における解の漸近挙動解析について述べる. 解の漸近挙動解析を行う上では, 時間大域解の存在性理論が必要であるため, 本研究においては初期条件

(I) $\Gamma(0)$ は上に狭義凸な C^2 級のグラフで表示されている

(II) $\Gamma(0)$ は境界条件 1, 2 を満たす

の仮定の下での時間大域解の一意存在性を示している。

定理 3.1 ([12]). $\Gamma(0)$ を上記の初期条件 (I), (II) を満たすとする。このとき、問題 (P) に対し、 $\Gamma(0)$ を初期曲線とする滑らかな時間大域解 $\Gamma(t)$ が一意に存在する。さらに、

- $\Gamma(t)$ は常に上に狭義凸なグラフで表示されており、
- $\Gamma(t)$ の曲率 κ , 及び長さ $L(\Gamma(t))$ は一様有界である。

時間局所解の構成については、主に解析半群を用いた解の構成理論を用いている。この際、本問題は自由境界値問題である点を解消しなければならないが、弧長パラメータを $[0, 1]$ 上の変数になるよう正規化している。この時間局所解の構成法により、 $\Gamma(t)$ が $C^{1+\alpha}$ ($\alpha \in (1/2, 1)$) である限り、その時刻を始めとした時間局所解を構成できることが示され、アプリアリ評価と組み合わせることにより時間大域解が構成できる。

上記の定理においては、条件 (I), (II) を満たす初期曲線に対する時間大域解の存在性を示したが、本問題においては特殊な解として、進行波解が存在する。

定義 3.2. ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して、初期条件 (I), (II) を満たす (P) の解 $\mathcal{W}(t)$ が

$$\mathcal{W}(t) = \{\bar{x} + c\bar{e}_1 : \bar{x} \in \mathcal{W}(0)\}, \quad \bar{e}_1 = (1, 0).$$

を満たすとき、 $\mathcal{W}(t)$ を進行波解と呼ぶ。

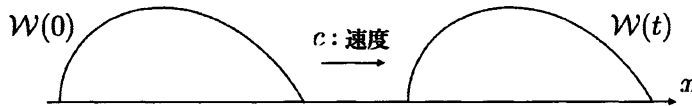


図 2: 進行波解

上記の定義より、 c は進行波解 $\mathcal{W}(t)$ の x 軸方向に進む速度を意味する。

定理 3.3 ([12]). 任意の $A^* > 0$ に対し、以下を満たす進行波解 $\mathcal{W}(t)$ が存在する。

- $A(\mathcal{W}(t)) = A^*$.
- $\mathcal{W}(t)$ は平行移動を除いて一意である。
- $\mathcal{W}(t)$ に伴う実数 c は

$$\psi_- \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \psi_+ \iff c \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0$$

を満たす。

進行波解の存在性理論においては、問題 (P) を曲率の方程式を解析することによって証明している。問題 (P) の解 $\Gamma(t)$ は、定理 3.1 より、常に上に狭義凸なグラフ表示



図 3: パラメータ θ

$$\Gamma(t) = \{(x, u(x, t)) \in \mathbb{R}^2 : l_-(\Gamma(t)) < x < l_+(\Gamma(t)), \\ u_{xx}(x, y) < 0 \text{ for } x \in (l_-(\Gamma(t)), l_+(\Gamma(t)))\}$$

として表記できるため、ガウス写像を用いたパラメータ付け $\theta(x, t) = \arctan u_x(x, t)$ を用いることができる (図 3 参照)。このパラメータを用いることにより、 $\Gamma(t)$ の曲率を $\kappa(\theta, t)$ と書き表せ、方程式

$$\begin{cases} \kappa_t = \kappa^2 \left(\kappa_{\theta\theta} + \kappa + \frac{\psi_+ + \psi_-}{L(\kappa)} \right), & -\psi_+ < \theta < \psi_-, \quad t > 0, \\ \kappa_\theta = \cot \theta \left(\kappa + \frac{\psi_+ + \psi_-}{L(\kappa)} \right), & \theta = \mp \psi_\pm, \quad t > 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

