

平面分割の積公式と離散二次元戸田分子

京都大学大学院情報学研究科
上岡修平

Shuhei Kamioka
Graduate School of Informatics,
Kyoto University

1 平面分割の積公式

非負整数の配列 $\pi = (\pi_{i,j})_{i,j \geq 1}$ で次の条件を満たすものを平面分割 (plane partition) という.

- (a) π は各行, 各列に関して広義単調減少である. すなわち任意の $i, j \geq 1$ に対して $\pi_{i,j} \geq \pi_{i+1,j}$ かつ $\pi_{i,j} \geq \pi_{i,j+1}$ を満たす.
- (b) π は有限サポートである. すなわち有限個の (i, j) を除いて $\pi_{i,j} = 0$ である.

平面分割 π は, 第 m 行に非零成分を持ち, かつそれ以降の行がすべて零であるとき, m 行の平面分割という. 同様に第 n 列に非零成分を持ち, かつそれ以降の列がすべて零であるとき, n 列の平面分割という. 平面分割 π の成分の総和

$$|\pi| := \sum_{i,j \geq 1} \pi_{i,j} \tag{1}$$

を π の大きさという. 例えば配列

$$\pi = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & \dots \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \tag{2}$$

は 4 行 5 列で大きさ $|\pi| = 37$ の平面分割である.

平面分割は通常の (整数) 分割の 2 次元拡張である. 分割をヤング図形で表すように, 平面分割は 3 次元ヤング図形で表す. ただし平面分割 π の 3 次元ヤング図形とは, 各座標 (i, j) に $\pi_{i,j}$ 個の箱を縦に積み上げて得られる立体図形である. 例えば (2) の平面分割の 3 次元ヤング図形を描くと図 1 のようになる.

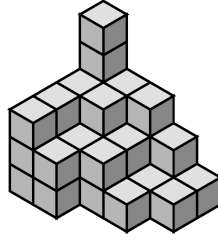


図1 (2)の平面分割の3次元ヤング図形.

高々 a 行 b 列の平面分割の全体を $PP(a, b)$ と書く. また高々 a 行 b 列の平面分割ですべての成分が c 以下のものの全体を $PP(a, b, c)$ と書く. 例えば (2) の平面分割は, 任意の $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 5$ に対して $PP(a, b)$ と $PP(a, b, c)$ に属する. $PP(a, b, c)$ は大きさ $a \times b \times c$ の直方体に収まる3次元ヤング図形の全体とも見なせる. 平面分割を導入した MacMahon は次の積表示を持つ母関数を発見した.

定理 1 (MacMahon [8]). 任意の $a, b, c \geq 0$ に対して

$$\sum_{\pi \in PP(a, b, c)} q^{|\pi|} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}} \quad (3)$$

が成り立つ.

MacMahon の母関数 (3) は $c = 1$ のとき分割の母関数 (q -二項係数)

$$\sum_{\lambda \subset (b^a)} q^{|\lambda|} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \frac{1 - q^{i+j}}{1 - q^{i+j-1}} = \prod_{i=1}^a \frac{1 - q^{b+i}}{1 - q^i} = \left[\begin{matrix} a+b \\ a \end{matrix} \right]_q \quad (4)$$

に帰着する. ただし左辺は, ヤング図形が $a \times b$ の長方形に収まるような分割に関する和である. さらに $a, b \rightarrow \infty$ とすれば, すべての分割に対する母関数

$$\sum_{\lambda} q^{|\lambda|} = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^i)^{-1}$$

が得られる. 母関数の観点からも, 平面分割は分割のよい一般化になっている.

平面分割の大きさ $|\pi|$ と並ぶ重要な統計量に, 平面分割のトレースがある. その定義は行列のトレースと同じであり, 主対角成分の総和

$$\text{tr}(\pi) = \sum_{i \geq 1} \pi_{i,i} \quad (5)$$

により与えられる. 平面分割のトレースを導入した Stanley は次の積表示を持つ母関数を発見した.

定理 2 (Stanley [9]). 任意の $a, b \geq 0$ に対して

$$\sum_{\pi \in \text{PP}(a,b)} y^{\text{tr}(\pi)} q^{|\pi|} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b (1 - yq^{i+j-1})^{-1} \quad (6)$$

が成り立つ.

