数理解析研究所講究録
第2071巻 2018年 40-65

楕円超幾何積分と楕円補間函数

$-$ q Selberg 積分から楕円 Selberg 積分へ $-$

伊藤 雅彦　(東京電機大学・未来科学部)
野海 正俊 (神戸大学・大学院理学研究科)

序

ベータ函数の多重積分への拡張の一つとして, Atle Selberg (1917–2007) は次の積分公式を得た (1942): パラメータ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ の実部が正のとき,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n!}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{i=1}^{n} z_i^{\alpha-1}(1-z_i)^{\beta-1} \prod_{1\le i<j\le n} |z_i - z_j|^{2\gamma} dz_1 \cdots dz_n \\ &= \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+(j-1)\gamma)\,\Gamma(\beta+(j-1)\gamma)\,\Gamma(j\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+(n+j-2)\gamma)\,\Gamma(\gamma)}. \end{aligned} \tag{0.1}$$

$\gamma = 0$ の時には, 多重積分が 1 変数の積分に分解し, 値はベータ函数 $B(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$ の n 乗となる訳だが, $\mathrm{Re}\,\gamma > 0$ の場合には γ への依存性がガンマ因子の変数のシフトとして現れることが, この Selberg 積分の特徴的な性質である.

差積や Weyl の分母の冪を含むこの種の積分公式については, 三角函数あるいは楕円函数を基礎とする積分を含めて, 数多くの拡張や変種が知られている. またベータ積分が超幾何函数の理論の要であるように, Selberg 積分の種々の拡張も, 多様な多変数超幾何函数の理論の基礎として重要な位置を占める. 超幾何函数の文脈では, 多項式の冪積の積分で, 特に差積や Weyl の分母の冪を含むものを Selberg 型超幾何積分という. Selberg 型超幾何積分を広義の Selberg 型積分と呼び, 特にガンマ函数による明示公式をもつものを狭義の Selberg 型積分と呼んで区別することもある.

本稿では, 論文 [14, 15, 16] に基づき, Selberg 型楕円超幾何積分の研究の最近の進展について, 所謂 BC 型の場合を中心に報告する.

第 1 節では, Selberg 型楕円超幾何積分を考察するための前提として, Selberg 型の q 超幾何積分について基本事項と, 既知の結果を概観する. その後の第 2 節で, 本稿の主題である Selberg 型楕円超幾何積分 (BC 型, トーラス上の積分版) を定式化する. q 超幾何積分や楕円超幾何積分についての我々の議論では, 次の 3 者が重要な役割を演ずる.

(a) q 差分 de Rham 理論　(b) 多重 Lagrange 補間函数　(c) 積分の特異性の解析

第 3 節で BC 型の楕円 Lagrange 補間函数 ([14]) を導入した後, 楕円超幾何積分の解析の例と

して, 第 4 節と第 5 節で van Diejen–Spiridonov の積分公式 (2.9) の (a), (b), (c) に基づく証明 ([15, 16]) を紹介する. 多重 Lagrange 補間函数を利用することにより, q 差分 de Rham 理論の枠組みで, Selberg 型楕円超幾何積分がパラメータについて満たすべき q 差分方程式を系統的に導出することが出来る. これと, 積分の特異性の解析 (ピンチングの方法) を組合せて, Selberg 型積分公式の新しい証明が得られる. 最後の第 6 節では, この方法を一般の BC 型 Selberg 型楕円超幾何積分に適用して, q 差分方程式の記述, 解の基本系の構成, 行列式公式の導出等が可能となることを示す. この第 6 節の内容の詳細については, 現在論文を準備中である ([17]).

1 Selberg 型 q 超幾何積分

本論の楕円超幾何積分の議論に入る前に, この節では, その前提となる Selberg 型の q 超幾何積分について, 基本事項や既知の結果を纏めておく.

1.1 Jackson 積分 vs. トーラス上の積分

$z=(z_1,\ldots,z_n)$ を n 次元の代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の標準座標系とする. また, $q\in\mathbb{C}^*$ $(|q|<1)$ を底として固定する. Selberg 型の q 超幾何積分には, 所謂 Jackson 積分 (多重無限級数) に関するもの (青本・伊藤的) と, $(\mathbb{C}^*)^n$ 内の通常の n サイクル上の積分に関するもの (Macdonald 的) の 2 種類がある.

$\zeta=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\in(\mathbb{C}^*)^n$ を基点とする Jackson 積分 (多重無限級数) を

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1-q)^n}\int_0^{\zeta_1\infty}\cdots\int_0^{\zeta_n\infty}\varphi(z_1,\ldots,z_n)\,\frac{d_qz_1\cdots d_qz_n}{z_1\cdots z_n}\\&\qquad=\sum_{\nu_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_n=-\infty}^{\infty}\varphi(q^{\nu_1}\zeta_1,\ldots,q^{\nu_n}\zeta_n)\end{aligned}\tag{1.1}$$

で定義する. これを, 多重指数の記法 $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{Z}^n$, $q^\nu\zeta=(q^{\nu_1}\zeta_1,\ldots,q^{\nu_n}\zeta_n)\in(\mathbb{C}^*)^n$ で

$$\int_0^{\zeta\infty}\varphi(z)\,\omega_q(z)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\varphi(q^\nu\zeta),\quad \omega_q(z)=\frac{1}{(1-q)^n}\frac{d_qz_1\cdots d_qz_n}{z_1\cdots z_n}\tag{1.2}$$

と略記する. この Jackson 積分は, 代数的トーラス内の乗法的な格子 $\Lambda_\zeta=q^{\mathbb{Z}^n}\zeta\subset(\mathbb{C}^*)^n$ 上での $\varphi(z)$ の値の総和を表す.

これに対して, $(\mathbb{C}^*)^n$ 内の n サイクル C 上の通常の積分を

$$\int_C\varphi(z)\,\omega(z)=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_C\varphi(z_1,\ldots,z_n)\frac{dz_1\cdots dz_n}{z_1\cdots z_n},\quad \omega(z)=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\frac{dz_1\cdots dz_n}{z_1\cdots z_n}\tag{1.3}$$

で表す. 典型的なのは C として, n 次元実トーラス $\mathbb{T}^n=\big\{z\in(\mathbb{C}^*)^n\ \big|\ |z_i|=1\quad(i=1,\ldots,n)\big\}$ を採用する場合である. $\varphi(z)$ が $\mathbb{T}^n$ の近傍で正則なとき, $\mathbb{T}^n$ 上の積分は, $\varphi(z)$ の Laurent 展開の定数項を表す.

Jackson 積分にせよ, トーラス上の積分にせよ, q 超幾何積分の被積分函数の構成要素は, q 無限積 $(z;q)_\infty$ である. Selberg 型 q 超幾何積分の議論に入る前に, ここで, q 無限積とそれに関連した標準的な記号等を確認する (Gasper–Rahman [9]).

q 無限積 $(z;q)_\infty$ と q 階乗冪 $(z;q)_k$ $(k\in\mathbb{Z})$ を

$$(z;q)_\infty=\prod_{i=0}^{\infty}(1-q^iz),\quad (z;q)_k=\frac{(z;q)_\infty}{(q^kz;q)_\infty}\quad (k\in\mathbb{Z}) \tag{1.4}$$

で定義する. $k=0,1,2,\dots$ のとき,

$$\begin{aligned}(z;q)_k&=(1-z)(1-qz)\cdots(1-q^{k-1}z),\\ (z;q)_{-k}&=\frac{1}{(1-q^{-k}z)(1-q^{-k+1}z)\cdots(1-q^{-1}z)}.\end{aligned} \tag{1.5}$$

この種の q 無限積は状況によって, 冪函数あるいはガンマ函数の対応物と見なされる.

$$\frac{(q^\beta z;q)_\infty}{(q^\alpha z;q)_\infty}\ \to\ (1-z)^{\alpha-\beta};\qquad \frac{(q;q)_\infty}{(q^s;q)_\infty}(1-q)^{1-s}\ \to\ \Gamma(s) \tag{1.6}$$

また a_i, b_i をパラメータとして, 片側 q 超幾何級数 ${}_{r+1}\phi_r$ と両側 q 超幾何級数 ${}_r\psi_r$ を夫々

$$\begin{aligned}{}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}a_0,a_1,\dots,a_r\\ b_1,\dots,b_r\end{matrix};q,z\right]&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_0;q)_k(a_1;q)_k\cdots(a_r;q)_k}{(q;q)_k(b_1;q)_k\cdots(b_r;q)_k}z^k\qquad(|z|<1)\\ {}_r\psi_r\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_r\\ b_1,\dots,b_r\end{matrix};q,z\right]&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(a_1;q)_k\cdots(a_r;q)_k}{(b_1;q)_k\cdots(b_r;q)_k}z^k\quad\left(\left|\frac{b_1\cdots b_r}{a_1\cdots a_r}\right|<|z|<1\right)\end{aligned} \tag{1.7}$$

で定義する. 以下, $k\in\mathbb{Z}$ または $k=\infty$ に対して, $(a_1,\dots,a_r;q)_k=(a_1;q)_k\cdots(a_r;q)_k$ といった略記法も用いる.

q 無限積に関連して, Jacobi テータ函数の乗法的記法

$$\theta(z;q)=(z;q)_\infty(q/z;q)_\infty\qquad(z\in\mathbb{C}^*) \tag{1.8}$$

もしばしば用いられる. この定義から, $\theta(z;q)$ は $\mathbb{C}^*$ 上の正則函数であるが, $z=q^k$ $(k\in\mathbb{Z})$ に 1 位の零点をもち, 変数 z の q シフトと反転に関して関係式

$$\theta(qz;q)=\theta(z^{-1};q)=-z^{-1}\theta(z;q) \tag{1.9}$$

を満たす. また, Jacobi の三重積公式

$$(z;q)_\infty(q/z;q)_\infty(q;q)_\infty=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^kq^{\binom{k}{2}}z^k \tag{1.10}$$

により, $\theta(z;q)$ は $\mathbb{C}^*$ において

$$\theta(z;q)=\frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^kq^{\binom{k}{2}}z^k \tag{1.11}$$

と Laurent 展開される.

1.2 Selberg 型 q 超幾何積分 (A 型)

$z=(z_1,\dots,z_n)$ を $(\mathbb{C}^*)^n$ の標準座標系, $\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\in(\mathbb{C}^*)^n$ を Jackson 積分の基点, $a=(a_1,\dots,a_m)$, $b=(b_1,\dots,b_m)$, $t=q^\tau$ 及び λ をパラメータとして, 次の Jackson 積分を考える.

$$J(\zeta;a,b)=\int_0^{\zeta\infty}\Phi(z;a,b)\Delta(z)\,\omega_q(z),\quad \Delta(z)=\prod_{1\le i<j\le n}(z_i-z_j),$$
$$\Phi(z;a,b)=(z_1\cdots z_n)^\lambda\prod_{i=1}^n\prod_{k=1}^m\frac{(qz_i/a_k;q)_\infty}{(b_kz_i;q)_\infty}\prod_{1\le i<j\le n}z_i^{2\tau-1}\frac{(qz_j/tz_i;q)_\infty}{(tz_j/z_i;q)_\infty} \tag{1.12}$$

この Jackson 積分は, $n=1$ のときは, 両側 q 超幾何級数を表す.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-q}\int_0^{\zeta\infty}z^\lambda\prod_{k=1}^m\frac{(qz/a_k;q)_\infty}{(b_kz;q)_\infty}\frac{d_qz}{z}&=\sum_{l=-\infty}^{\infty}(q^l\zeta)^\lambda\prod_{k=1}^m\frac{(q^{l+1}\zeta/a_k;q)_\infty}{(q^lb_k\zeta;q)_\infty}\\&=\zeta^\lambda\prod_{k=1}^m\frac{(q\zeta/a_k;q)_\infty}{(b_k\zeta;q)_\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}q^{l\lambda}\prod_{k=1}^m\frac{(b_k\zeta;q)_l}{(q\zeta/a_k;q)_l}\\&=\zeta^\lambda\prod_{k=1}^m\frac{(q\zeta/a_k;q)_\infty}{(b_k\zeta;q)_\infty}\,{}_m\psi_m\left[\begin{matrix}b_1\zeta,\dots,b_m\zeta\\ q\zeta/a_1,\dots,q\zeta/a_m\end{matrix};\,q,q^\lambda\right]\end{aligned} \tag{1.13}$$

ここで, ζ が $a_1,\dots,a_m$ の何れかに等しいときは, 片側の q 超幾何級数 ${}_m\phi_{m-1}$ となる. 一般の n の場合には, 次のような両側多重 q 超幾何級数を表す.

$$\begin{aligned}J(\zeta;a,b)&=\Phi(\zeta;a,b)\Delta(\zeta)\\&\cdot\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}q^{|\nu|\lambda}\frac{\Delta(q^\nu\zeta)}{\Delta(\zeta)}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{(t\zeta_j/\zeta_i;q)_{\nu_j-\nu_i}}{(q\zeta_j/t\zeta_i;q)_{\nu_j-\nu_i}}\prod_{i=1}^n\prod_{k=1}^m\frac{(b_k\zeta_i;q)_{\nu_i}}{(q\zeta_i/a_k;q)_{\nu_i}}\end{aligned} \tag{1.14}$$

上記の A 型 Jackson 積分で $m=1$ のときには, 次の**青本の q Selberg 積分公式** [1] が成立する. a_1,b_1 を改めて a,b と記すと, パラメータの条件 $|q/ab|<|q^\lambda t^{2i-2}|<1$ $(i=1,\dots,n)$ の下で

$$\begin{aligned}J(\zeta;a,b)&=\prod_{i=1}^n\zeta_i^{\lambda+2(n-i)\tau}\frac{\theta(q^\lambda t^{n-1}b\zeta_i;q)}{\theta(b\zeta_i;q)}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\theta(\zeta_j/\zeta_i;q)}{\theta(t\zeta_j/\zeta_i;q)}\\&\cdot\left(\frac{(q;q)_\infty}{(qt^{-1};q)_\infty}\right)^n\prod_{i=1}^n\frac{(qt^{-i},qt^{-j+1}/ab;q)_\infty}{(q^\lambda t^{i-1},q^{1-\lambda}t^{-n-i+2}/ab;q)_\infty}.\end{aligned} \tag{1.15}$$

ここで, $\theta(z;q)=(z;q)_\infty(q/z;q)_\infty$ は, Jacobi のテータ函数の乗法的記法である. この公式の $n=1$ の場合は, **Ramanujan の ${}_1\psi_1$ 和公式** (Srinivasa Ramanujan 1887–1920)

$${}_1\psi_1\left[\begin{matrix}a\\ b\end{matrix};\,q,z\right]=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{(a;q)_l}{(b;q)_l}z^l=\frac{(q,b/a,az,q/az;q)_\infty}{(b,q/a,z,b/az;q)_\infty} \tag{1.16}$$

に他ならない. 青本の q Selberg 積分公式はこの ${}_1\psi_1$ 和公式の両側多重 q 超幾何級数への拡張となっている.