を満たすことがわかる。ただし、

$$L(\kappa(\cdot, t)) := L(\Gamma(t)) = - \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{d\theta}{\kappa(\theta, t)}$$

とする。また、初期時刻において、

$$\int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{\sin \theta}{\kappa(\theta, 0)} d\theta = 0 \quad (3.2)$$

を満たす。したがって、問題 (P) の解 $\Gamma(t)$ から、方程式 (3.1) と初期条件 (3.2) を満たす解 $\kappa(\theta, t)$ を構成することができる。一方、初期条件 (3.2) を満たす、方程式 (3.1) の解 $\kappa(\theta, t)$ と、任意の実数 $l_- \in \mathbb{R}$ を用いることにより、以下のように問題 (P) の解 $\Gamma(t)$ を構成することができる。

$$\begin{aligned} l_-(\Gamma(0)) &= l_-, \quad l_-(\Gamma(t)) = l_-(\Gamma(0)) - \int_0^t \frac{1}{\sin \psi_-} \left(\kappa(\psi_-, \tilde{t}) + \frac{\psi_+ + \psi_-}{L(\kappa(\cdot, \tilde{t}))} \right) d\tilde{t}, \\ x(\theta, t) &= l_-(\Gamma(t)) - \int_\theta^{\psi_-} \frac{\cos \tilde{\theta}}{\kappa(\tilde{\theta}, t)} d\tilde{\theta}, \quad l_+(\Gamma(t)) = x(\psi_+, t), \\ u(x(\theta, t), t) &= - \int_\theta^{\psi_-} \frac{\sin \tilde{\theta}}{\kappa(\tilde{\theta}, t)} d\tilde{\theta}, \quad \Gamma(t) = \{(x(\theta, t), u(x(\theta, t), t)) \in \mathbb{R}^2 : -\psi_+ < \theta < \psi_-\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

したがって、 l_- の平行移動を除けば、問題 (P) の解析は、初期条件 (3.2) 付きの方程式 (3.1) の解析に委ねることができる。特に、初期条件 (3.2) を満たす方程式 (3.1) の解 $\kappa(\theta, t)$ は

$$\frac{d}{dt} \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{\sin \theta}{\kappa(\theta, t)} d\theta = 0$$

を用いることによって、

$$\int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{\sin \theta}{\kappa(\theta, t)} d\theta = 0$$

を満たすことがわかるため, (3.3) で構成した動く曲線 $\Gamma(t)$ は

$$u(l_{\pm}(\Gamma(t)), t) = 0$$

を満たす.

ここで, 進行波解 $\mathcal{W}(t)$ について考察する. 進行波解の $\mathcal{W}(t)$ は形状を保ちつつ c の速度で平行移動する解であるため, 曲率は時間に依存しない. したがって, $\mathcal{W}(t)$ の曲率を $\kappa^*(\theta)$ として記述すると, κ^* は (3.1) の定常解であることがわかる. また, $\mathcal{W}(t)$ の長さについても時間に依存しないため, 任意の L^* に対して, 方程式 ($\mathcal{W}(t)$ の曲率に対するプロファイ方程式)

$$\begin{cases} \kappa_{\theta\theta}^* + \kappa^* + \frac{\psi_+ + \psi_-}{L^*} = 0, & -\psi_+ < \theta < \psi_-, \\ \kappa_{\theta}^* = \cot \theta \left(\kappa^* + \frac{\psi_+ + \psi_-}{L^*} \right), & \theta = \mp \psi_{\pm}, \\ \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{\sin \theta}{\kappa^*(\theta)} d\theta = 0, & - \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{d\theta}{\kappa^*(\theta)} = L^* \end{cases} \quad (3.4)$$

を解けば良い. $(-\psi_+, \psi_-)$ の内部の方程式と境界条件を満たすことと, κ^* が任意の $c \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\kappa^*(\theta) = -c \sin \theta - \frac{\psi_+ + \psi_-}{L^*}$$