Stanley のトレース母関数 (6) は平面分割の成分に上界を持たないので, MacMahon の母関数 (3) の一般化ではない. 特に (3) の左辺は多項式であるのに対し, (6) の左辺は無数個の単項式の形式和 (形式的べき級数) である. また MacMahon の母関数 (3) にトレース項 $y^{\text{tr}(\pi)}$ を挿入した $\sum_{\pi \in \text{PP}(a,b,c)} y^{\text{tr}(\pi)} q^{|\pi|}$ は積表示を持たないため, トレース母関数 (6) の一般化とは言い難い.

本稿では, 可積分系のひとつである離散 2 次元戸田分子を組み合わせ論的な視点から調べることで, 平面分割との間に直接的なつながりがあることを見る. 結果として, 積表示を持つ平面分割の母関数や分配関数が, 離散 2 次元戸田分子の解から導出可能であることを示す. 特に離散 2 次元戸田分子の特殊解から, MacMahon の母関数 (3) と Stanley のトレース母関数 (6) を同時に含むような分配関数を導く.

平面分割には, ここで扱う以外にもさまざまな積表示を持つ母関数が存在する. これに関しては Krattenthaler による解説論文 [7] などを参照して欲しい.

2 離散 2 次元戸田分子

離散 2 次元戸田分子は, 戸田格子の離散類似のひとつである [4]. 離散 2 次元戸田分子とその行列式解について簡単に復習する.

離散 2 次元戸田分子の発展方程式は

$$a_n^{(s,t+1)} + b_n^{(s+1,t)} = a_n^{(s,t)} + b_{n+1}^{(s,t)}, \quad (7a)$$

$$a_n^{(s,t+1)} b_{n+1}^{(s+1,t)} = a_{n+1}^{(s,t)} b_{n+1}^{(s,t)}, \quad (7b)$$

$$n \geq 0, \quad b_0^{(s,t)} = 0 \quad (7c)$$

である. ただし s, t は整数値, n は非負整数値をとる離散独立変数である. 従属変数変換

$$a_n^{(s,t)} = \frac{\tau_{n+1}^{(s+1,t)} \tau_n^{(s,t)}}{\tau_n^{(s+1,t)} \tau_{n+1}^{(s,t)}}, \quad b_n^{(s,t)} = \frac{\tau_{n-1}^{(s,t+1)} \tau_{n+1}^{(s,t)}}{\tau_n^{(s,t+1)} \tau_n^{(s,t)}} \quad (8)$$

により導入されるタウ関数 $\tau_n^{(s,t)}$ は双線形方程式

$$\tau_{n+1}^{(s,t)} \tau_{n-1}^{(s+1,t+1)} - \tau_n^{(s,t)} \tau_n^{(s+1,t+1)} + \tau_n^{(s+1,t)} \tau_n^{(s,t+1)} = 0, \quad (9a)$$

$$n \geq 1, \quad \tau_0^{(s,t)} = 1 \quad (9b)$$

を満たす. 双線形方程式 (9) は次の行列式解を持つ. 任意の行列 $F = (f_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ に対して

$$\tau_n^{(s,t)} = \det_{0 \leq i,j < n} (f_{s+i,t+j}) = \begin{vmatrix} f_{s,t} & \cdots & f_{s,t+j} & \cdots & f_{s,t+n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{s+i,t} & \cdots & f_{s+i,t+j} & \cdots & f_{s+i,t+n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{s+n-1,t} & \cdots & f_{s+n-1,t+j} & \cdots & f_{s+n-1,t+n-1} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

行列式 (10) が双線形方程式 (9) を満たすことは, 行列式の恒等式のひとつである Jacobi の恒等式から確かめられる.

行列式 (10) が常に非零ならば, (10) を変換式 (8) に代入して得られる $a_n^{(s,t)}$, $b_n^{(s,t)}$ は離散 2 次元戸田分子 (7) の非零解になる. 逆に離散 2 次元戸田分子 (7) の任意の非零解 $a_n^{(s,t)}$, $b_n^{(s,t)}$ に対して, 行列 $F = (f_{i,j})$ が存在して, 行列式のタウ関数 (10) は変換式 (8) を満たす. このとき行列 $F = (f_{i,j})$ は, 成分の変形 $f_{i,j} \rightarrow \varphi_j f_{i,j}$ を除いて一意に定まる. このため以下では任意の j に対して

$$f_{0,j} = 1 \quad (11)$$

を仮定する.