青本の q Selberg 積分公式については, ルート系に付随する Selberg 型 Jackson 積分の枠組みでの拡張がある (青本 [1], 伊藤 [11], Macdonald [20]). また, A 型 Jackson 積分で m が一般の場合, 異なる基点に関する $J(\zeta;a,b)$ の接続公式は, Slater の ${}_m\psi_m$ 変換公式の多重級数への拡張を与えることも知られている (伊藤・野海).

トーラス上の積分としては, 例えば Selberg 型 q 超幾何積分の系列

$$
\begin{aligned}
I(a,b,u) &= \int_{\mathbb{T}^n} \Psi(z;a,b,u)\omega(z),\\
\Psi(z;a,b,u) &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m} \frac{\theta(z_i/u_k;q)}{(a_k/z_i,b_kz_i;q)_\infty} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{(z_i/z_j,z_j/z_i;q)_\infty}{(tz_i/z_j,tz_j/z_i;q)_\infty}
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

を考えることが出来る. ここで, $a=(a_1,\ldots,a_m)$, $b=(b_1,\ldots,b_m)$, $u=(u_1,\ldots,u_m)$ 及び t はパラメータで, $|a_k|<1$, $|b_k|<1$ $(k=1,\ldots,m)$, $|t|<1$ を満たすものとする. このような積分に関しても, $m=1$ のときには, Selberg 型の積分公式

$$
I(a,b,u) = n!\left(\frac{(t;q)_\infty}{(q;q)_\infty}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \frac{(t^{i-1}a/u,qt^{i-1}bu;q)_\infty}{(t^i,t^{i-1}ab;q)_\infty}
\tag{1.18}
$$

が成立する (Ito–Forrester [13, Corollary 3.19]). これを $a=qu$, $b=1/u$ と特殊化して $m=0$ の場合に退化させると, Macdonald の定数項の明示公式

$$
\int_{\mathbb{T}^n} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{(z_i/z_j,z_j/z_i;q)_\infty}{(tz_i/z_j,tz_j/z_i;q)_\infty}\omega(z) = n!\left(\frac{(t;q)_\infty}{(q;q)_\infty}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \frac{(t^{i-1}q;q)_\infty}{(t^i;q)_\infty}
\tag{1.19}
$$

が導かれる. この種の定数項については, Macdonald 多項式の理論の枠組みで, 一般のルート系での明示公式が知られている (Macdonald [19], Cherednik [4]).

楕円超幾何積分への拡張という観点からは, BC 型 q 超幾何積分が特に重要なので, 以下では主に BC 型を考察する.

1.3 Selberg 型 q 超幾何積分 (BC 型, Jackson 積分)

$z=(z_1,\ldots,z_n)$ を積分変数, $\zeta=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\in(\mathbb{C}^*)^n$ を Jackson 積分の基点, $a=(a_1,\ldots,a_m)\in(\mathbb{C}^*)^m$ 及び t をパラメータとして, 次のような BC 型の Jackson 積分を考える.

$$
\begin{aligned}
J(\zeta;a) &= \int_0^{\zeta\infty} \Phi(z;a)\Delta(z)\omega_q(z), \qquad \omega_q(z) = \frac{1}{(1-q)^n}\frac{d_qz_1\cdots d_qz_n}{z_1\cdots z_n}\\
\Phi(z;a) &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m} z_i^{\frac12-\alpha_k}\frac{(qa_k^{-1}z_i;q)_\infty}{(a_kz_i;q)_\infty} \prod_{1\le i<j\le n} z_i^{1-2\tau}\frac{(qt^{-1}z_i/z_j;q)_\infty(qt^{-1}z_iz_j;q)_\infty}{(tz_i/z_j;q)_\infty(tz_iz_j;q)_\infty},\\
\Delta(z) &= \prod_{i=1}^{n} z_i^{-1}(1-z_i^2) \prod_{1\le i<j\le n} z_i^{-1}(1-z_i/z_j)(1-z_iz_j); \quad a_k=q^{\alpha_k}, \quad t=q^\tau
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

$n=1$ のとき, この Jackson 積分は very well-poised 型の両側 q 超幾何級数 ${}_{m+2}\psi_{m+2}$ を表す:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1-q}\int_0^{\zeta\infty} z^{\lambda}(1-z^2)\prod_{k=1}^{m}\frac{(qa_k^{-1}z;q)_\infty}{(a_kz;q)_\infty}\frac{d_qz}{z}\\
&=\zeta^{\lambda}(1-\zeta^2)\prod_{k=1}^{m}\frac{(qa_k^{-1}\zeta;q)_\infty}{(a_k\zeta;q)_\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1-q^{2l}\zeta^2}{1-\zeta^2}\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{(a_k\zeta;q)_l}{(qa_k^{-1}\zeta;q)_l}\right)q^{l\lambda}\\
&=\zeta^{\lambda}(1-\zeta^2)\prod_{k=1}^{m}\frac{(qa_k^{-1}\zeta;q)_\infty}{(a_k\zeta;q)_\infty}\,{}_{m+2}\psi_{m+2}\left[\begin{matrix} q\zeta,-q\zeta,\ a_1\zeta,\ \ldots,\ a_m\zeta\\ \zeta,\ -\zeta,\ q\zeta/a_1,\ldots,q\zeta/a_m\end{matrix};q,q^{\lambda}\right]
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

ここで $\lambda=\frac{m}{2}-1-\alpha_1-\cdots-\alpha_m$ と記した.

一般の n の場合でも, この BC 型 Jackson 積分で $m=4$ のときには, 次のような Selberg 型の積分公式が成立する (van Diejen [6]; 伊藤 [12] も参照):

$$
\begin{aligned}
J(\zeta;a)=&\prod_{i=1}^{n}\frac{\zeta_i\theta(\zeta_i^2;q)}{\prod_{k=1}^{4}\zeta_i^{\alpha_k}\theta(a_k\zeta_i;q)}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\theta(\zeta_i/\zeta_j;q)\theta(\zeta_i\zeta_j;q)}{\zeta_i^{2\tau}\theta(t\zeta_i/\zeta_j;q)\theta(t\zeta_i\zeta_j;q)}\\
&\cdot\prod_{i=1}^{n}\frac{(q;q)_\infty(qt^{-i};q)_\infty\prod_{1\le k<l\le 4}(qt^{-n+i}/a_ka_l;q)_\infty}{(qt^{-1};q)_\infty(qt^{-n-i+2}/a_1a_2a_3a_4;q)_\infty}.
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

この公式は, $n=1$ の場合の Bailey の ${}_6\psi_6$ 和公式

$$
\begin{aligned}
&{}_6\psi_6\left[\begin{matrix} qa_0^{\frac12},-qa_0^{\frac12},\ a_1,\ \ldots,\ a_4\\ a_0^{\frac12},\ -a_0^{\frac12},\ qa_0/a_1,\ldots,qa_0/a_4\end{matrix};q,\frac{qa_0^2}{a_1a_2a_3a_4}\right]\\
&=\frac{(q,qa_0,q/a_0;q)_\infty\prod_{1\le i<j\le 4}(qa_0/a_ia_j;q)_\infty}{(qa_0^2/a_1a_2a_3a_4;q)_\infty\prod_{j=1}^{4}(qa_0/a_j,q/a_j;q)_\infty}
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

の両側多重 q 超幾何級数への拡張を与える.

一般の (n,m) の場合について, 青本・伊藤 [2] では, BC 型 Jackson 積分に付随する q 差分方程式系とその解行列が考察されており, 特に解行列の行列式の明示公式も与えられている. また異なる基点に関する $J(\zeta;a)$ の接続公式は, Sears–Slater の very well-poised ${}_{2r}\psi_{2r}$ の変換公式の多重級数への拡張を与えることが知られている (伊藤・野海 [14]).

1.4 周回積分による q ベータ積分と q 超幾何積分

トーラス上の積分の枠組みで, BC 型の q 超幾何積分を考察するために, その前提として, 1 変数の q 超幾何積分の場合を見ておこう. 以下, 非負整数の全体を $\mathbb{N}=\mathbb{Z}_{\ge 0}=\{0,1,2,\ldots\}$ で表す.

出発点は **Askey–Wilson の q ベータ積分** ([3])

$$
\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C\frac{(z^{\pm 2};q)_\infty}{(az^{\pm1},bz^{\pm1},cz^{\pm1},dz^{\pm1};q)_\infty}\frac{dz}{z}=\frac{2}{(q;q)_\infty}\frac{(abcd;q)_\infty}{(ab,ac,ad,bc,bd,cd;q)_\infty}
\tag{1.24}
$$

である. ここでパラメータは $|a|<1,|b|<1,|c|<1,|d|<1$ を満たすと仮定し, 積分路の C としては単位円 $|z|=1$ をとる. 複号の $\pm$ は 積 $f(z^{\pm1})=f(z)f(z^{-1})$ を表す. 構造を見易くするため

に a,b,c,d を a_1,a_2,a_3,a_4 と書けば, 積分公式は

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{(z^{\pm 2};q)_\infty}{\prod_{k=1}^4 (a_k z^{\pm 1};q)_\infty}\frac{dz}{z} = \frac{2}{(q;q)_\infty}\frac{(a_1a_2a_3a_4;q)_\infty}{\prod_{1\le k<l\le 4}(a_k a_l;q)_\infty} \tag{1.25}$$

となる. 積分値がこのように因子化して q 無限積で表されるのは, 驚くべきことであろう.

Askey–Wilson の q ベータ積分で, パラメータ a_1,a_2,a_3,a_4 が一般の場合の積分路 C の取り方についても註釈を加えておく. 被積分函数の極に注目して, 原点側に集積する極の系列 $z=q^i a_k$ $(1\le k\le 4; i\in\mathbb{N})$ と, 無限遠側に集積する極の系列 $z=q^j a_l^{-1}$ $(1\le l\le 4; j\in\mathbb{N})$ に重なりが生じないための条件 $a_k a_l \notin q^{-\mathbb{N}}$ $(k,l\in\{1,\ldots,4\})$ を課す. その仮定の下で, 積分路 C として, $z=0$ に集積する極の 4 系列と $z=\infty$ に集積する極の 4 系列を, 左右に分離するような閉曲線をとる. このように積分路を特定して積分を定義すれば, 多重円板 $|a_k|<1$ $(k=1,\ldots,4)$ の正則函数が, 条件 $a_k a_l\notin q^{-\mathbb{N}}$ $(k,l\in\{1,\ldots,4\})$ で定義される領域まで, 自然に解析接続されることになる.

Askey–Wilson q ベータ積分の拡張として, **Nassrallah–Rahman の q ベータ積分** ([21]) と呼ばれる積分公式がある. Askey–Wilson の q ベータ積分は, 被積分函数の分母に, 4 組の無限積をもつ訳だが, 分母と分子に q 無限積をもう 1 組ずつ追加しても, パラメータに適切な「平衡条件」を課せば, 積分値は因子化する: 平衡条件 $a_0a_1\cdots a_5=q$ の下で,

$$\frac{(q;q)_\infty}{4\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{(z^{\pm 2};q)_\infty (qa_0^{-1}z^{\pm 1};q)_\infty}{\prod_{k=1}^5 (a_k z^{\pm 1};q)_\infty}\frac{dz}{z} = \frac{\prod_{i=1}^5 (q/a_i a_0;q)_\infty}{\prod_{1\le i<j\le 5}(a_i a_j;q)_\infty}. \tag{1.26}$$

パラメータは一般と仮定し, 積分路の C は Askey–Wilson の積分の場合と同様, $z=0$ に集積する極の系列と $z=\infty$ に集積する系列を左右に分離するようにとる.