と表記できることが同値になる. 方程式 (3.4) の三つ目の条件により, 上記の c は L^* に対応して一意に定まることがわかり, 四つ目の条件も満たすことが確認できる. したがって, L^* に対応して (3.1) の定常解 κ^* が一意に定まる. このとき, 上記の方程式 (3.1) の解からの問題 (P) の解の構成方法 (3.3) によって, 曲線の長さが L^* , x 軸方向に進む速度が c となる進行波解 $\mathcal{W}(t)$ が構成できる. また, L^* の増加, 減少については, それぞれ上記で構成した進行波解 $\mathcal{W}(t)$ の拡大, 縮小に対応するため, 長さ $L(\mathcal{W}(t))$ と面積 $A(\mathcal{W}(t))$ 間における狭義の単調性が伴う. したがって, 上記では長さ L^* に対応した進行波解を構成したが, 進行波解の構成法は面積 A^* に依存したものと見做すことができる.

これまで, 問題 (P) に対する時間大域解の一意存在性, 進行波解の存在性について述べてきたが, 進行波解が以下のような局所指数安定性を持つことがわかる. ただし, 以下の定理では $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{W}(t) + a\vec{e}_1 := \{\vec{x} + a\vec{e}_1 : \vec{x} \in \mathcal{W}(t)\}, \quad \vec{e}_1 = (1, 0),$$

dist_H をハウスドルフ距離として用いる.

定理 3.4 ([12]). 初期条件 (I), (II) を満たす問題 (P) の解 $\Gamma(t)$ と進行波解 $\mathcal{W}(t)$ が以下の条件を満たすとする. $\kappa(\theta, t), \kappa^*(\theta)$ をそれぞれ $\Gamma(t), \mathcal{W}(t)$ の曲率とする. ある $\varepsilon > 0$ が存在し,

$$A(\Gamma(0)) = A(\mathcal{W}(0)), \quad \|\kappa(\cdot, 0) - \kappa^*\|_{L^\infty(-\psi_+, \psi_-)} < \varepsilon$$

を満たすとする. このとき, ある $a \in \mathbb{R}, M > 0, \lambda > 0$ が存在し,

$$\|\kappa(\cdot, t) - \kappa^*\|_{L^\infty(-\psi_+, \psi_-)} \leq M e^{-\lambda t}, \quad \text{dist}_H(\Gamma(t), \mathcal{W}(t) + a\vec{e}_1) \leq M e^{-\lambda t}. \quad (3.5)$$

証明については、第二章で述べた線形化方程式に対するスペクトル解析による安定性理論を、曲率の方程式 (3.1) に適用させるアイデアを用いている。ただし、初期条件 (3.2) の条件があるため、非線形な条件 (3.2) を保存させる方向の摂動を考えなければならず、線形化を難しくしている要因となる。そこで、(3.1) を以下のように拡張する。

$$\begin{cases} \kappa_t = \kappa^2 \left(\kappa_{\theta\theta} + \kappa + \frac{\psi_+ + \psi_-}{L(\kappa)} - \frac{F(\kappa)}{L(\kappa)} H(\kappa) \right), & -\psi_+ < \theta < \psi_-, \quad t > 0, \\ \kappa_\theta = \cot \theta \left(\kappa + \frac{\psi_+ + \psi_-}{L(\kappa)} - \frac{F(\kappa)}{L(\kappa)} H(\kappa) \right), & \theta = \mp \psi_\pm, \quad t > 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

ただし、

$$\begin{aligned} L(\kappa(\cdot, t)) &= - \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{d\theta}{\kappa(\theta, t)}, & H(\kappa(\cdot, t)) &= - \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{\sin \theta}{\kappa(\cdot, t)} d\theta \\ F(\kappa(\cdot, t)) &= \frac{L(\kappa(\cdot, t))H(\kappa(\cdot, t))\kappa(-\psi_+, t) + (\psi_+ + \psi_-)H(\kappa(\cdot, t))}{L(\kappa(\cdot, t)) \sin \psi_+ + H(\kappa(\cdot, t))} \end{aligned}$$

とする。これらの拡張方法は、(3.6) の解を用いて、動く曲線 $\Gamma(t)$ を (3.3) によって構成したとき、

$$\begin{aligned} u(l_+(\Gamma(t)), t) &= H(\kappa(\cdot, t)) = H(\kappa(\cdot, 0)) = u(l_+(\Gamma(0)), 0), \\ (A(\kappa(\cdot, t)) :=) A(\Gamma(t)) &:= \int_{l_-(\Gamma(t))}^{l_+(\Gamma(t))} u(x, t) dx = \int_{l_-(\Gamma(0))}^{l_+(\Gamma(0))} u(x, 0) dx = A(\Gamma(0)) \end{aligned}$$