3 格子路の組合せ論

平面分割の解析における基本的な道具のひとつに非交叉格子路がある. 格子路の住処として次のような枝重み付きの格子状のグラフを考える. グラフ L を節点集合

$$V(L) = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2; i \geq 0, j \geq 0\} \quad (12)$$

と枝集合

$$E(L) = \{((i+1,j), (i,j)), ((i,j), (i,j+1)); i \geq 0, j \geq 0\} \quad (13)$$

により定める. 離散 2 次元戸田分子 (7) の解 $a_n^{(s,t)}$, $b_n^{(s,t)}$ をひとつ固定して, 枝重み w を

$$w(((i+1,j), (i,j))) = \begin{cases} a_j^{(i-j,0)}, & i \geq j; \\ b_{i+1}^{(0,j-i-1)}, & i < j, \end{cases} \quad (14a)$$

$$w(((i,j), (i,j+1))) = 1 \quad (14b)$$

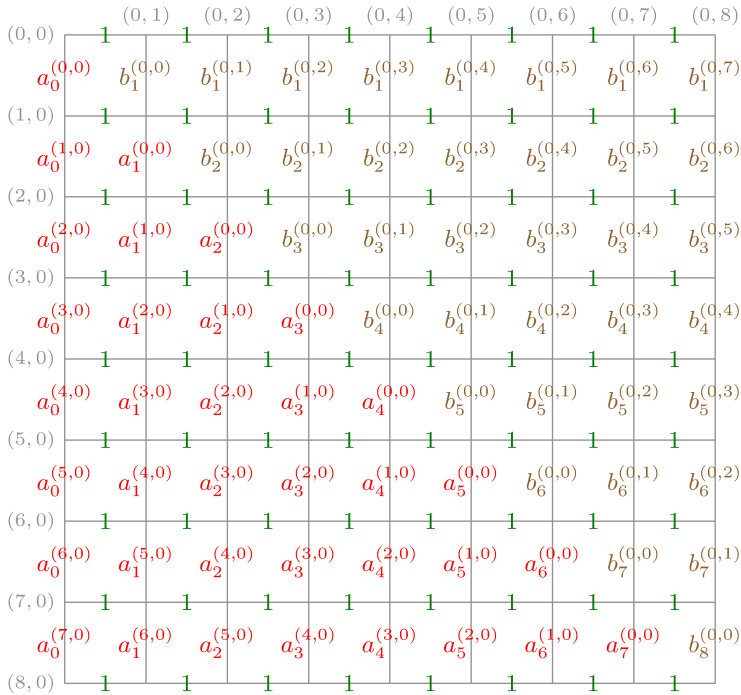


図2 グラフ L と枝重み.

により定める. 図2に格子グラフ L と枝重みの様子を示す. 図2では L の左端と上端にある節点のみ $(1,0)$ などの節点名を付けている. L の節点は行列風の座標に従って配置していることに注意する.

L 上の径路 P で次の条件を満たすものを格子路とよぶ.

- (a) P の始点と終点はそれぞれ $((0,0)$ を含む) L の左端と上端にある.
- (b) P は L 上を上ステップ $(-1,0)$ と右ステップ $(0,1)$ のみで進む.

図3に格子路の例を示す. 格子路 P の重み $w(P)$ を

$$w(P) = \prod_{e \in E(P)} w(e) \quad (15)$$

により定める. すなわち $w(P)$ は P の通る L の枝の重みの積である. 例えば図3の格子路を P とおくと $w(P) = a_1^{(3,0)} a_3^{(0,0)} b_3^{(0,0)} b_2^{(0,2)} b_1^{(0,4)}$ である.

