

On Soliton Automata

By

辻本 諭*

Abstract

箱玉系の有限オートマトンによる表示について考察し、ソリトン・オートマトンに必要とされる性質について議論する。これにより、箱玉系と共通する性質を有するオートマトンを、状態数と文字数を限定した場合に網羅的に導出することが可能となる。特に、状態数3の $\{0, 1\}$ 文字列上の有限オートマトンから、運搬車容量2の箱玉系以外に2つのソリトン・オートマトンが得られることを示す。

§1. はじめに

高橋・薩摩の箱玉系とその運搬車ルールによる拡張 [1, 2] は、超離散可積分系の最も基本的なモデルの一つであり、可積分系の理論のみならず、組合せ論など様々な観点から研究されてきた [3, 4]。最近の研究においても、オートマタ群の観点を導入することで Lamplighter 群との関係などが議論されている [5]。本稿では、特に箱玉系の運搬車拡張が有限オートマトンによって記述できることに注目し、ソリトン・オートマトンに必要とされる条件について議論する。さらに、ここでの議論を用いることで、高橋・薩摩の箱玉系と共通する性質を有するオートマトンを探索する。

§2. 箱玉系のオートマトン表示

有限オートマトンの一つであるミーリ・オートマトン (mealy automaton) を導入し、箱玉系のオートマトン表示を与える。

定義 2.1. ミーリ・オートマトン \mathcal{A} は以下の4つ組 (Q, S, ϕ, ψ) で与えられる。

- 有限の状態集合 $Q = \{a_0, a_1, \dots, a_{\ell-1}\}$

2000 Mathematics Subject Classification(s):

*京都大学大学院情報学研究所

e-mail: tsujimoto.satoshi.5s@kyoto-u.jp

- 入力および出力文字集合 $S = \{0, 1, \dots, d-1\}$
- 状態遷移関数 $\phi: Q \times S \rightarrow Q$
- 出力関数 $\psi: Q \times S \rightarrow S$

このとき、 Q と S から得られるミューリ・オートマトンの全体を $M_{\ell, d}$ で表す。 $M_{\ell, d}$ に属するオートマトン総数は $(\ell d)^{\ell d}$ で与えられる。

オートマトン \mathcal{A} は、状態遷移図と呼ばれるラベル付き有向グラフを用いて表すことができる。このラベル付き有向グラフは、各状態を頂点に対応させ、状態 $q, r \in Q$ と入力文字 $i \in S$ との間で $\phi(q, i) = r$ が成り立つとき、状態 q から状態 r を向き付けられた辺で結び、この有向辺に入出力対応 $i | \psi(q, i)$ をラベル付けすることで得られる。

例 2.2 (2 状態オートマトン $\mathcal{A} = (Q, S, \phi, \psi)$ の例)。

$Q = \{a_0, a_1\}$, $S = \{0, 1\}$ とし、状態遷移関数 ϕ と出力関数 ψ をそれぞれ以下で定義する。

$$\begin{aligned} \phi(a_0, 0) &= a_0, \phi(a_0, 1) = a_1, \phi(a_1, 0) = a_0, \phi(a_1, 1) = a_1, \\ \psi(a_0, 0) &= 0, \psi(a_0, 1) = 0, \psi(a_1, 0) = 1, \psi(a_1, 1) = 1. \end{aligned}$$

このとき、対応する状態遷移図は図 1 で与えられる。

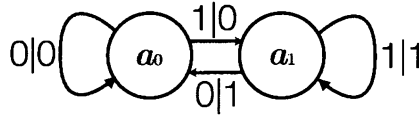


図 1. 例 2.2 の 2 状態オートマトン \mathcal{A} の状態遷移図

ここで定義したオートマトンに初期状態を付加することで、文字列への標準的な作用を定めることができる。文字集合 S から生成される文字列の集合 X_S を

$$X_S = \{(s_0, s_1, s_2, \dots) : s_i \in S\}.$$

で定義し、 S による有限の長さの文字列全体を S^* で表すことにする。このとき、任意の $q \in Q$ と $\bar{s} = (s_0, s_1, s_2, \dots) \in X_S$ に対して、 X_S 上の写像

$$A_q : X_S \rightarrow X_S$$

を

$$s'_i = \psi(q_i, s_i), \quad q_{i+1} = \phi(q_i, s_i) \quad (q_0 = q)$$

によつて、 $A_q(\bar{s}) = (s'_0, s'_1, \dots)$ と定める。これにより、任意の $\bar{q}^j = (q^0, \dots, q^j) \in Q^{j+1}$ から、時間発展が