ベータ函数的な積分はこの段階までで, 分母と分子に無限積を更に 1 組ずつ追加すると, 超幾何的な積分の世界に入る. 次に示すのは **Rahman の q 超幾何積分** ([23], Mizan Rahman 1932–2015) と呼ばれるもので, 積分の結果は 2 個の q 超幾何級数の和で表される: 平衡条件 $a_0a_1\cdots a_7=q^2$ の下で,

$$\begin{aligned}
&\prod_{1\le i<j\le 6}(a_ia_j;q)_\infty\cdot\frac{(q;q)_\infty}{4\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{(z^{\pm 2};q)_\infty \prod_{i=0,7}(qa_i^{-1}z^{\pm 1};q)_\infty}{\prod_{i=1}^6 (a_i z^{\pm 1};q)_\infty}\frac{dz}{z}\\
&=\frac{\prod_{i=1}^6 (qa_i/a_0;q)_\infty (q/a_ia_7;q)_\infty}{(q^2a_0^2;q)_\infty (a_0/a_7;q)_\infty}\,{}_{10}W_9\big(q/a_0^2;q/a_0a_1,q/a_0a_2,\ldots,q/a_0a_7;q,q\big)\\
&\quad+\frac{\prod_{i=1}^6 (qa_i/a_7;q)_\infty (q/a_ia_0;q)_\infty}{(q^2a_7^2;q)_\infty (a_7/a_0;q)_\infty}\,{}_{10}W_9\big(q/a_7^2;q/a_1a_7,q/a_2a_7,\ldots,q/a_6a_7;q,q\big).
\end{aligned} \tag{1.27}$$

ここで, very well-poised な q 超幾何級数 ${}_{r+3}W_{r+2}$ の記号を用いた:

$$\begin{aligned}
&{}_{r+3}W_{r+2}\big(a_0;a_1,\ldots,a_r;q,z\big)\\
&={}_{r+3}\phi_{r+2}\left[\begin{matrix}a_0,\ qa_0^{\frac12},-qa_0^{\frac12},\ a_1,\ \ldots,\ a_r\\ a_0^{\frac12},\ -a_0^{\frac12},\ qa_0/a_1,\ldots,qa_0/a_r\end{matrix};q,z\right]\\
&=\sum_{k=0}^\infty \frac{1-q^{2k}a_0}{1-a_0}\frac{(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_r;q)_k}{(q,qa_0/a_1,\ldots,qa_0/a_r;q)_k}z^k \qquad (|z|<1).
\end{aligned} \tag{1.28}$$

1.5 Selberg 型 q 超幾何積分 (BC 型, トーラス上の積分)

以下では, 前項の q 超幾何積分の多重積分版として, トーラス $\mathbb{T}^n = \{|z_1| = \cdots = |z_n| = 1\}$ 上の積分を考察する. $a = (a_1, \ldots, a_{r+4})$, $b = (b_1, \ldots, b_r)$ 及び t をパラメータとし, これらは条件 $|a_k| < 1$, $|b_k| < 1$, $|t| < 1$ を満たすものとする. このとき, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ の有理型函数

$$\Phi(z;a,b) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(z_i^{\pm 2};q)_\infty \prod_{k=1}^{r}(qb_k^{-1}z_i^{\pm 1};q)_\infty}{\prod_{k=1}^{r+4}(a_k z_i^{\pm 1};q)_\infty} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{(z_i^{\pm 1}z_j^{\pm 1};q)_\infty}{(tz_i^{\pm 1}z_j^{\pm 1};q)_\infty} \tag{1.29}$$

に対して, $\mathbb{T}^n$ 上の積分

$$I(a,b) = \int_{\mathbb{T}^n} \Phi(z;a,b)\omega(z), \quad \omega(z) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \frac{dz_1\cdots dz_n}{z_1\cdots z_n} \tag{1.30}$$

を考える. 複号 $\pm$ は積の略記法で, 符号の可能な組合せに亘る積を表すものとする:

$$f(z^{\pm 1}) = f(z)f(z^{-1}), \quad f(z^{\pm 1}w^{\pm 1}) = f(zw)f(zw^{-1})f(z^{-1}w)f(z^{-1}w^{-1}). \tag{1.31}$$

$r=0$ の場合は Askey–Wilson q ベータ積分の多変数版の積分公式が成立する (Gustafson [10]):

$$I(a_1,a_2,a_3,a_4) = \frac{2^n n!}{(q;q)_\infty^n} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{(t;q)_\infty}{(t^i;q)_\infty} \frac{(a_1a_2a_3a_4t^{n+i-2};q)_\infty}{\prod_{1\le k<l\le 4}(t^{i-1}a_ka_l;q)_\infty} \right). \tag{1.32}$$

この場合の被積分函数 $\Phi(z;a_1,a_2,a_3,a_4)$ は, BC_n 型の Macdonald–Koornwinder 多項式の重み函数である. $r=1$ で, 平衡条件 $a_1\cdots a_5bt^{2n-2} = q$ を満たす場合には, 次の積分公式がある:

$$I(a_1,\ldots,a_5;b) = \frac{2^n n!}{(q;q)_\infty^n} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{(t;q)_\infty}{(t^i;q)_\infty} \frac{\prod_{k=1}^{5}(t^{1-i}q/a_kb;q)_\infty}{\prod_{1\le k<l\le 5}(t^{i-1}a_ka_l;q)_\infty} \right) \tag{1.33}$$

これは 1 変数の場合の Nassrallah–Rahman の q ベータ積分の拡張である.

2 Selberg 型楕円超幾何積分

ここで考察する楕円超幾何積分は, 大まかに言えば, q 超幾何積分の被積分函数の構成要素である q 無限積を一定のやり方で**楕円ガンマ函数**に置換えて定義したものである. 以下, 2 個の底 $p, q \in \mathbb{C}^*$, $|p| < 1$, $|q| < 1$ を固定する.

2.1 Ruijsenaars の楕円ガンマ函数

(p,q) を底とする **Ruijsenaars のガンマ函数** $\Gamma(z;p,q)$ を, (p,q) に関する 2 重無限積を用いて次のように定義する ([28]):

$$\Gamma(z;p,q) = \frac{(pq/z;p,q)_\infty}{(z;p,q)_\infty}, \quad (z;p,q)_\infty = \prod_{i,j=0}^{\infty}(1-p^iq^jz). \tag{2.1}$$

この $\Gamma(z;p,q)$ は $\mathbb{C}^*$ 上の有理型函数であって, p, q が一般ならば, $z=p^{-i}q^{-j}$ $(i,j=0,1,\dots)$ に一位の極をもつ. また, Jacobi テータ函数

$$\theta(z;p)=(z;p)_\infty(p/z;p)_\infty;\quad \theta(pz;p)=-z^{-1}\theta(z;p),\quad \theta(p/z;p)=\theta(z;p) \tag{2.2}$$

に対して, 次の関係式を満たす:

$$\Gamma(qz;p,q)=\theta(z;p)\Gamma(z;p,q),\quad \Gamma(pq/z;p,q)=\Gamma(z;p,q)^{-1}. \tag{2.3}$$

複号 $\pm$ を積 $f(z^{\pm1})=f(z)f(z^{-1})$ の意味で用いるとき,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z^{\pm1};p,q)}&=\frac{(z^{\pm1};p,q)_\infty}{(pqz^{\pm1};p,q)_\infty}=(1-z^{\pm1})(pz^{\pm1};p)_\infty(qz^{\pm1};q)_\infty\\&=-z^{-1}(z,p/z;p)_\infty(z,q/z;q)_\infty=-z^{-1}\theta(z;p)\theta(z;q).\end{aligned} \tag{2.4}$$

つまり $1/\Gamma(z^{\pm1};p,q)$ は $\mathbb{C}^*$ 上正則で, 底 p と 底 q のテータ函数の積に分離する.

楕円的な設定から q の三角的な設定に戻るには, 極限 $p\to 0$ を考えればよい:

$$\theta(z;p)\to(1-z),\quad \Gamma(z;p,q)\to\frac{1}{(z;q)_\infty},\quad \Gamma(pz;p,q)\to(q/z;q)_\infty. \tag{2.5}$$

q 超幾何積分の範疇では, $1/(z;q)_\infty$ と $(q/z;q)_\infty$ が殆ど同じような役割をするが, 両者の関係は, 楕円ガンマのレベルでは, z 変数の p シフトに対応している.

2.2 Selberg 型の楕円超幾何積分 (BC 型)

$z=(z_1,\dots,z_n)$ を代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の標準座標系とし, $a=(a_1,\dots,a_m)$ をパラメータにもつ有理型函数

$$\Phi(z;a)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\prod_{k=1}^{m}\Gamma(a_kz_i^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z_i^{\pm2};p,q)}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\Gamma(tz_i^{\pm1}z_j^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z_i^{\pm1}z_j^{\pm1};p,q)} \tag{2.6}$$

を考える. パラメータが条件 $|a_k|<1$ $(k=1,\dots,m)$, $|t|<1$ を満たすとすると, $\Phi(z;a)$ は実トーラス $\mathbb{T}^n$ の近傍で正則である. この設定で $\mathbb{T}^n$ 上の積分

$$I_n(a)=\int_{\mathbb{T}^n}\Phi(z;a)\omega(z),\quad \omega(z)=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\frac{dz_1\cdots dz_n}{z_1\cdots z_n} \tag{2.7}$$

を BC 型の **Selberg 型楕円超幾何積分**と呼ぶ. パラメータ a, t がこの上記の領域を出るときには, Askey–Wilson の q ベータ積分の場合と同様に, n サイクルを $\mathbb{T}^n$ から連続的に変形する.

この Selberg 型楕円超幾何積分の出発点となっているのは, $n=1$, $m=6$ の場合の積分公式で, **楕円ベータ積分** (Spiridonov [29]) と呼ばれるものである: 平衡条件 $a_1\cdots a_6=pq$ の下で

$$\frac{(p;p)_\infty(q;q)_\infty}{4\pi\sqrt{-1}}\int_C\frac{\prod_{k=1}^{6}\Gamma(a_kz^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z^{\pm2};p,q)}\frac{dz}{z}=\prod_{1\le k<l\le 6}\Gamma(a_ka_l;p,q). \tag{2.8}$$

この積分公式は, Nassrallah–Rahman の q ベータ積分の楕円版である. 実際 a_6 を pa_6 に置換えた後に, 極限 $p \to 0$ を考えれば, この積分公式から Nassralla–Rahman の q ベータ積分の積分公式 (1.26) が得られる. 楕円超幾何級数に対する Frenkel–Turaev の和公式は, この楕円ベータ積分の特別な場合に相当する.

n 重積分で $m=6$ の場合には, 次のような Selberg 型積分公式 (van Diejen–Spiridonov [7], Rains [26]) が成立する: 平衡条件 $a_1\cdots a_6t^{2n-2}=pq$ の下で

$$\begin{aligned} I_n(a_1,\ldots,a_6) &= \int_{\mathbb{T}^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{\prod_{k=1}^{6}\Gamma(a_kz_i^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z_i^{\pm2};p,q)}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\Gamma(tz_i^{\pm1}z_j^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z_i^{\pm1}z_j^{\pm1};p,q)}\,\omega(z) \\ &= \frac{2^nn!}{(p;p)_\infty^n(q;q)_\infty^n}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\Gamma(t^i;p,q)}{\Gamma(t;p,q)}\prod_{1\le k<l\le 6}\Gamma(t^{i-1}a_ka_l;p,q)\right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

これは Gustafson の q Selberg 積分の楕円版である.

n 重積分で $m=8$ の場合が, 典型的な BC 型楕円超幾何積分 (Rains [26]) である.

$$I_n(a_1,\ldots,a_8)=\int_{\mathbb{T}^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{\prod_{k=1}^{8}\Gamma(a_kz_i^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z_i^{\pm2};p,q)}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\Gamma(tz_i^{\pm1}z_j^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z_i^{\pm1}z_j^{\pm1};p,q)}\,\omega(z) \tag{2.10}$$

BC 型 Ruijsenaars の差分作用素は, この場合の $\Phi(z;a)$ を重み函数とする内積で形式的自己共役となる. また, $t=q$ のとき, $I_n(a_1,\ldots,a_8)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ は, E_8 型楕円差分 Painlevé 方程式の「超幾何型 τ 函数」を与える (Rains [24], 野海 [22]). この $t=q$ (Gaussian) の場合は, $I_n(a_1,\ldots,a_8)$ を 1 変数の楕円超幾何積分を成分とする, $n\times n$ の 2 方向 Casorati 行列式で表示することも出来る.