$(i,0)$ を始点, $(0,j)$ を終点とする格子路は $\binom{i+j}{i}$ 本存在する. そのすべての重み和を

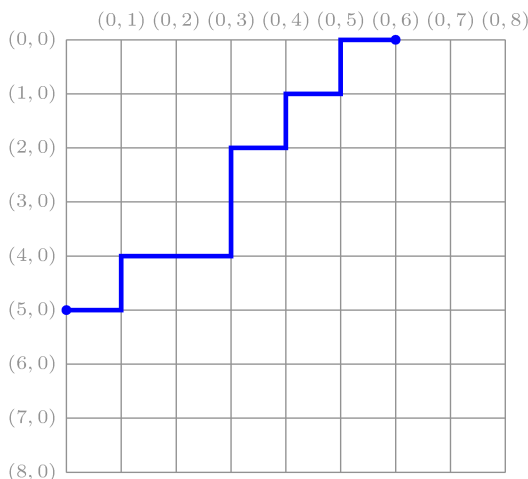


図3 (5, 0) を始点, (0, 6) を終点とする格子路.

$g(i; j)$ と書く. すなわち

$$g(i; j) = \sum_{P:(i, 0)-(0, j)} w(P). \quad (16)$$

右辺は $(i, 0)$ を始点, $(0, j)$ を終点とする格子路 P すべてにわたる和である. 例えば $(1, 0)$ を始点, $(0, 1)$ を終点とする格子路は「上右」「右上」の 2 本のみなので, それぞれの重みを足し合わせて

$$g(1; 1) = a_0^{(0,0)} + b_1^{(0,0)} \quad (17)$$

を得る.

離散 2 次元戸田分子の組合せ論的解釈の基礎となるのは次の定理である.

定理 3. $a_n^{(s,t)}$, $b_n^{(s,t)}$ を離散 2 次元戸田分子 (7) の非零解とする. また行列 $F = (f_{i,j})$ は, 変換式 (8) と行列式のタウ関数 (10) を通して同じ解を実現するものとする. このとき任意の $i, j \geq 0$ に対して

$$f_{i,j} = g(i; j) \quad (18)$$

が成り立つ.

証明. 実は方程式 (7) を格子路を用いて解釈することにより

$$g(i; j) = \prod_{k=0}^{i-1} a_0^{(k,j)} \quad (19)$$

を示すことができる [5, proofs of Theorem 2 and Lemma 3]. これと変換式 (8) と行列式のタウ関数 (10) より

$$g(i; j) = \prod_{k=0}^{i-1} a_0^{(k,j)} = \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\tau_1^{(k+1,j)}}{\tau_1^{(k,j)}} = \frac{\tau_1^{(i,j)}}{\tau_1^{(0,j)}} = \frac{f_{i,j}}{f_{0,j}} = f_{i,j} \quad (20)$$

を得る. □

相異なる n 個の非負整数

$$i_1 > \cdots > i_n \geq 0, \quad j_1 > \cdots > j_n \geq 0 \quad (21)$$

に対して, 格子路の n 本組 (P_1, \dots, P_n) で次の条件を満たすものを考える.

- (a) P_k は $(i_k, 0)$ を始点, $(0, j_k)$ を終点とする.
- (b) P_1, \dots, P_n は非交差的 (non-intersecting; non-crossing) である. すなわち任意の $k \neq \ell$ に対して P_k と P_ℓ は同じ節点を通らない.

そのような格子路の組 (P_1, \dots, P_n) のすべてに対する重み和を $g(i_1, \dots, i_n; j_1, \dots, j_n)$ と書く. すなわち

$$g(i_1, \dots, i_n; j_1, \dots, j_n) = \sum_{(P_1, \dots, P_n)} \prod_{k=1}^n w(P_k). \quad (22)$$

右辺は上記 (a), (b) を満たす格子路の n 本組 (P_1, \dots, P_n) のすべてにわたる和である.

定理 3 から次の系を得る.

系 4. 定理 3 と同じ仮定の下で, 任意の $0 \leq i_1 < \cdots < i_n, 0 \leq j_1 < \cdots < j_n$ に対して

$$\det_{0 \leq k, \ell < n} (f_{i_k, j_\ell}) = g(i_1, \dots, i_n; j_1, \dots, j_n) \quad (23)$$

が成り立つ. 特に任意の $s, t, n \geq 0$ に対して

$$\tau_n^{(s,t)} = g(s+n-1, \dots, s+1, s; t+n-1, \dots, t+1, t) \quad (24)$$

が成り立つ.