がそれぞれ保存量になるように拡張している。方程式 (3.6) は任意 $A^* > 0, H^* \in \mathbb{R}$ に対応して、

$$A(\kappa^*(\cdot; A^*, H^*)) = A^*, \quad H(\kappa^*(\cdot; A^*, H^*)) = H^*$$

を満たす定常解 $\kappa^*(\cdot; A^*, H^*)$ が一意に存在する。また、 $H(\kappa(\cdot, 0)) = 0$ とした場合、方程式 (3.6) は初期条件 (3.2) 付きの方程式 (3.1) と一致する。したがって、 $\kappa^*(\cdot; A^*, 0)$ は定理 3.3 で得た進行波の曲率そのものである。以降、区別を明確にするため、定理 (3.4) で用いた進行波解の曲率を単に $\kappa^*(\cdot)$ と表記し、方程式 (3.6) の定常解を $\kappa^*(\cdot; A^*, H^*)$ と表記する。(3.5) の第一式を示すため、方程式 (3.6) の κ^* まわりでの線形化作用素を導入し、スペクトル解析を行う。ここで、関数空間を設定する。 $\psi_1, \psi_2 \in L^2(-\psi_+, \psi_-)$ に対し、重み付き内積を

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_* := \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{\psi_1(\theta)\psi_2(\theta)}{(\kappa^*(\theta))^2} d\theta$$

として定義し、この内積から自然に誘導される位相を導入したソボレフ空間 $L^2(-\psi_+, \psi_-)$, $H^2(-\psi_+, \psi_-)$ をそれぞれ L_*^2, H_*^2 と記述する。ただし、 $\kappa^* \neq 0$ より L_*^2, H_*^2 のノルムはそれぞれ $L^2(-\psi_+, \psi_-)$, $H^2(-\psi_+, \psi_-)$ のノルムと同値になるが、後のスペクトル解析の際に有効な内積の導入となっている。第二章における計算を $X_0 = L_*^2, X_1 = H_*^2$ として同様に行うと、方程式 (3.6) の κ^* まわりでの線形化作用素 $A : \mathcal{D}(A) \subset L_*^2 \rightarrow L_*^2$ は

$$\begin{aligned} A(\phi)(\theta) &= (\kappa^*(\theta))^2 \left(\phi_{\theta\theta}(\theta) + \phi(\theta) + \frac{1}{L(\kappa^*)} \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{\phi(\theta)}{\kappa^*(\theta)} d\theta \right), \\ \mathcal{D}(A) &= \left\{ \phi \in H_*^2 : \phi_\theta(\theta) = \cot \theta \left(\phi(\theta) + \frac{1}{L(\kappa^*)} \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{\phi(\theta)}{\kappa^*(\theta)} d\theta \right) \quad \text{at } \theta = \mp \psi_\pm \right\} \end{aligned}$$

となることがわかる。ただし、 $\mathcal{D}(A)$ において非局所項が現れ、スペクトル解析を行うためには工夫が必要である。そこで、重み付き内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ を用いた A の随伴作用素を導入することにより、解析を可能とした。その随伴作用素 $A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset L_*^2 \rightarrow L_*^2$ は

$$A^*(\phi)(\theta) = (\kappa^*(\theta))^2(\phi_{\theta\theta}(\theta) + \phi(\theta)) + \frac{\kappa^*(\theta)}{L(\kappa^*)}\delta L(\phi),$$

$$\mathcal{D}(A^*) = \{\phi \in H_*^2 : \phi_\theta(\theta) = \cot \theta \phi(\theta) \text{ at } \theta = \mp \psi_\pm\}$$

となる。ただし、

$$\delta L(\phi) = \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \phi(\theta) d\theta + \phi(\psi_-) \cot \psi_- + \phi(-\psi_+) \cot \psi_+$$