2.3 楕円 Jackson 積分 (BC 型)

基点 ζ が適切に選ばれ, 和が有限和となる場合については, 次のような Jackson 積分 (多重楕円超幾何級数) を考えることもできる.

$$\begin{aligned} J(\zeta;a) &= \int_0^{\zeta\infty}\Psi(z;a)\omega_q(z), \quad \omega_q(z)=\frac{1}{(1-q)^n}\frac{d_qz_1\cdots d_qz_n}{z_1\cdots z_n} \\ \Psi(z;a) &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}z_i^{\frac12-\alpha_k}\frac{\Gamma(a_kz_i;p,q)}{\Gamma(qa_k^{-1}z_i;p,q)}\prod_{1\le i<j\le n}z_i^{1-2\tau}\frac{\Gamma(tz_iz_j^{\pm1};p,q)}{\Gamma(qt^{-1}z_iz_j^{\pm1};p,q)} \\ &\quad\cdot\prod_{i=1}^{n}z_i^{-1}\theta(z_i^2;p)\prod_{1\le i<j\le n}z_j^{-1}\theta(z_iz_j^{\pm1};p) \qquad (a_k=q^{\alpha_k},t=q^{\tau}) \end{aligned} \tag{2.11}$$

楕円の場合には, この種の無限級数は一般に収束しないので注意が必要である. 有限級数となる場合に限定するのでなければ, 何らかの意味で, 形式的冪級数として考察する必要が生じる.

この形の Jackson 積分で $m=6$ の場合は, 次の Warnaar–Rosengren の和公式が成立する ([32], [27]; 伊藤・野海 [15] も参照): $a_1a_2a_3a_4a_5a_6t^{2n-2}=q$, $a_1a_6t^{n-1}=q^{-N}$ $(N\in\mathbb{Z}_{\ge0})$,

$\zeta=(t^{n-1}a_1,t^{n-2}a_1,\dots,a_1)$ のとき

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0\le\nu_n\le\cdots\le\nu_1\le N}\prod_{i=1}^{n}\left(qt^{2(i-1)}\right)^{\nu_i}\frac{\theta(q^{2\nu_i}\zeta_i^2;p)}{\theta(\zeta_i^2;p)}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\theta(q^{\nu_i-\nu_j}\zeta_i/\zeta_j;p)\theta(q^{\nu_i+\nu_j}\zeta_i\zeta_j;p)}{\theta(\zeta_i/\zeta_j;p)\theta(\zeta_i\zeta_j;p)}\\
&\quad\cdot\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{6}\frac{\theta(a_k\zeta_i;p)_{q,\nu_i}}{\theta(qa_k^{-1}\zeta_i;p)_{q,\nu_i}}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\theta(t\zeta_i/\zeta_j;p)_{q,\nu_i-\nu_j}\theta(t\zeta_i\zeta_j;p)_{q,\nu_i+\nu_j}}{\theta(qt^{-1}\zeta_i/\zeta_j;p)_{q,\nu_i-\nu_j}\theta(qt^{-1}\zeta_i\zeta_j;p)_{q,\nu_i+\nu_j}}\\
&\quad=\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta(qt^{n+i-2}a_1^2;p)_{q,N}\prod_{2\le k<l\le 4}\theta(qt^{1-i}/a_ka_l;p)_{q,N}}{\theta(qt^{2-n-i}/a_1a_2a_3a_4;p)_{q,N}\prod_{k=2}^{4}\theta(qt^{i-1}a_1/a_k;p)_{q,N}}.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

ここで, $\theta(z;p)_{q,k}=\theta(z;p)\theta(qz;p)\cdots\theta(q^{k-1}z;p)$ $(k=0,1,2,\dots)$. この和公式は, 次の Frenkel–Turaev 和公式 ([8]) の多重級数への拡張である:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N}\frac{\theta(q^{2k}a_0;p)}{\theta(a_0;p)}\frac{\theta(a_0;p)_{q,k}}{\theta(q;p)_{q,k}}\prod_{i=1}^{5}\frac{\theta(a_i;p)_{q,k}}{\theta(qa_0/a_i;p)_{q,k}}q^k\\
&=\frac{\theta(qa_0,qa_0/a_1a_2,qa_0/a_1a_3,qa_0/a_2a_3;p)_{q,N}}{(qa_0/a_1,qa_0/a_2,qa_0/a_3,qa_0/a_1a_2a_3;p)_{q,N}}.
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

ここで, パラメータは, 平衡条件 $a_1a_2a_3a_4a_5=qa_0^2$ と終端条件 $a_5=q^{-N}$ $(N\in\mathbb{N})$ を満たすものとする. 右辺では $\theta(a_1,\dots,a_r;p)_{q,k}=\theta(a_1;p)_{q,k}\cdots\theta(a_r;p)_{q,k}$ と略記した.

2.4 基本的な課題

楕円超幾何積分に関する基本的な課題として, 次のような問題を考えたい.

(0) Selberg 型楕円超幾何積分に対して, 差分 de Rham 理論の枠組みを整備すること.

(1) 適切にコサイクルを定めて, 楕円超幾何積分の満たすべき差分方程式を記述すること.

(2) その方程式の解の基本系を構成し, 異なる解の基本系の間の接続問題を考察すること.

トーラス上の積分の場合も Jackson 積分の場合も, q 差分 de Rham 理論の代数的構造は共通である. n 重積分で m 個の a パラメータをもつ BC 型楕円超幾何積分の場合であれば, $m=2r+4$ のとき, パラメータに適切な平衡条件を課せば方程式の階数は $\binom{n+r-1}{r-1}$ となる. ($r=1$ のときは階数 1 で Selberg 型積分公式をもつ. $r=2$ のとき, 階数 $n+1$ で, $r\ge 2$ では超幾何的設定となる.)

次節以降では, 「多重 Lagrange 補間」(第 3 節, [14]) の概念を導入した後, 上記の van Diejen–Spiridonov の Selberg 型積分公式 $(m=6)$ を例にとり, Selberg 型楕円超幾何積分における「q 差分 de Rham 理論の考え方」(第 4 節, [15]) を説明する. 楕円 Lagrange 補間函数を利用すれば, q 差分 de Rham 理論の枠組みで, Selberg 型楕円超幾何積分がパラメータについて満たすべき q 差分方程式を導出することができる. これと「積分の特異性の解析」と組合せて, Selberg 型積分公式の新しい証明を与える (第 5 節, [16]). 更に, その方法を一般の (n,m) の場合に適用することにより, 楕円超幾何積分 $I_n(a)$ に付随する q 差分方程式系の記述, その q 差分方程式系の解の基本系の構成, 行列式公式の導出などが可能となることを示す (第 6 節).

3 多重 Lagrange 補間 (BC 型)

3.1 Lagrange 補間

$\mathcal{H} \subset \mathcal{O}(D)$ を $D \subseteq \mathbb{C}^n$ 上の正則函数からなる有限次元 $\mathbb{C}$ 線型空間とする. $\mathcal{H}$ の基底 $E_\mu(z)$ $(\mu \in \Lambda)$ と, 同じ添字集合をもつ参照点の集合 $\zeta_\mu \in D$ $(\mu \in \Lambda)$ があって, 補間条件

$$E_\mu(\zeta_\nu) = \delta_{\mu,\nu} \qquad (\mu, \nu \in \Lambda) \tag{3.1}$$

を満たすものが存在すると仮定すると, $\mathcal{H}$ に属す任意の函数 $f(z) \in \mathcal{H}$ は

$$f(z) = \sum_{\mu \in \Lambda} f(\zeta_\mu) E_\mu(z) \tag{3.2}$$

と一意的に展開される. この意味の Lagrange 補間函数は, q 超幾何積分や楕円超幾何積分の差分 de Rham 理論的考察で重要な役割を果たす.

まず, 楕円テータ函数の場合の例を見ておく. $p \in \mathbb{C}^*$, $|p| < 1$ を底として, $(z, w) \in (\mathbb{C}^*)^2$ の正則函数

$$e(z, w) = z^{-1}\theta(z/w; p)\theta(zw; p) \tag{3.3}$$

を考えると $e(z^{-1}, w) = e(z, w^{-1}) = e(z, w)$, $e(w, z) = -e(z, w)$, $\quad e(z, z) = 0$. また, 擬周期性 $e(pz, w) = e(z, w)(pz^2)^{-1}$, $e(z, pw) = e(z, w)(pw^2)^{-1}$ が成立する. そこで,

$$\mathcal{H}_{s-1} = \left\{ f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*) \;\middle|\; f(z^{-1}) = f(z),\;\; f(pz) = f(z)(pz^2)^{-s+1} \right\} \quad (s = 1, 2, \ldots) \tag{3.4}$$

とおく. $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{C}^*$ を一般のパラメータとすると任意の $f(z) \in \mathcal{H}_{s-1}$ について, 部分分数展開の公式

$$\frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{s} e(z, a_j)} = \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{e(z, a_k)} \frac{f(a_k)}{\prod_{j \neq k} e(a_k, a_j)} \tag{3.5}$$

が成立し, 従って

$$f(z) = \sum_{k=1}^{s} f(a_k) \prod_{j \neq k} \frac{e(z, a_j)}{e(a_k, a_j)} \tag{3.6}$$

となる. そこで $a = (a_1, \ldots, a_s)$ に対して, $z = a_k$ $(k = 1, \ldots, s)$ を参照点にとれば,

$$E_k(a; z) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{s} \frac{e(z, a_j)}{e(a_k, a_j)} \quad (k = 1, \ldots, s) \tag{3.7}$$

が求める補間函数系である:

$$\mathcal{H}_{s-1} = \bigoplus_{k=1}^{s} \mathbb{C} E_k(a; z); \quad E_k(a; a_l) = \delta_{k,l} \quad (k, l \in \{1, \ldots, s\}). \tag{3.8}$$

3.2 擬周期性をもつ正則函数の空間 $\mathcal{H}^{(p)}_{s-1,n}$ と多重 Lagrange 補間

$W_n = \{\pm 1\} \rtimes \mathfrak{S}_n$ を n 次の超八面体群 (B_n または C_n 型の Weyl 群) とする. W_n は $(\mathbb{C}^*)^n$ の座標 $z = (z_1, \ldots, z_n)$ の添字の置換と座標の反転 $z_i \to z_i^{-1}$ によって, 正則函数の空間 $\mathcal{O}((\mathbb{C}^*)^n)$ に作用する. そこで, $(\mathbb{C}^*)^n$ 上の W_n 不変な正則函数であって, 「$s-1$ 次の」擬周期性をもつもの全体のなす $\mathbb{C}$ 線型空間

$$\mathcal{H}^{(p)}_{s-1,n} = \left\{ f(z) \in \mathcal{O}((\mathbb{C}^*)^n)^{W_n} \;\middle|\; T_{p,z_i} f(z) = f(z)(pz_i^2)^{-s+1} \quad (i = 1, \ldots, n) \right\} \tag{3.9}$$

を考える. ここで T_{p,z_i} は変数 z_i を pz_i にシフトする作用素を表す. この $\mathbb{C}$ 線型空間の次元については $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^{(p)}_{s-1,n} = \binom{n+s-1}{s-1}$ である.

$a = (a_1, \ldots, a_s) \in (\mathbb{C}^*)^s$ を一般の複素パラメータとし, 多重指数の集合

$$Z_{s,n} = \left\{ \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s) \in \mathbb{N}^s \;\middle|\; |\mu| = \mu_1 + \cdots + \mu_s = n \right\} \tag{3.10}$$

を考える. $|Z_{s,n}| = \binom{n+s-1}{s-1}$ に注意して, 次の参照点の集合を考える (多重主特殊化):

$$(a)_{t,\mu} = (a_1, ta_1, \ldots, t^{\mu_1 - 1}a_1; a_2, ta_2, \ldots; a_s, ta_s, \ldots, t^{\mu_s - 1}a_s) \in (\mathbb{C}^*)^n \quad (\mu \in Z_{s,n}) \tag{3.11}$$

このとき, 次の定理が成立する.

定理 3.1 (*BC* **型多重 Lagrange 補間** [14]) $\mathcal{H}^{(p)}_{s-1,n}$ の $\mathbb{C}$ 基底 $E_\mu(a; z)$ ($\mu \in Z_{s,n}$) で補間条件 $E_\mu(a; (a)_{t,\nu}) = \delta_{\mu,\nu}$ ($\mu, \nu \in Z_{s,n}$) を満たすものが唯一つ存在する.

$s = 2$ のときの $E_{(i,j)}(a_1, a_2; z)$ は, Coskun–Gustafson [5], Rains [25] の BC 型楕円補間函数で, 1 列の分割 (1^r) ($r = 0, 1, \ldots, n$) に付随するものと本質的に同じものである.

3.3 $E_\mu(a; z)$ の構成と基本性質

以下に, 補間基底 $E_\mu(a; z)$ ($\mu \in Z_{s,n}$) の基本性質を列挙する.

- **帰納的構成:** $n = 1$ のときは既に見たもので, $E_{\epsilon_k}(a; z_1) = E_k(a; z_1)$, $\epsilon_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. $n \geq 2$ のときは帰納的に

$$E_\mu(a; z_1, \ldots, z_n) = \sum_{1 \leq k \leq s;\, \mu_k > 0} E_{\mu - \epsilon_k}(a; z_1, \ldots, z_{n-1}) E_k(t^{\mu - \epsilon_k} a; z_n) \quad (\mu \in Z_{s,n}). \tag{3.12}$$

で定義する. ここで, $t^\mu a = (t^{\mu_1} a_1, \ldots, t^{\mu_s} a_s)$. この構成で補間条件が満たされることは直ちに確認できるが, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ に関する $\mathfrak{S}_n$ 不変性は非自明で, 証明を要する.