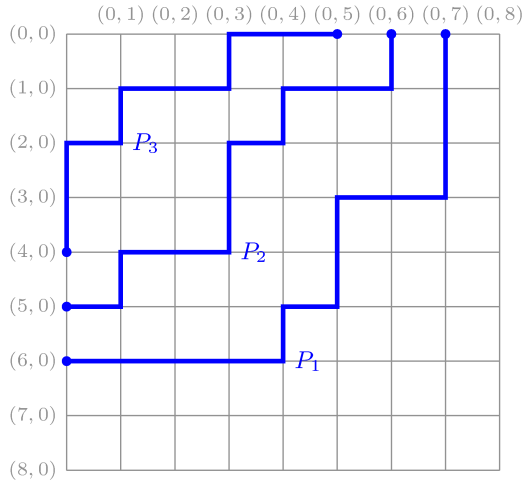


図 4 非交叉格子路.

証明. 定理 3 より

$$\det_{0 \leq k, \ell < n} (f_{i_k, j_\ell}) = \det_{0 \leq k, \ell < n} (g(i_k; j_\ell)) \quad (25)$$

が成り立つ. 右辺の行列式に Gessel–Viennot の補題 [3, 1] を適用すると (23) の右辺に等しいことが分かる. さらに (10) より $i_k = s + k - 1$, $j_\ell = t + \ell - 1$ とおくと (23) は (24) に帰着する. \square

系 4 より, 離散 2 次元戸田分子のタウ関数 $\tau_n^{(s,t)}$ は, 非交叉格子路の重み和 (分配関数) として組合せ論的に解釈できる. 例えば $s = 4$, $t = 5$, $n = 3$ のときは $(s, 0) = (4, 0)$, $(5, 0)$, $(6, 0)$ を始点, $(0, t) = (0, 5)$, $(0, 6)$, $(0, 7)$ を終点とする $n = 3$ 本の非交叉格子路の組 (P_1, P_2, P_3) の重み和である. そのような非交叉格子路の組 (P_1, P_2, P_3) の例を図 4 に示す.

4 平面分割の分配関数

系 4 より離散 2 次元戸田分子のタウ関数 $\tau_c^{(a,b)}$ は, 格子路の組 (P_1, \dots, P_c) で次の条件を満たすものの重み和 (分配関数) と見なせる.

- (a) P_k は $(a + c - k, 0)$ を始点, $(0, b + c - k)$ を終点とする.
- (b) P_1, \dots, P_c は非交叉的である.

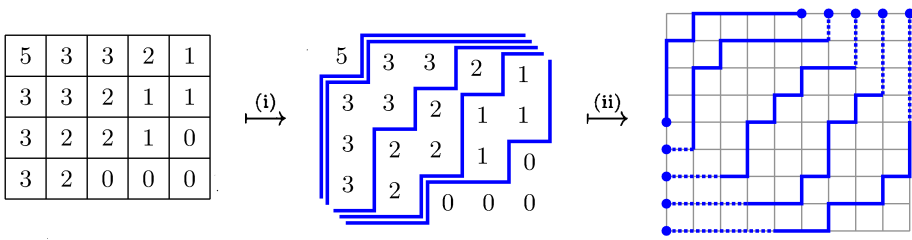


図5 平面分割から非交叉格子路の組をつくる全単射 φ .

よく知られた事実として、そのような非交叉格子路の組 (P_1, \dots, P_c) は、高々 a 行 b 列で成分がすべて c 以下の平面分割、すなわち $PP(a, b, c)$ に属する平面分割と一対一に対応する [7]. 両者の間をつなぐ全単射 φ は次のように記述できる.

平面分割 $\pi \in PP(a, b, c)$ が与えられたとき、次の手続きで非交叉格子路の組 $\varphi(\pi) = (P_1, \dots, P_c)$ をつくる.