$$A_{\bar{q}^j} = A_{q^j} \circ \dots \circ A_{q^0} : X_S \rightarrow X_S.$$

によって定まる。以降、文字列 $\bar{s} = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ を $s_0 s_1 s_2 \dots$ と表記することにする。
 例 2.2 のオートマトン A_{a_0} による時間発展の例

$$A_{a_0}(0001110010110000\dots) = 00001110010110000\dots$$

$$A_{a_0}^2(0001110010110000\dots) = 00000111001011000\dots$$

$$A_{a_0}^3(0001110010110000\dots) = 00000011100101100\dots$$

から、このオートマトンが平行移動を表すことが確認できる。箱玉系の運搬車拡張である運搬車容量 k の箱玉系を $BBS(k)$ で表すと、例 2.2 のオートマトンは運搬車容量 1 の箱玉系 $BBS(1)$ にほかならない。運搬車容量 k の箱玉系 $BBS(k)$ のオートマトン表示についても、図 2 によって与えられることが容易に確かめられる。

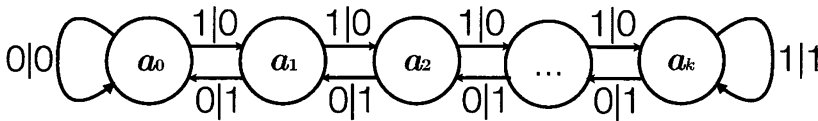


図 2. $BBS(k)$ を表す状態遷移図

ここで、高橋・薩摩の箱玉系は運搬車容量に制限の無い $BBS(\infty)$ に対応し、有限状態のミーリ・オートマトンではなく、無限状態のミーリ・オートマトンあるいはプッシュダウン・オートマトンによって表されることを注意しておく。

§ 3. ソリトン・オートマトンの探索

本節では、箱玉系のもつ幾つかの性質に注目し、予め指定した状態集合 Q と文字集合 S から得られるミーリ・オートマトンの集合 $M_{|Q|, |S|}$ の中から、箱玉系と共通する性質をもつオートマトンを網羅的に見いだしていく。図 2 のオートマトン $BBS(k)$ は、「強連結グラフ」、「粒子数保存」、「時間反転可能」、「局所相互作用」、「ソリトン性」など様々な顕著な性質を持っているが、本稿では粒子性・全単射性・局所相互作用の性質に注目することにする。以下、文字集合を $S = \{0, 1\}$ に限定し、次の 3 つの性質を持つオートマトンを LBP オートマトンと呼ぶ。

1. 粒子性 (particle preserving). 時間発展で文字 1 の数が不変。
2. 全単射性 (bijective). $(\psi, \varphi) : Q \times S \rightarrow S \times Q$ が全単射。
3. 局所相互作用 (local interaction). 有限回のオートマトンの作用において、任意の有限の長さの文字列 u および v が十分な長さのゼロ列で離れていれば u と v の間に相互作用が生じない。すなわち、文字列 u の長さ $\text{length}(u)$ および文字列の 1 シフト

$\sigma : X_s \rightarrow X_s; s_0 s_1 s_2 \cdots \mapsto s_1 s_2 \cdots$ を用いれば,

$$\sigma^{\text{length}(u)+r}(\mathcal{A}_q(u0^r v0^{\mathbb{N}})) = \mathcal{A}_q(v0^{\mathbb{N}}) \quad (\forall u, v \in S^*)$$

を満足する $r \in \mathbb{N}$ が存在する.

各 $M_{k+1,2}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) に運搬車容量 k の箱玉系が属していることを考慮にいれ、本稿では特に $M_{1,2}, M_{2,2}, M_{3,2}$ を取り上げ、上記の箱玉系と共通する性質を持つオートマトンを探すことにする。ここで、 $M_{k+1,2}$ には $(2k+2)^{2k+2}$ 個のオートマトンが属しているが、その状態遷移図が非連結 (非連結なオートマトン) の場合はより状態数の少ないオートマトンに分離できるなど、考慮すべきオートマトンの数を絞ることができる。

定義 3.1. 任意の $\bar{s} \in X_s$ に対して $\mathcal{A}_q(\bar{s}) = \mathcal{A}'_q(\bar{s})$ が成り立つ時、 \mathcal{A}'_q は \mathcal{A}_q と等価なオートマトンという。