- **特殊な場合:** $s-1$ 単体の頂点と面の場合.

$$E_{n\epsilon_k}(a; z) = \prod_{1 \leq j \leq s;\, j \neq k} \frac{\prod_{i=1}^n e(z_i, a_j)}{e(a_k, a_j)_{t,n}} \quad (k = 1, \ldots, s). \tag{3.13}$$

$$E_{(\mu_1,\ldots,\mu_{s-1},0)}(a_1,\ldots,a_s;z)=E_{(\mu_1,\ldots,\mu_{s-1})}(a_1,\ldots,a_{s-1};z)\frac{\prod_{i=1}^{n}e(z_i,a_s)}{\prod_{j=1}^{s-1}e(a_j,a_s)_{t,\mu_j}} \tag{3.14}$$

● **双対 Cauchy 核:** $z=(z_1,\ldots,z_n)$,$w=(w_1,\ldots,w_{s-1})$ について,

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s-1}e(z_i,w_j)=\sum_{\mu\in Z_{s,n}}E_\mu(a;z)F_\mu(a;w);\quad F_\mu(a;w)=\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{s-1}e(a_i;w_j)_{t,\mu_i}. \tag{3.15}$$

ここで, $e(u,v)_{t,k}=e(u,v)e(tu,v)\cdots e(t^{k-1}u,v)$.

● **変数の分割:** $z=(z',z'')$, $z'=(z_1,\ldots,z_p)$, $z''=(z_{p+1},\ldots,z_{p+q})$ $(p+q=n)$ のとき,

$$E_\lambda(a;z)=\sum_{|\mu|=p,|\nu|=q;\,\mu+\nu=\lambda}E_\mu(a;z')E_\nu(t^\mu a;z'')\quad(\lambda\in Z_{s,n}). \tag{3.16}$$

● **明示公式:** 各 $\mu\in Z_{s,n}$ に対して

$$E_\mu(a;z)=\sum_{\substack{K_1\sqcup\cdots\sqcup K_s=\{1,\ldots,n\}\\ |K_i|=\mu_i\ (i=1,\ldots,s)}}\prod_{i=1}^{s}\prod_{k\in K_i}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}\frac{e(z_k;t^{\mu_j^{(k-1)}}a_j)}{e(t^{\mu_i^{(k-1)}}a_i;t^{\mu_j^{(k-1)}}a_j)}. \tag{3.17}$$

ここで, $\mu_i^{(k)}=|K_i\cap\{1,\ldots,k\}|$ と記した.

● **特殊値:** $z=(u)_{t,n}=(u,tu,\ldots,t^{n-1}u)$ での値は, 記号 $[u]=u^{-\frac{1}{2}}\theta(u;p)$ を用いると

$$E_\mu(a;(u)_{t,n})=\prod_{1\le i<j\le s}\frac{[t^{\mu_i-\mu_j}a_i/a_j]}{[a_i/a_j]}\frac{[t]_{t,n}\prod_{i=1}^{s}[u/a_i]_{t,n-\mu_i}[t^{\mu_i}ua_i]_{t,n-\mu_i}}{\prod_{i,j=1}^{s}[ta_i/a_j]_{t,\mu_i}\prod_{1\le i<j\le s}[a_ia_j]_{t,\mu_i+\mu_j}}. \tag{3.18}$$

● **パラメータの変更:** $a=(a_1,\ldots,a_s)$ のうち a_s だけを変更して $b=(a_1,\ldots,a_{s-1},b_s)$ とし, a から b へのパラメータの変更を考える:

$$E_\mu(a;z)=\sum_{\nu;\,\mu'\ge\nu'}C_{\mu,\nu}(a,b)E_\nu(b;z). \tag{3.19}$$

このとき, 接続行列 $(C_{\mu,\nu}(a,b))_{\mu,\nu\in Z_{s,n}}$ は, $\mu'=(\mu_1,\ldots,\mu_{s-1})$ の半順序に関して下三角であって, 全ての成分が因子化する.

4 q 差分 de Rham 理論の考え方

実トーラス $\mathbb{T}^n=\{|z_1|=\cdots=|z_n|=1\}$ 上の積分の場合を考える. $i=1,\ldots,n$ とし, $\Phi_i(z)$ を $(\mathbb{C}^*)^n$ のコンパクト集合

$$A_i=\{|q|\le|z_i|\le 1,\ |z_j|=1\ (1\le j\le n;\ j\neq i)\} \tag{4.1}$$

の近傍で正則な函数とすると, Cauchy の積分定理によって,

$$\int_{\mathbb{T}^n}T_{q,z_i}\Phi_i(z)\omega(z)=\int_{\mathbb{T}^n}\Phi_i(z)\omega(z)\quad 即ち\quad\int_{\mathbb{T}^n}(1-T_{q,z_i})(\Phi_i(z))\omega(z)=0 \tag{4.2}$$

が成立する. $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$ を $(\mathbb{C}^*)^n$ 上の有理型函数で $\mathbb{T}^n$ の近傍で正則なものとする. 各 $i=1,\ldots,n$ に対して, A_i の近傍で正則な函数 $\Phi_i(z)$ があって

$$\Psi_1(z)-\Psi_2(z)=\sum_{i=1}^{n}(1-T_{q,z_i})\Phi_i(z) \tag{4.3}$$

が成立するとき, $\Psi_1(z)\equiv\Psi_2(z)$ と書き表す. このときは, 両者の積分値は等しい:

$$\int_{\mathbb{T}^n}\Psi_1(z)\omega(z)=\int_{\mathbb{T}^n}\Psi_2(z)\omega(z). \tag{4.4}$$

この $\equiv$ に関する同値類が, q 差分 de Rham 理論の意味でのコホモロジー類である.

4.1 楕円 Selberg 積分の設定

n 次元代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の標準座標系 $z=(z_1,\ldots,z_n)$ に対して, $a=(a_1,\ldots.a_6)$ $(m=6)$ をパラメータとして, 積分

$$\begin{aligned} I(a)&=\int_{\mathbb{T}^n}\Phi(z;a)\omega(z),\quad \omega(z)=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\frac{dz_1\cdots dz_n}{z_1\cdots z_n},\\ \Phi(z;a)&=\prod_{i=1}^{n}\frac{\prod_{k=1}^{6}\Gamma(a_kz_i^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z_i^{\pm2};p,q)}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\Gamma(tz_i^{\pm1}z_j^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z_i^{\pm1}z_j^{\pm1};p,q)}\end{aligned} \tag{4.5}$$

を考える. 以下 $|t|<1$ と仮定する. このとき $I(a)$ は領域 $U=\big\{|a_k|<1\ (k=1,\ldots,6)\big\}\subset(\mathbb{C}^*)^6$ 上の正則函数を定める.

定理 4.1 $|p|<|t|^{2n-2}$ とし, 平衡条件 $a_1\cdots a_6t^{2n-2}=pq$ を仮定する. $|a_1|<1,\ldots,|a_5|<1$, $|a_6|<|q|$ のとき, 各 $k=1,\ldots,5$ に対して

$$I(a_1,\ldots,qa_k,\ldots,a_5,q^{-1}a_6)=I(a_1,\ldots,a_5,a_6)\prod_{i=1}^{n}\prod_{1\le l\le5;\,l\ne k}\frac{\theta(t^{i-1}a_la_k;p)}{\theta(q^{-1}t^{i-1}a_la_6;p)}. \tag{4.6}$$

$\Phi(z;a)$ の a_6 を pa_6 に置換えて

$$\begin{aligned} &K(a_1,\ldots,a_6)=I(a_1,\ldots,a_5,pa_6)\quad(a_1\cdots a_6t^{2n-2}=q),\\ &K(a)=\int_{\mathbb{T}^n}\Psi(z;a)\omega(z),\quad \Psi(z;a)=\Phi(z;a_1,\ldots,a_5,pa_6)\end{aligned} \tag{4.7}$$

を考える. $\Psi(z)=\Psi(z;a)$ は, a パラメータの q シフトに関しては次の方程式を満たす:

$$\begin{aligned} T_{q,a_k}\Psi(z)&=\prod_{i=1}^{n}\theta(a_kz_i^{\pm1};p)\,\Psi(z)\quad(k=1,\ldots,5);\\ T_{q,a_6}\Psi(z)&=a_6^{-2n}\prod_{i=1}^{n}\theta(a_6z_i^{\pm1};p)\,\Psi(z).\end{aligned} \tag{4.8}$$

今, (a_k, a_6) をパラメータにもつ補間函数 $E_{(r,n-r)}(a_k, a_6; z)$ $(r = 0, 1, \ldots, n)$ を考えると, 両端の $r = 0, n$ では因子化して

$$E_{(0,n)}(a_k, a_6; z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta(a_k z_i^{\pm 1}; p)}{\theta(a_k(t^{i-1}a_6)^{\pm 1}; p)}, \quad E_{(n,0)}(a_k, a_6; z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta(a_6 z_i^{\pm 1}; p)}{\theta(a_6(t^{i-1}a_k)^{\pm 1}; p)}. \tag{4.9}$$

となる. 従って

$$\begin{aligned} T_{q,a_k}\Psi(z) &= \prod_{i=1}^{n} \theta(a_k(t^{i-1}a_6)^{\pm 1}; p) E_{(0,n)}(a_k, a_6; z)\Psi(z), \\ T_{q,a_6}\Psi(z) &= a_6^{-2n} \prod_{i=1}^{n} \theta(a_6(t^{i-1}a_5)^{\pm 1}; p) E_{(n,0)}(a_k, a_6; z)\Psi(z) \end{aligned} \tag{4.10}$$

なので, q 差分方程式を得るには,

$$E_{(0,n)}(a_k, a_6; z)\Psi(z), \quad E_{(n,0)}(a_k, a_6; z)\Psi(z) \tag{4.11}$$

を q 差分 de Rham コホモロジー類として関連づければよい.

命題 4.2 $a_1 \cdots a_6 t^{2n-2} = 1$ の下で, $r = 1, \ldots, n$ に対して

$$\begin{aligned} &E_{(r,n-r)}(a_k, a_6; z)\Psi(z) \equiv -c_r E_{(r-1,n-r+1)}(a_k, a_6; z)\Psi(z), \\ &c_r = \frac{a_k^2 t^{2(r-1)} \theta(t^{n-r+1}, t^{-n+2r}a_k/a_6, t^{n-r+1}a_6/a_k; p)}{a_6^2 t^{2(n-r)} \theta(t^r, t^r a_k/a_6, t^{n-2r+2}a_6/a_k; p} \prod_{1 \le l \le 5;\, l \ne k} \frac{\theta(t^{n-r}a_l a_6; p)}{\theta(t^{r-1}a_l a_k; p)}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

命題の証明の概要: z 変数の q シフトに関しては

$$\begin{aligned} b_i^{\Psi}(z) &= \frac{T_{q,z_i}\Psi(z)}{\Psi(z)} \\ &= -\frac{(q^{-1}z_i^{-1})^2 \theta(q^{-1}z_i^{-2}; p)}{z_i^2 \theta(z_i^2; p)} \prod_{k=1}^{6} \frac{\theta(a_k z_i; p)}{\theta(q^{-1}a_k z_i^{-1}; p)} \\ &\quad \cdot \prod_{1 \le j \le n;\, j \ne i} \frac{\theta(t z_i z_j^{\pm 1}; p)\theta(q^{-1}z_i^{-1}z_j^{\pm 1}; p)}{\theta(z_i z_j^{\pm 1}; p)\theta(q^{-1}t z_i^{-1} z_j^{\pm 1}; p)} \end{aligned} \tag{4.13}$$

ここで,

$$F_i^{+}(z) = \frac{\prod_{k=1}^{6} \theta(a_k z_i; p)}{z_i^2 \theta(z_i^2; p)} \prod_{1 \le j \le n;\, j \ne i} \frac{\theta(t z_i z_j^{\pm 1}; p)}{\theta(z_i z_j^{\pm 1}; p)}, \quad F_i^{-}(z) = F_i^{+}(z^{-1}) \tag{4.14}$$

とおけば,

$$b_i^{\Psi}(z) = \frac{T_{q,z_i}\Psi(z)}{\Psi(z)} = -\frac{F_{+}(z)}{T_{q,z_i}F_i^{-}(z)}. \tag{4.15}$$

従って,

$$(1 - T_{q,z_i})\big(F_i^{-}(z)\Psi(z)\big) = \big(F_i^{-}(z) + F_i^{+}(z)\big)\Psi(z) \tag{4.16}$$

p シフトに関する擬周期性

$$T_{p,z_i}F_i^\varepsilon(z)=F_i^\varepsilon(z)(pz_i^2)^{-1};\quad T_{p,z_j}F_i^\varepsilon(z)=F_i^\varepsilon(z)\quad(1\le l\le n;\ j\ne i) \tag{4.17}$$