- (i) 各 $1 \leq k \leq c$ に対して、 k 以上の成分と k より小さい成分を隔てる境界線を π の中に引く. この境界線を $(a, 0)$ を始点、 $(0, b)$ を終点とする格子路 Q_k と見なす.
- (ii) 各 $1 \leq k \leq c$ に対して、格子路 Q_k を $(c-k, c-k)$ だけ (右斜め下) に平行移動する. さらに Q_k の始点と終点に $c-k$ 個の右ステップと上ステップをそれぞれ付け加える. そうして得られた $((a+c-k, 0)$ を始点、 $(0, b+c-k)$ を終点とする) 格子路を P_k とする.

この手続きにより得られる格子路の組 (P_1, \dots, P_c) は上記の条件 (a), (b) を満たす. さらにこの手続きは可逆なので、条件 (a), (b) を満たす任意の格子路の組 (P_1, \dots, P_c) から、対応する平面分割 $\pi \in PP(a, b, c)$ をつくることもできる. 従ってこの手続き $\varphi: \pi \mapsto (P_1, \dots, P_c)$ は全単射である. (2) の平面分割 $\pi \in PP(4, 5, 5)$ に全単射 φ を適用した様子を図5に示す.

全単射 φ を用いて、平面分割 $\pi \in PP(a, b, c)$ の重み $w(\pi)$ を次のように定める. $\varphi(\pi) = (P_1, \dots, P_c)$ のとき

$$w(\pi) = \prod_{k=1}^c \frac{w(P_k)}{w(P_k^0)}. \quad (26)$$

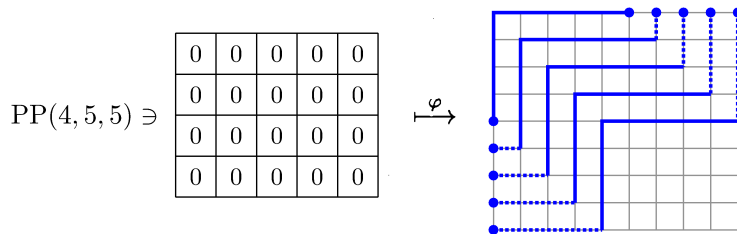


図6 空の平面分割 \emptyset とそれに対応する非交叉格子路.

ただし $(P_1^\emptyset, \dots, P_c^\emptyset) = \varphi(\emptyset)$ は, すべての成分が零の (空の) 平面分割

$$\emptyset = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \quad (27)$$

に対応する非交叉格子路の組である. 図6に空の平面分割に対応する非交叉格子路の組の例を示す. グラフ L の枝重み (14) と系4より

$$\prod_{k=1}^c w(P_k^\emptyset) = \tau_c^{(0,b)} \prod_{i=1}^a \prod_{k=1}^c a_{k-1}^{(i-1,0)} \quad (28)$$

が成り立つ. 定義より明らかに $w(\emptyset) = 1$ である (ように正規化している).

全単射 φ と平面分割の重み $w(\pi)$ を用いて系4を書き換えると, 次の定理が得られる. この定理が本稿の主定理である.

定理5. 定理3と同じ仮定の下で, 任意の $a, b, c \geq 0$ に対して

$$\sum_{\pi \in \text{PP}(a,b,c)} w(\pi) = \prod_{i=1}^a \prod_{k=1}^c \frac{a_{k-1}^{(i-1,b)}}{a_{k-1}^{(i-1,0)}} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{a_{k-1}^{(i-1,j)}}{a_{k-1}^{(i-1,j-1)}} \quad (29)$$

が成り立つ.

証明. 全単射 φ と重み $w(\pi)$ の定義より

$$\sum_{\pi \in \text{PP}(a,b,c)} w(\pi) = \frac{g(a+c-1, \dots, a+1, a; b+c-1, \dots, b+1, b)}{\prod_{k=1}^c w(P_k^\emptyset)} \quad (30)$$

が成り立つ. ここで系4と(28)より上式の右辺は

$$\frac{g(a+c-1, \dots, a+1, a; b+c-1, \dots, b+1, b)}{\prod_{k=1}^c w(P_k^\emptyset)} = \frac{\tau_c^{(a,b)}}{\tau_c^{(0,b)}} \prod_{i=1}^a \prod_{k=1}^c \frac{1}{a_{k-1}^{(i-1,0)}} \quad (31)$$

と書ける. さらに変換式 (8) より

$$\frac{\tau_c^{(a,b)}}{\tau_c^{(0,b)}} = \prod_{i=1}^a \prod_{k=1}^c a_{k-1}^{(i-1,b)} \quad (32)$$

である. 以上を合わせて (29) (の最初の等号) を得る. \square

定理 5 は, 離散 2 次元戸田分子 (7) の任意の非零解から, 平面分割の分配関数で積表示を持つものが自動的に得られることを示している.