本稿であつかうミリー・オートマトンは決定性オートマトンであり、等価な状態の併合によって最小の状態数の等価なオートマトンが得られる。この事実を用い、任意の $\bar{s} \in X_s$ に対して相異なる $q_i, q_j \in Q$ が $\mathcal{A}_{q_i}(\bar{s}) = \mathcal{A}_{q_j}(\bar{s})$ を満たす時、 Q から q_j を取り除き、任意の相異なる状態 $q'_i, q'_j \in Q$ に対して $\mathcal{A}_{q'_i}(\bar{s}) \neq \mathcal{A}_{q'_j}(\bar{s})$ となる $\bar{s} \in S$ が存在するまで続ける。この手続きで得られる最小状態数のオートマトンを既約なオートマトンと呼ぶ。また、状態集合 Q および文字集合 S のそれぞれにおいて置換で移りあうオートマトンを同型のオートマトンと呼ぶことにする。

命題 3.2. $Q = \{a_0, a_1, a_2\}$ および $S = \{0, 1\}$ から得られる連結かつ既約な LBP オートマトンは、以下のいずれかのオートマトンと同型になる。ここで、BBS-V(2) と BBS-S(2) はそれぞれ図 3 および図 4 によって定まるオートマトンを表す。

- 恒等写像 $\text{BBS}(0) \in M_{1,2}$
- 平行移動 $\text{BBS}(1) \in M_{2,2}$
- $\text{BBS}(2), \text{BBS-V}(2), \text{BBS-S}(2) \in M_{3,2}$

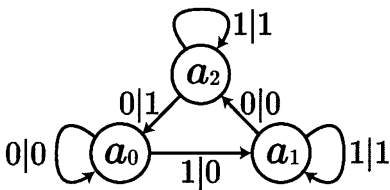


図 3. BBS-V(2) の状態遷移図

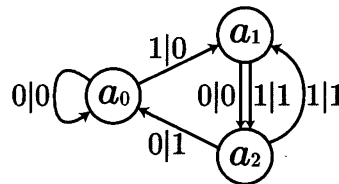


図 4. BBS-S(2) の状態遷移図

ここで現れる $\text{BBS}(0)$ および $\text{BBS}(1)$ の各時間発展は自明なものであるが、 $\text{BBS}(2)$ は運搬車容量 2 の箱玉系となるソリトン系であり、速度 1 のソリトンと速度 2 のソリトン

の間の非線形な相互作用を記述する。さらに、BBS-V(2) および BBS-S(2) は高橋・薩摩の箱玉系と共通する性質を持つオートマトンであり、高橋・薩摩による移動ルールを少し変更した以下のような箱玉系が得られる。

BBS-S(2) : 一つ飛ばしルールの箱玉系

容量 1 の運搬車を考え、運搬車を左端から出発させ、以下のルールに従い左から右に移動させる。運搬車に玉を載せておらず、運搬車の右側に玉が入っている箱がなくなった時点で、一回の時間発展を終えることにする。

1. 空の運搬車については、玉の入っている箱の位置まで右に一つずつ移動させる。玉の入っている箱の所まで移動した時、玉を運搬車に運び入れ次の手続き 2 に従う。
2. 玉を載せている運搬車については、移動先に空きが見つかるまで、一つ飛ばして運搬車の位置を移動させる。移動先が空箱の場合に玉を箱におろし、手続き 1 に戻る。

上記のルールに従う箱玉系を「一つ飛ばしルールの箱玉系」と呼ぶ。第 1 列を初期列とした一つ飛ばしルールの箱玉系による時間発展の例を次に挙げる。

```
[000000000001000100000111100001000000000000000000000000000000000000000000000000]
[000000000000001000100001111000001000000000000000000000000000000000000000000000]
[000000000000000010001000111100000010000000000000000000000000000000000000000000]
[000000000000000000100010011110000000100000000000000000000000000000000000000000]
[000000000000000000001000101111000000010000000000000000000000000000000000000000]
[000000000000000000000010001111100000000100000000000000000000000000000000000000]
[000000000000000000000000101111010000000010000000000000000000000000000000000000]
[000000000000000000000000000111110001000000001000000000000000000000000000000000]
[000000000000000000000000000001111010001000000001000000000000000000000000000000]
[000000000000000000000000000000011110010001000000001000000000000000000000000000]
[000000000000000000000000000000000111100010001000000001000000000000000000000000]
[000000000000000000000000000000000011110001000100000000100000000000000000000000]
[000000000000000000000000000000000001111000010001000000001000000000000000000000]
[000000000000000000000000000000000000111100000100010000000010000000000000000000]
[000000000000000000000000000000000000011110000001000100000000100000000000000000]
[0000000000000000000000000000000000000011110000000100010000000010000000000000000]
```

この系は、速度 2 で移動する文字列 “.010.” と速度 1 で移動する文字列 “.0(11)ⁿ0...” の相互作用を記述するソリトン・オートマトンであり、相互作用の前後でその形を変えないことを示すことができる [6].