に注意して, 変数 $z_{\hat{i}}=(z_1,\dots,\widehat{z}_i,\dots,z_n)$ についての補間函数

$$E_{(r-1,n-r)}(a_k,a_6;z_{\hat{i}})\quad(r=1,\dots,n) \tag{4.18}$$

を補って

$$h_r(z)=\sum_{i=1}^n\big(F_i^-(z)+F_i^+(z)\big)E_{(r-1,n-r)}(a_k,a_6;z_{\hat{i}})\quad(r=1,\dots,n) \tag{4.19}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}h_r(z)\Psi(z)&=\sum_{i=1}^n\big(F_i^-(z)+F_i^+(z)\big)E_{(r-1,n-r)}(a_k,a_6;z_{\hat{i}})\Psi(z)\\&=\sum_{i=1}^n(1-T_{q,z_i})\big(F_i^-(z)E_{(r-1,n-r)}(a_k,a_6;z_{\hat{i}})\Psi(z)\big)\equiv 0.\end{aligned} \tag{4.20}$$

一方

補題 4.3 各 $r=1,\dots,n$ について, 上記の $h_r(z)$ は空間 $\mathcal{H}_{1,n}$ に属し, n 変数の補間函数 $E_{(i,n-i)}(a_k,a_6;z)$ によって次のように展開される:

$$h_r(z)=c_{r,r}E_{(r,n-r)}(a_k,a_6;z)+c_{r,r-1}E_{(r-1,n-r+1)}(a_k,a_6;z). \tag{4.21}$$

補題の前半の説明は省略する. 補間函数による展開は

$$h_r(z)=\sum_{i=0}^n c_{r,i}E_{(i,n-i)}(a_k,a_6;z);\quad c_{r,i}=h_r((a_k)_{t,i},(a_6)_{t,n-i}) \tag{4.22}$$

となる訳だが, $h_r(z)$ を具体的に追跡すると, $i=r,r-1$ の以外は係数が 0 となることが確認出来る. この 2 つの係数も

$$c_{r,r}=F_r^+((a_k)_{t,r},(a_6)_{t,n-r});\quad c_{r,r-1}=F_n^+((a_k)_{t,r-1},(a_6)_{t,n-r+1}) \tag{4.23}$$

として計算可能である. 命題の係数は $c_r=c_{r,r-1}/c_{r,r}$ である. □

上記の命題を繰り返し使うと,

$$\begin{aligned}&E_{(0,n)}(a_k,a_6;z)\Psi(z)\\&\equiv E_{(n,0)}(a_k,a_6;z)\Psi(z)\prod_{i=1}^n\left(\frac{a_6^3\theta(t^{i-1}a_k/a_6;p)}{a_k^3\theta(t^{i-1}a_6/a_k;p)}\prod_{1\le l\le 5;\,l\ne k}\frac{\theta(t^{i-1}a_ka_l;p)}{\theta(t^{i-1}a_6a_l;p)}\right).\end{aligned} \tag{4.24}$$

これから, $a_1\cdots a_6t^{2n-2}=1$ のもとで,

$$K(a_1,\dots,qa_k,\dots a_5,a_6)=K(a_1,\dots a_5,qa_6)\frac{a_6^{3n}}{a_k^n}\prod_{i=1}^n\prod_{1\le l\le 5;\,l\ne k}\frac{\theta(t^{i-1}a_ka_l;p)}{\theta(t^{i-1}a_6a_l;p)}. \tag{4.25}$$

これを $I(a_1,\dots,a_6)=K(a_1,\dots,a_5,p^{-1}a_6)$ で書直したものが, 定理の q 差分方程式である.

4.2 q 差分方程式の解

$a=(a_1,\dots,a_6)$ $(a_1\cdots,a_6t^{2n-2}=pq)$ をパラメータとする楕円 Selberg 積分

$$
\begin{aligned}
I_n(a)&=\int_{T^n}\Phi_n(z;a)\omega_n(z),\quad \omega_n(z)=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\frac{dz_1\cdots dz_n}{z_1\cdots z_n}\\
\Phi_n(z;a)&=\prod_{i=1}^{n}\frac{\prod_{k=1}^{6}\Gamma(a_kz_i^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z_i^{\pm2};p,q)}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\Gamma(tz_i^{\pm1}z_j^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z_i^{\pm1}z_j^{\pm1};p,q)}
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

が, q 差分方程式

$$
T_{q,a_k}T_{q,a_6}^{-1}I_n(a)=I_n(a)\prod_{i=1}^{n}\prod_{1\le l\le5;\,l\ne k}\frac{\theta(t^{i-1}a_la_k;p)}{\theta(q^{-1}t^{i-1}a_la_6;p)}\qquad(k=1,\dots,5)
\tag{4.27}
$$

を満たすことを q 差分 de Rham 理論の枠組みで示した. 一方, この方程式の解の一つが,

$$
J_n(a)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{1\le k<l\le6}\Gamma(t^{i-1}a_ka_l;p,q)
\tag{4.28}
$$

で与えられることは, 容易に確認できる. $I_n(a)$ の正則域を注意深く吟味すれば, ($|p|$ が $|q|$, $|t|$ に比べて十分小さいときには) a に依らない定数 $c_n\in\mathbb{C}$ によって, $I_n(a)$ が

$$
I_n(a)=c_nJ_n(a)
\tag{4.29}
$$

と表されることが分かる.

5 積分の特異性の解析

$m=6$ のときの楕円 Selberg 積分 $I(a)=I(a_1,\dots,a_6)$ $(a_1\cdots a_6t^{2n-2}=pq)$ の値については, a に依らない定数 c_n があって

$$
I_n(a)=c_nJ_n(a),\quad J_n(a)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{1\le k<l\le6}\Gamma(t^{i-1}a_ka_l;p,q)
\tag{5.1}
$$

と表される. この定数 c_n を決定するには, 積分 $I_n(a)$ の特異性 (極の因子とその周りの漸近挙動) を解析する必要がある. 以下では, 平衡条件を考慮して $(a_1,\dots,a_5)$ を独立変数にとり, $a_6=pq/a_1\cdots a_5t^{2n-2}$ は $(a_1,\dots,a_5)$ の函数と見なす. $I_n(a)$, $J_n(a)$ は何れも

$$
U_0=\left\{(a_1,\dots,a_5)\in(\mathbb{C}^*)^5\;\middle|\;|a_k|<1\ (k=1,\dots,5),\ \ |a_1\cdots a_5|>|pq|/|t|^{2n-2}\right\}
\tag{5.2}
$$

で正則であって, $|p|$ が十分小さいときには, $U_0\neq\phi$.

5.1 $J_n(a)$ の $a_2 \to a_1^{-1}$ での挙動

$J_n(a)$ は,

$$p^\mu q^\nu t^{i-1} a_k a_l = 1 \quad (1 \le k < l \le 6;\ i = 1, \ldots, n;\ \mu, \nu \in \mathbb{N}) \tag{5.3}$$

に沿って 1 位の極をもつ. 特に, $J_n(a)$ は因子

$$\Gamma(a_1 a_2; p, q) = \frac{(pq/a_1 a_2; p, q)_\infty}{(a_1 a_2; p, q)_\infty} \tag{5.4}$$

をもつので, 超曲面 $a_1 a_2 = 1$ に沿って 1 位の極をもつ. そこで, $a_2 \to a_1^{-1}$ の極限での, $J_n(a)$ の漸近挙動を調べると,

$$\begin{aligned} &\lim_{a_2 \to a_1^{-1}} (1 - a_1 a_2) J_n(a_1, \ldots, a_6) \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \Gamma(t^i; p, q)}{(p; p)_\infty (q; q)_\infty} \prod_{i=1}^{n} \prod_{m=3}^{6} \Gamma(a_1^{\pm 1} a_k t^{i-1}; p, q) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{3 \le j < k \le 6} \Gamma(a_j a_k t^{i-1}; p, q). \end{aligned} \tag{5.5}$$

5.2 $I_n(a)$ の $a_2 \to a_1^{-1}$ での挙動

被積分函数

$$\Phi_n(z) = \Phi_n(z; a) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\prod_{k=1}^{6} \Gamma(a_k z_i^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z_i^{\pm 2}; p, q)} \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\Gamma(t z_i^{\pm 1} z_j^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z_i^{\pm 1} z_j^{\pm 1}; p, q)} \tag{5.6}$$

を z_i の函数と見ると, $z_i = 0$ に集積する極の系列

$$p^\mu q^\nu a_k,\ p^\mu q^\nu t z_j^{\pm 1} \quad (\mu, \nu \in \mathbb{N}; k = 1, \ldots, 6; 1 \le j \le n, j \ne i) \tag{5.7}$$

と $z_i = \infty$ に集積する極の系列

$$p^{-\mu} q^{-\nu} a_k^{-1},\ p^{-\mu} q^{-\nu} t^{-1} z_j^{\pm 1} \quad (\mu, \nu \in \mathbb{N}; k = 1, \ldots, 6; 1 \le j \le n, j \ne i) \tag{5.8}$$

がある. 今 $|t| < |q|$, $|p| \ll 1$ とし, さらに

$$U_1: \quad |a_k| < |q|^{-\frac{1}{2}} \quad (k = 1, \ldots, 6); \quad a_k a_l \notin p^{-\mathbb{N}} q^{-\mathbb{N}} \quad (k, l = 1, \ldots, 6) \tag{5.9}$$

と仮定すると, 円環領域 $\left\{u \in \mathbb{C}^* \ \middle|\ |q|^{-\frac{1}{2}} \le |u| \le |q|^{\frac{1}{2}}\right\}$ 内の閉曲線 C であって, $\Phi(z)$ が $C^n = C \times \cdots \times C$ の近傍で正則, かつ, 各 $i = 1, \ldots, n$ について, $z_j \in C$ $(j \ne i)$ を固定して $\Phi_n(z)$ を z_i の函数と見たとき, 上記の 2 つの極の系列が C で分離されるようにできる. このとき, 積分 $I_n(a) = \displaystyle\int_{C^n} \Phi_n(z; a) \omega_n(z)$ は, U_0 から U_1 への解析接続を与える.

この設定で, $a_2 \to a_1^{-1}$ の極限を考えると, a_2 と a_1^{-1}, a_2^{-1} と a_1 の 2 組で, 積分路がピンチされ, 特異性が生じる. 今, z_1 での積分

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \Phi_n(z; a) \frac{dz_1}{z_1} \tag{5.10}$$

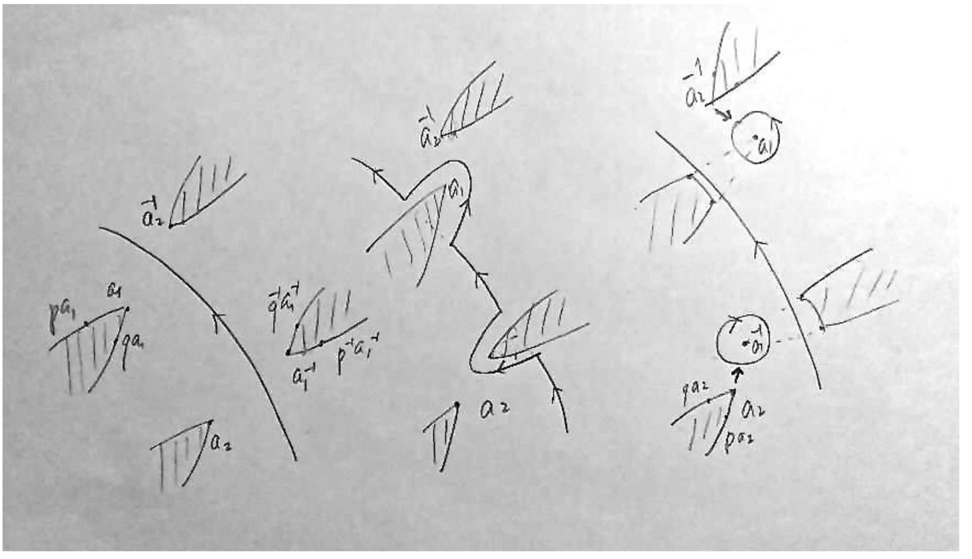

図 1　ピンチングの方法

を考え, $z_1 = a_1, a_1^{-1}$ での $\Phi(z;a)$ の留数を計算すると, $a_2 \to a_1^{-1}$ の極限について

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \Phi_n(z;a)\frac{dz_1}{z_1} \\
&= \frac{2\Gamma(a_2 a_1^{\pm 1};p,q)\prod_{k=3}^{6}\Gamma(a_k a_1^{\pm 1};p,q)}{(p;p)_\infty (q;q)_\infty \Gamma(a_1^{-2};p,q)}\widehat{\Phi}_{n-1}(z';a) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_0}\Phi_n(z;a)\frac{dz_1}{z_1}
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

$$
\widehat{\Phi}_{n-1}(z';a) = \prod_{j=2}^{n}\frac{\Gamma(ta_1^{\pm 1}z_j^{\pm 1}:p,q)}{\Gamma(a_1^{\pm 1}z_j^{\pm 1}:p,q)}\Phi_{n-1}(z';a), \quad z' = (z_2,\dots,z_n)
$$

となることが分かる. 第 1 項は $(1-a_1a_2)^{-1}$ で発散する項, 第 2 項は $a_2 \to a_1^{-1}$ のとき極限をもつ項である. 各 z_i で特異性を分離して多重積分を計算すると, $a_2 \to a_1^{-1}$ の極限で

$$
\begin{aligned}
&\int_{C^n}\Phi_n(z)\omega_n(z) \\
&= \frac{2n\Gamma(a_2 a_1^{\pm 1};p,q)\prod_{k=3}^{6}\Gamma(a_k a_1^{\pm 1};p,q)}{(p;p)_\infty (q;q)_\infty \Gamma(a_1^{-2};p,q)}\int_{C^{n-1}}\widehat{\Phi}_{n-1}(z';a)\omega_{n-1}(z') + \int_{C_0^n}\Phi_n(z;a)\omega_n(z)
\end{aligned} \tag{5.12}
$$

となる. 第 1 項が発散項, 第 2 項は有限な極限をもつ項である.