とする。随伴作用素については、 $\mathcal{D}(A^*)$ において非局所項が現れず、 $\delta L(\phi)$ を摂動項として解析することにより、作用素 A^* に対する解析を行うことができる。 A が A^* の随伴作用素である性質を利用することにより、作用素 A についても解析することができ、以下の性質が成り立つことがわかる。

- A は角域作用素である。
- スペクトル $\sigma(A)$ は可算個の固有値のみで構成されており、

$$\sigma(A) = \{\lambda_i : 0 = \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_i > \cdots\}.$$

- 0 固有値は半単純である。
- 0 固有空間は $\text{Ker}(A) = \text{span}\{1, \sin \theta\}$ 。

一方、定常解の集合 $\mathcal{E} \subset H_*^2$ を

$$\mathcal{E} := \{\kappa^*(\cdot; A^*, H^* : A^* > 0, H^* \in \mathbb{R}\}$$

とすると、 \mathcal{E} は H_*^2 における 2 次元の C^1 多様体であり、 κ^* における接平面 $\text{Tan}_{\kappa^*}\mathcal{E}$ は

$$\text{Tan}_{\kappa^*}\mathcal{E} = \text{span}\{1, \sin \theta\} = \text{Ker}(A)$$

となる。したがって、[11] の安定性理論が適用でき、ある $A^* > 0, H^* \in \mathbb{R}$ が存在して、定理 3.4 で用いた問題 (P) の解 $\Gamma(t)$ の曲率 $\kappa(\theta, t)$ は

$$\|\kappa(\cdot, t) - \kappa^*(\cdot; A^*, H^*)\|_{L^\infty(-\psi_+, \psi_-)} \leq M e^{-\lambda t}$$

を満たすことがわかる。一方、(3.6) においては $A(\kappa(\cdot, t)), H(\kappa(\cdot, t))$ は保存量であり、

$$A(\kappa(\cdot, t)) = A(\Gamma(0)), \quad H(\kappa(\cdot, t)) = 0$$

であるから、 $A^* = A(\Gamma(0)), H^* = 0$ であることがわかる。定理 3.4 における仮定 $A(\Gamma(0)) = A(\mathcal{W}(0))$ により、 $\kappa^*(\cdot; A(\Gamma(0)), 0)$ は κ^* に他ならないため、(3.5) の第一式が証明された。また、曲率からの問題 (P) の解の構成方法 (3.3) を用いることにより、曲線そのものの指数収束性が示され、(3.5) の第二式も成り立つことが証明できる。

参考文献

- [1] K.-S. Chou and X.-P. Zhu, *The curve shortening problem*, Chapman and Hall, 2001.
- [2] S.-I. Ei, M. Sato and E. Yanagida, *Stability of stationary interfaces with contact angle in a generalized mean curvature flow*, American J. Math. **118** (1996), pp. 653–687.
- [3] J. Escher and G. Simonett, *The volume preserving mean curvature flow near spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), pp. 2789–2796.
- [4] M. Gage, *On an area-preserving evolution equation for plane curves*, Nonlinear problems in geometry, Contemp. Math. **51** (1986), pp. 51–62.
- [5] M. Gage and R. S. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Diff. Geom. **23** (1986), pp. 69–96.
- [6] Y. Giga and R. V. Kohn, *Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), pp. 297–319.
- [7] M. A. Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Diff. Geom. **26** (1987), pp. 285–314.
- [8] J.-S. Guo, H. Matano, M. Shimojo and C.-H. Wu, *On a free boundary problem for the curvature flow with driving force*, Arch. Ration. Mech. Anal. **219** (2016), pp. 1207–1272.
- [9] G. Huisken, *Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow*, J. Diff. Geom. **31** (1990), pp. 285–299.
- [10] A. Lunardi, *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
- [11] J. Prüss, G. Simonett and R. Zacher, *On convergence of solutions to equilibria for quasilinear parabolic problems*, J. Differential Equations **246** (2009), pp. 3902–3931.
- [12] M. Shimojo and T. Kagaya, *Exponential stability of a traveling wave for an area preserving curvature motion with two endpoints moving freely on a line*, Asymptotic Analysis **96** (2016), pp. 109–134.