BBS-V(2) : 2 番目空箱ルールの箱玉系

BBS-S(2) のルールにおいて、玉を載せている運搬車が従う手続き 2 を以下のものに置き換えたルールに従う箱玉系を「2 番目空箱ルールの箱玉系」と呼ぶ。

2. 玉を載せている運搬車については、玉を載せた箱から右方に向かって 2 番目の空箱の位置まで運搬車を移動させる。移動後は空き箱に玉をおろし、手続き 1 に戻る。

第 1 列を初期列とした 2 番目空箱ルールの箱玉系による時間発展の例を次に挙げる.

```
[00001000111000000011000000010000010000000000000000000000000000000000]
[00000010011010000010100000001000001000000000000000000000000000000000]
[00000000101011000000110000000010000010000000000000000000000000000000]
[00000000001101010000010100000000100000100000000000000000000000000000]
[00000000000101100100000110000000001000001000000000000000000000000000]
[00000000000011100010000101000000001000001000000000000000000000000000]
[00000000000001101000100001100000000010000010000000000000000000000000]
[00000000000000010110000100010100000000010000010000000000000000000000]
[00000000000000000110100000100101000000000010000010000000000000000000]
[00000000000000000001011000000100110000000000010000010000000000000000]
[00000000000000000000011000000010101000000000001000001000000000000000]
[00000000000000000000000110000000101010000000000010000010000000000000]
[00000000000000000000000001101000000110010000000000010000010000001]
[0000000000000000000000000001011000000010100100000000000100000]
[00000000000000000000000000000111000000011000100000000000100]
```

この系では、文字列 “.01ⁿ0.” は平均速度 $(n+1)/n$ で移動し、例えば $n=3$ の時、

↪ 1110000 ↪ 0110100 ↪ 0010110 ↪ 0000111 ↪

と時間発展周期 3 で元の文字列が平行移動していることがわかる。さらに、相互作用の前後でその形を変えないことを示すことができ、BBS-V(2) もソリトン・オートマトンとなる。ここで、由良によるシーケンシャル・オートマトンによる先行研究 [7] があり、BBS-V(2) と等価な系と超離散 Lotka-Volterra 方程式との対応関係が明らかにされていることを注意しておく。

以上の通り、文字集合 $S = \{0, 1\}$ の状態数 3 のミーリ・オートマトンに属する連結かつ既約な LBP オートマトンは BBS(2), BBS-S(2), BBS-V(2) のみであり、その全てがソリトン・オートマトンであることが示せる。状態数 4 以上の場合、既約な LBP オートマトンが必ずしもソリトン・オートマトンになるとは限らないが、その振舞いを調べることでソリトン・オートマトンの候補となるオートマトンを見いだすことができる。例えば、計算機も用いることで

- $M_{4,2}$ に 7 つのソリトン・オートマトンの候補が存在する
- $M_{5,2}$ に 14 のソリトン・オートマトンの候補が存在する
- $M_{6,2}$ に 15 のソリトン・オートマトンの候補が存在する

などが示され、候補の幾つかはソリトン・オートマトンとなることが既に確かめられている。ここで見出されたソリトン・オートマトンの候補に対しては、離散可積分系との関係も含め様々な観点からの解析が必要であり、今後の課題としたい。

参考文献

- [1] D. TAKAHASHI AND J. SATSUMA, *A soliton cellular automaton*, J. Phys. Soc. Japan **59**, pp. 3514–3519 (1990).
- [2] D. TAKAHASHI AND J. MATSUKIDAIRA, *Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation*, J. Phys. A: Math. Gen., **30**, pp. 733–739 (1997).
- [3] 時弘 哲治, 箱玉系の数理, 朝倉書店, 2010.
- [4] 国場敦夫, ベーテ仮説と組合せ論, 朝倉書店, 2011.
- [5] T. KATO, S. TSUJIMOTO, A. ZUK, *Spectral analysis of transition operators, Automata groups and translation in BBS*, Comm. Math. Phys. **350**, pp.205-229 (2017).
- [6] 辻本 諭, 新しい箱玉系のルールとその解析, 応用力学研究所研究集会報告 **28AO-S6**, pp.13–18 (2017).
- [7] 由良 文孝, シーケンシャルオートマトンと可積分系, 数理解析研究所講究録 **1473**, pp. 21–40 (2006).