そこで

$$
\lim_{a_2\to a_1^{-1}}\widehat{\Phi}_{n-1}(z';a) = \Phi_{n-1}(z';ta_1,ta_1^{-1},a_3,\dots,a_6) \quad (a_6 = pq/a_3a_4a_5t^{2n-2}) \tag{5.13}
$$

に注意すると,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{a_2\to a_1^{-1}}(1-a_1a_2)I_n(a)=\lim_{a_2\to a_1^{-1}}(1-a_1a_2)\int_{C^n}\Phi_n(z;a)\omega_n(z)\\
&=\frac{2n\prod_{k=3}^{6}\Gamma(a_ka_1^{\pm1};p,q)}{(p;p)_\infty^2(q;q)_\infty^2}\int_{C^{n-1}}\Phi_{n-1}(z';ta_1,ta_1^{-1},a_3,\ldots,a_6)\omega_{n-1}(z') \qquad (5.14)\\
&=\frac{2n\prod_{k=3}^{6}\Gamma(a_ka_1^{\pm1};p,q)}{(p;p)_\infty^2(q;q)_\infty^2}I_{n-1}(ta_1,ta_1^{-1},a_3,\ldots,a_6).
\end{aligned}
$$

ここで, $I_n(a)=c_nJ_n(a)$ を代入すると

$$
c_n\lim_{a_2\to a_1^{-1}}(1-a_1a_2)J_n(a)=\frac{2n\prod_{k=3}^{6}\Gamma(a_ka_1^{\pm1};p,q)}{(p;p)_\infty^2(q;q)_\infty^2}c_{n-1}J_{n-1}(ta_1,ta_1^{-1},a_3,\ldots,a_6). \tag{5.15}
$$

$J_n(a)$ についての極限 $\lim_{a_2\to a_1^{-1}}(1-a_1a_2)J_n(a)$ は予め計算してあるので, それを代入すると, 定数 c_n に対して次の漸化式を得る:

$$
c_0=1;\quad c_n=c_{n-1}\frac{2n}{(p;p)_\infty(q;q)_\infty}\frac{\Gamma(t^n;p,q)}{\Gamma(t;p,q)}\quad (n=1,2,\ldots). \tag{5.16}
$$

この漸化式から

$$
c_n=\frac{2^nn!}{(p;p)_\infty^n(q;q)_\infty^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma(t^i;p,q)}{\Gamma(t;p,q)}\quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{5.17}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
I_n(a_1,\ldots,a_6)&=c_nJ_n(a_1,\ldots,a_6)\\
&=\left(\frac{2^nn!}{(p;p)_\infty^n(q;q)_\infty^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma(t^i;p,q)}{\Gamma(t;p,q)}\right)\cdot\prod_{i=1}^{n}\prod_{1\le k<l\le 6}\Gamma(t^{i-1}a_ka_l;p,q) \qquad (5.18)
\end{aligned}
$$

を得る. これは, 楕円 Selberg 積分 $(m=6)$ の積分公式 (2.9) に他ならない.

6 楕円超幾何積分の行列式 (BC 型)

6.1 設定

この節では, $m=2r+4$ $(r=1,2,\ldots)$ とする. $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_m)$ 及び t を一般のパラメータとして, n 変数の $z=(z_1,\ldots,z_n)$ の有理型函数

$$
\Phi(z;\boldsymbol{a})=\prod_{i=1}^{n}\frac{\prod_{k=1}^{m}\Gamma(a_kz_i^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z_i^{\pm2};p,q)}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\Gamma(tz_i^{\pm1}z_j^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z_i^{\pm1}z_j^{\pm1};p,q)} \tag{6.1}
$$

に対して, BC_n 型の楕円超幾何積分

$$
I(\boldsymbol{a})=\int_{C^n}\Phi(z;\boldsymbol{a})\omega(z),\quad \omega(z)=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\frac{dz_1\cdots dz_n}{z_1\cdots z_n} \tag{6.2}
$$

を考察する．サイクル C は，原点側に集積する極の列と無限遠側に集積する極を分離するようにとる．以下の議論では，p シフトに関する $r-1$ 次の擬周期性で定義した W_n 不変な正則函数の空間

$$\mathcal{H}^{(p)}_{r-1,n} = \left\{ f \in \mathcal{O}((\mathbb{C}^*)^n)^{W_n} \;\middle|\; T_{p,z_i} f(z) = f(z)(pz_i^2)^{-r+1} \quad (i=1,\dots,n) \right\} \tag{6.3}$$

が重要な役割を果たす．この $\mathbb{C}$ 線型空間の次元と多重指数の集合

$$Z_{r,n} = \left\{ \mu \in \mathbb{N}^r \;\middle|\; |\mu| = n \right\} \tag{6.4}$$

の濃度は等しく，$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^{(p)}_{r-1,n} = |Z_{r,n}| = \binom{n+r-1}{r-1}$ である．

6.2 積分の定める双線型形式

底 p, q に対して 2 つの $\mathbb{C}$ 線型空間 $\mathcal{H}^{(p)}_{r-1,n}$, $\mathcal{H}^{(q)}_{r-1,n}$ を考え，$\Phi(z) = \Phi(z;\boldsymbol{a})$ による積分を用いて双線型形式

$$\begin{aligned} &\langle \cdot,\cdot \rangle_\Phi :\ \mathcal{H}^{(p)}_{r-1,n} \times \mathcal{H}^{(q)}_{r-1,n} \to \mathbb{C} \\ &\langle \varphi(z), \psi(z) \rangle_\Phi = \int_{C^n} \varphi(z)\psi(z)\Phi(z)\omega(z) \quad (\varphi \in \mathcal{H}^{(p)}_{r-1,n},\ \psi \in \mathcal{H}^{(q)}_{r-1,n}) \end{aligned} \tag{6.5}$$

を定める．パラメータが平衡条件 $a_1 a_2 \cdots a_m t^{2n-2} = pq$ を満たすと仮定し，$\psi \in \mathcal{H}^{(q)}_{r-1,n}$ を任意に固定して，$\Psi(z) = \psi(z)\Phi(z)$ に関する積分

$$\langle \varphi(z) \rangle_\Psi = \langle \varphi(z), \psi(z) \rangle_\Phi = \int_{C^n} \varphi(z)\Psi(z)\omega(z) \tag{6.6}$$

を考えると，$\mathcal{H}^{(p)}_{r-1,n}$ は，W_n 不変な q 差分 de Rham コホモロジーのコサイクルの空間と見做すことができる (ここでは詳しい説明はしない)．そのコホモロジーの次元は

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^{(p)}_{r-1,n} = \binom{n+r-1}{r-1} \tag{6.7}$$

であって，特に $r=1$ の時は 1 次元，$r=2$ の時は $n+1$ 次元である．

そこで，$m = 2r+4$ 個のパラメータから r 個 $a = (a_1,\dots,a_r)$ を選び，参照点の族 $(a)_{t,\nu}$ $(\nu \in Z_{r,n})$ に関する $\mathcal{H}^{(p)}_{r-1,n}$, $\mathcal{H}^{(q)}_{r-1,n}$ の補間基底をそれぞれ

$$E_\mu(a;z;p), \quad E_\mu(a;z;q) \quad (\mu \in Z_{r,n}) \tag{6.8}$$

で表す．この p, q を底とする 2 種類の補間函数を用いて，積分

$$\begin{aligned} K_{\mu,\nu}(\boldsymbol{a}) &= \langle E_\mu(a;z;p), E_\nu(a;z;q) \rangle_\Phi \\ &= \int_{C^n} E_\mu(a;z;p) E_\nu(a;z;q) \Phi(\boldsymbol{a};z;p,q)\omega(z) \quad (\mu,\nu \in Z_{r,n}). \end{aligned} \tag{6.9}$$

を定義する．このとき，行列 $\boldsymbol{K}_{r,n}(\boldsymbol{a}) = \big(K_{\mu,\nu}(\boldsymbol{a})\big)_{\mu,\nu \in Z_{r,n}}$ は，双線型形式

$$\langle \cdot,\cdot \rangle_\Phi : \mathcal{H}^{(p)}_{r-1,n} \times \mathcal{H}^{(q)}_{r-1,n} \to \mathbb{C};\quad \langle \varphi(z), \psi(z) \rangle_\Phi = \int_{C^n} \varphi(z)\psi(z)\Phi(z)\omega(z) \tag{6.10}$$

を補間基底を用いて表現したものである．双線型形式の非退化性を保証するために，この行列の行列式を決定したい．今後，底 p を明示して，以下の記号を用いる：

$$e(u,v;p)=u^{-1}\theta(uv;p)\theta(u/v;p),\quad e(u,v;p)_{t,k}=\prod_{i=0}^{k-1}e(t^iu,v;p)\quad (k=0,1,2,\ldots). \tag{6.11}$$

定理 6.1 パラメータが平衡条件 $a_1\cdots a_m t^{2n-2}=pq$ を満たすと仮定する．このとき，行列 $K_{r,n}(\boldsymbol{a})$ の行列式は次で与えられる：

$$\det K_{r,n}(\boldsymbol{a})=c_{r,n}L_{r,n}(\boldsymbol{a}), \tag{6.12}$$

$$L_{r,n}(\boldsymbol{a})=\frac{\prod_{i=0}^{n-1}\prod_{1\le k<l\le m}\Gamma(t^ia_ka_l;p,q)^{\binom{n-i+r-2}{r-1}}}{\prod_{0\le i+j<n}\prod_{1\le k<l\le r}\left(e(t^ia_k,t^ja_l;p)e(t^ia_k,t^ja_l;q)\right)^{\binom{n-i-j+r-3}{r-2}}},$$

$$c_{r,n}=\left(\frac{2^nn!}{(p;p)_\infty^n(q;q)_\infty^n}\right)^{\binom{n+r-1}{r-1}}\frac{\prod_{i=1}^n\Gamma(t^i;p,q)^{r\binom{n-i+r-1}{r-1}}}{\Gamma(t;p,q)^{r\binom{n+r-1}{r}}}.$$

- **$r=1$ のとき** (1×1 行列の行列式．van Diejen–Spiridonov)

$$\det \boldsymbol{K}_{1,n}(\boldsymbol{a};p,q)=\frac{2^nn!}{(p;p)_\infty^n(q;q)_\infty^n}\frac{\prod_{i=1}^n\Gamma(t^i;p,q)}{\Gamma(t;p,q)^n}\prod_{i=0}^{n-1}\prod_{1\le k<l\le 6}\Gamma(t^ia_ka_l;p,q) \tag{6.13}$$

- **$r=2$ のとき** ($(n+1)\times(n+1)$ 行列の行列式)

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{K}_{2,n}(\boldsymbol{a};p,q)=&\left(\frac{2^nn!}{(p;p)_\infty^n(q;q)_\infty^n}\right)^{n+1}\frac{\prod_{i=1}^n\Gamma(t^i;p,q)^{2(n-i+1)}}{\Gamma(t;p,q)^{n(n+1)}}\\&\cdot\frac{\prod_{i=0}^{n-1}\prod_{1\le k<l\le 8}\Gamma(t^ia_ka_l;p,q)^{n-i}}{\prod_{0\le i+j<n}e(t^ia_1,t^ja_2;p)e(t^ia_1,t^ja_2;q)}.\end{aligned} \tag{6.14}$$

6.3 q 差分方程式系と解行列

平衡条件 $a_1a_2\cdots a_mt^{2n-2}=pq$ の下で，$\psi(z)\in\mathcal{H}_{r-1,n}^{(q)}$ で，パラメータ a の q シフトについては不変なものを任意に固定する：$T_{q,a_k}T_{q,a_l}^{-1}\psi(z)=\psi(z)$ $(1\le k<l\le m)$．このとき $\Psi(z)=\psi(z)\Phi(z)$ の積分の満たすべき q 差分方程式を記述することができる．

新しいパラメータ $u=(u_1,\ldots,u_{r-1})$ を導入して，各 $\mu\in Z_{r,n}$ に対して，積分

$$\begin{aligned}w_\mu&=\langle\varphi_\mu(z)\rangle_\Psi=\int_C\varphi_\mu(z)\Psi(z)\omega(z)\quad(\mu\in Z_{r,n})\\\varphi_\mu(z)&=E_\mu(a;z;p)F_\mu(a;u;p),\end{aligned} \tag{6.15}$$

を考える．このとき列ベクトル $\boldsymbol{w}=(w_\mu)_{\mu\in Z_{r,n}}$ は次の形の q 差分方程式系を満たす：

$$T_{q,a_k}T_{q,a_m}^{-1}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{A}^{k,m}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{w}\qquad(k=1,\ldots,m-1). \tag{6.16}$$

各係数行列 $\boldsymbol{A}^{k,m}(\boldsymbol{a})$ は, 補間函数の性質を用いて明示的に決定することが出来る. ここに $\boldsymbol{A}^{k,m}(\boldsymbol{a})$ の具体形を記すことはしないが, 因子化した成分を持つ 3 個の三角行列 (ある半順序に関して, 上三角または下三角) の積で表される. ($\boldsymbol{A}^{k,m}(\boldsymbol{a})$ の行列式の具体形は, 後述する.)

更に, 前項の積分 $K_{\mu,\nu}(\boldsymbol{a})$ を用いて

$$J_{\mu,\nu}(\boldsymbol{a}) = F_\mu(a;u;p)K_{\mu,\nu}(\boldsymbol{a})F_\nu(a;v;q) \tag{6.17}$$

を定義すると, 行列 $\boldsymbol{J}_{r,n}(\boldsymbol{a}) = (J_{\mu,\nu}(\boldsymbol{a}))_{\mu,\nu\in Z_{r,n}}$ は上記の q 差分方程式系の解行列となる.

- **$r \geq 3$ の場合:** 係数行列 $\boldsymbol{A}^{k,m}(\boldsymbol{a})$ の行列式を具体的に計算すると次のようになる.

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{A}^{k,m}(\boldsymbol{a}) = &\prod_{i=1}^{n}\prod_{l=1}^{r-1}\left(\frac{e(qa_k,u_l;p)_{t,i}}{e(a_k,u_l;p)_{t,i}}\right)^{\binom{n-i+r-2}{r-2}}\\ &\cdot\prod_{d=0}^{n}\prod_{i=1}^{d}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{r}\left(\frac{e(a_k,t^{d-i}a_j;p)_{t,i}}{e(qa_k,t^{d-i}a_j;p)_{t,i}}\right)^{\binom{n-d+r-3}{r-3}}\\ &\cdot\prod_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m-1}\left(\frac{\theta(a_ka_j;p)_{t,i}}{\theta(q^{-1}a_ma_j;p)_{t,i}}\right)^{\binom{n-i+r-2}{r-2}}\qquad (k=1,\ldots,r)\end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\det \boldsymbol{A}^{k,m}(\boldsymbol{a}) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m-1}\left(\frac{\theta(a_ka_j;p)_{t,i}}{\theta(q^{-1}a_ma_j;p)_{t,i}}\right)^{\binom{n-i+r-2}{r-2}}\qquad (k=r+1,\ldots,m-1) \tag{6.19}$$

$\boldsymbol{J}_{r,n}(\boldsymbol{a})$ は, p,u と q,v を入換える操作で不変なので, $\det \boldsymbol{J}_{r,n}(\boldsymbol{a})$ の満たすべき p 差分方程式系も同じ形式で表される. このことから, 解行列の行列式が $\boldsymbol{a}$ パラメータに依存しない比例定数 $c_{r,n}$ を除いて, 次のように決まる.

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{J}_{r,n}(\boldsymbol{a}) = c_{r,n}\,&\frac{\prod_{i=0}^{n-1}\prod_{k=1}^{r}\prod_{l=1}^{r-1}\left(e(t^ia_k,u_l;p)e(t^ia_k,v_l;q)\right)^{\binom{n-i+r-2}{r-1}}}{\prod_{0\leq i+j<n}\prod_{1\leq k<l\leq r}\left(e(t^ia_k,t^ja_l;p)e(t^ia_k,t^ja_l;q)\right)^{\binom{n-i-j+r-3}{r-2}}}\\ &\cdot\prod_{i=0}^{n-1}\prod_{1\leq k<l\leq m}\Gamma(t^ia_ka_l;p,q)^{\binom{n-i+r-2}{r-1}}.\end{aligned} \tag{6.20}$$

- **$r = 2$ の場合:**

$$\det \boldsymbol{A}^{k,8}(\boldsymbol{a}) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{e(a_k,t^{n-i}a_l;p)_{t,i}}{e(qa_k,t^{n-i}a_l;p)_{t,i}}\frac{e(qa_k,u;p)_{t,i}}{e(a_k,u;p)_{t,i}}\right)\prod_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{7}\frac{\theta(a_ka_j;p)_{t,i}}{\theta(q^{-1}a_8a_j;p)_{t,i}}\quad \{k,l\}=\{1,2\}. \tag{6.21}$$

$$\det \boldsymbol{A}^{k,8}(\boldsymbol{a}) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{7}\frac{\theta(a_ka_j;p)_{t,i}}{\theta(q^{-1}a_8a_j;p)_{t,i}}\quad (k=3,\ldots,7). \tag{6.22}$$

$$\det \boldsymbol{J}_{2,n}(\boldsymbol{a}) = c_{2,n} \frac{\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{2} e(a_k,u;p)_{t,i}e(a_k,v;q)_{t,i}}{\prod_{0\le i+j<n} e(t^i a_1,t^j a_2;p)e(t^i a_1,t^j a_2;q)} \prod_{i=0}^{n-1}\prod_{1\le k<l\le 8} \Gamma(t^i a_k a_l;p,q)^{n-i}. \tag{6.23}$$

• $r=1$ の場合:

$$A^{k,6}(\boldsymbol{a}) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{5} \frac{\theta(a_k a_j;p)_{t,n}}{\theta(q^{-1}a_6 a_j;p)_{t,n}} \quad (k=1,\dots,5). \tag{6.24}$$

$$\boldsymbol{J}_{1,n}(\boldsymbol{a}) = c_{1,n}\prod_{i=0}^{n-1}\prod_{1\le k<l\le 6}\Gamma(t^i a_k a_l;p,q) = c_{1,n}\prod_{1\le k<l\le 6}\frac{\Gamma(t^n a_k a_l;p,q,t)}{\Gamma(a_k a_l;p,q,t)}. \tag{6.25}$$

ここで, $\Gamma(z;p,q,t)=(z;p,q,t)_\infty(pqt/z;p,q,t)_\infty$, $(z;p,q,t)_\infty=\prod_{i,j,k=0}^{\infty}(1-p^i q^j t^k)$.

式 (6.20) の未知の定数 $c_{r,n}$ は, 第 5 節の議論と同様に, ピンチングの方法で積分の特異性を分析することによって決定することが出来て, 解行列の行列式 $\det \boldsymbol{J}_{r,n}(\boldsymbol{a})$ の明示公式が得られる. 特に $\det \boldsymbol{J}_{r,n}(\boldsymbol{a})\neq 0$ で, $\boldsymbol{J}_{r,n}(\boldsymbol{a})$ は q 差分方程式系 (6.16) の解の基本行列となる. $\det \boldsymbol{J}_{r,n}(\boldsymbol{a})$ の明示公式を $\det \boldsymbol{K}_{r,n}(\boldsymbol{a})$ に戻して記載したのが, 前掲の定理の行列式公式である.

この節に記した議論の詳細については, 現在論文を準備中である ([17]).　　(2017 年 2 月)

参考文献

[1] K. Aomoto: On elliptic product formulas for Jackson integrals associated with reduced root systems, J. Algebraic Combin. **8**(1998), 115–126.

[2] K. Aomoto and M. Ito: A determinant formula for a holonomic q-difference system associated with Jackson integrals of type BC_n, Adv. Math. **221**(2009), 1069–1114.

[3] R. Askey and J.A. Wilson: *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials*, Mem. Amer. Math. Soc. **54** (1985), iv+55 pp.

[4] I. Cherednik: Double affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures, Ann. Math. **141** (1995), 191–216.

[5] H. Coskun and R.A. Gustafson: Well-poised Macdonald functions W_λ and Jackson coefficients ω_λ on BC_n, *Jack, Hall-Littlewood and Macdonald polynomials*, pp. 127–155. Contemp. Math., vol. 417, Amer. Math. Soc., 2006.

[6] J.F. van Diejen: On certain multiple Bailey, Rogers and Dougall type summation formulas, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **33** (1997), 483–508.

[7] J.F. van Diejen and V.P. Spiridonov: An elliptic Macdonald-Morris conjecture and multiple modular hypergeometric sums, Math. Res. Letters **7** (2000), 729–746.

[8] I.B. Frenkel and V.G. Turaev: Elliptic solutions of the Yang–Baxter equation and modular hypergeometric functions, *The Arnold–Gelfand Mathematical Seminars*, pp.171–204, Birkhäuser, 1997.

[9] G. Gasper and M. Rahman: *Basic Hypergeometric Series*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **35**, Cambridge University Press, 1990, xx+287 pp.

[10] R.A. Gustafson: A generalization of Selberg's beta integral, Bull. Amer. Math. Soc. **22** (1990), 97–105.

[11] M. Ito: On a theta product formula for Jackson integrals associated with root systems of rank two, J. Math. Anal. Appl. **216**(1997), 122–163.

[12] M. Ito: q-Difference shift for a BC_n-type Jackson integral arising from 'elementary' symmetric polynomials, Adv. in Math. **204** (2006), 619–646.

[13] M. Ito and P.J. Forrester: A bilateral extension of q-Selberg integral, Trans. Amer. Math. Soc. **369**(2017), 2843–2878. (arXiv:1309.0001)

[14] M. Ito and M. Noumi: A generalization of the Sears–Slater transformation and elliptic Lagrange interpolation of type BC_n, Adv. in Math. **299** (2016), 361–380 (arXiv:1506.07267).

[15] M. Ito and M. Noumi: Derivation of a BC_n elliptic summation formula via the fundamental invariants, Constr. Approx. **45**(2017), 33–46. (arXiv:1504.07018).

[16] M. Ito and M. Noumi: Evaluation of the BC_n elliptic Selberg integral via the fundamental invariants, Proc. Amer. Math. Soc. **145**(2017), 689–703. (arXiv:1504.07317).

[17] M. Ito and M. Noumi: A determinant formula associated with the elliptic hypergeometric integrals of type BC_n (in preparation).

[18] I.G. Macdonald: *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Second Edition, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1995. x+475pp.

[19] I.G. Macdonald: *Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials*, Cambridge Tracts in Mathematics **157**, Cambridge University Press, 2003. x+175 pp.

[20] I.G. Macdonald: A formal identity for affine root systems, *Lie Groups and Symmetric Spaces*, 195–211, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **210**, Adv. Math. Sci., **54**, Amer. Math. Soc., 2003.

[21] B. Nassrallah and M. Rahman: Projection formulas, a reproducing kernel and a generating function for q-Wilson polynomials, SIAM J. Math. Anal. **15**(1984), 768–789.

[22] M. Noumi: Remarks on τ-functions for the difference Painlevé equations of type E_8, to appear in *Representation Theory, Special Functions and Painlevé Equations*, Adv. Stud. in Pure Math. (arXiv:1604.06869, 55 pages).

[23] M. Rahman: An integral representation of a ${}_{10}\phi_9$ and continuous bi-orthogonal ${}_{10}\phi_9$ rational functions, Canad. J. Math. **38** (1986), 605–618.

[24] E.M. Rains: Symmetries and recurrences of elliptic hypergeometric integrals, *Elliptic Integrable Systems* (M. Noumi and K. Takasaki, Eds.), pp. 183–199. Rokko Lectures in Mathematics **18**, Department of Mathematics, Kobe University, 2005.

[25] E.M. Rains: BC_n-Symmetric Abelian functions, Duke Math. J. **135** (2006), 99–180.

[26] E.M. Rains: Transformations of elliptic hypergeometric integrals, Ann. of Math. **171** (2010), 169–243.

[27] H. Rosengren: A proof of a multivariable elliptic summation formula conjectured by Warnaar, *q-Series with Applications to Combinatorics, Number Theory, and Physics* (Urbana, IL, 2000), pp. 193–202, Contemp. Math., **291**, Amer. Math. Soc., 2001.

[28] S.N.M. Ruijsenaars: First order analytic difference equations and integrable quantum systems, J. Math. Phys. **38** (1997), 1069–1146.

[29] V.P. Spiridonov: On the elliptic beta function, Russian Math. Surveys **56** (2001), 185–186.

[30] V.P. Spiridonov: Theta hypergeometric integrals, translated from Algebra i Analiz **15** (2003), 161–215. St. Petersburg Math. J. **15** (2004), 929–967.

[31] V.P. Spiridonov: Classical elliptic hypergeometric functions and their applications, *Elliptic Integrable Systems* (M. Noumi and K. Takasaki, Eds.), pp. 253–287. Rokko Lectures in Mathematics **18**, Department of Mathematics, Kobe University, 2005.

[32] S.O. Warnaar: Summation and transformation formulas for elliptic hypergeometric series. Constr. Approx. **18** (2002), 479–502.