5 分配関数の例

最後に定理 5 の帰結として得られる, 積表示を持つ分配関数の例を示す.

5.1 MacMahon の母関数

離散 2 次元戸田分子 (7) において

$$a_n^{(s,0)} = q^n, \quad b_n^{(0,t)} = q^{t+n} \quad (33)$$

を仮定する. このときの格子路の重みは

$$w(P) = q^{\text{area}(P)} \quad (34)$$

である. ただし $\text{area}(P)$ は, P とグラフ L の左端と上端のつくる領域の面積である.

平面分割 $\pi \in \text{PP}(a, b, c)$ と, 全単射 φ により π に対応する非交叉格子路の組 $(P_1, \dots, P_c) = \varphi(\pi)$ は, 関係式

$$\#\{(i, j); \pi_{i,j} \geq k\} = \text{area}(P_k) - \text{area}(P_k^\emptyset) \quad (35)$$

を満たす. 左辺は π の k 以上の成分の個数である. また右辺の P_k^\emptyset の定義は 4 節と同じである. 従って

$$|\pi| = \sum_{k=1}^c \#\{(i, j); \pi_{i,j} \geq k\} = \sum_{k=1}^c \{\text{area}(P_k) - \text{area}(P_k^\emptyset)\} \quad (36)$$

が成り立つ. 平面分割の重み $w(\pi)$ は (26) により定義される. 今の場合 (34) と (36) より

$$w(\pi) = \prod_{k=1}^c \frac{w(P_k)}{w(P_k^\emptyset)} = \prod_{k=1}^c \frac{q^{\text{area}(P_k)}}{q^{\text{area}(P_k^\emptyset)}} = q^{\sum_{k=1}^c \{\text{area}(P_k) - \text{area}(P_k^\emptyset)\}} = q^{|\pi|} \quad (37)$$

である.

さて (33) を初期値として離散 2 次元戸田分子を解くと

$$a_n^{(s,t)} = q^n \frac{1 - q^{s+t+n+1}}{1 - q^{s+n+1}}, \quad b_n^{(s,t)} = q^{s+t+n} \frac{1 - q^n}{1 - q^{s+n}} \quad (38)$$

が得られる. 今, 平面分割の重み $w(\pi)$ は (37) で与えられるから, 定理 4 の帰結として直ちに

$$\sum_{\pi \in \text{PP}(a,b,c)} q^{|\pi|} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}} \quad (39)$$

を得る. これは MacMahon の母関数 (3) に他ならない.

以上の計算は MacMahon の母関数 (3) の別証明を与えている. 他の証明法については [8, 3, 10, 2] などを見て欲しい.

5.2 トレースを含む分配関数

離散 2 次元戸田分子の解として

$$a_n^{(s,t)} = q^n (1 - yq^{s+t+n+1}), \quad b_n^{(s,t)} = yq^{s+t+n} (1 - q^n) \quad (40)$$

を取り上げる. このときグラフ L の枝重み (14) を決めるのは

$$a_n^{(s,0)} = q^n (1 - yq^{s+n+1}), \quad b_n^{(0,t)} = yq^{t+n} (1 - q^n) \quad (41)$$

であり, 格子路の重みは次のようになる. 格子路 P の始点が $(a, 0)$ のとき

$$w(P) = y^{\text{diag}(P)} q^{\text{area}(P)} \prod_{i=1}^{\text{diag}(P)} (1 - q^i) \prod_{i=\text{diag}(P)+1}^a (1 - yq^i). \quad (42)$$

ただし P が主対角線上の節点 (d, d) を通るとき $\text{diag}(P) = d$ である.

平面分割 $\pi \in \text{PP}(a, b, c)$ と, 全単射 φ により π に対応する非交叉格子路の組 $(P_1, \dots, P_c) = \varphi(\pi)$ は, (35) に加えて関係式

$$\#\{(i, i); \pi_{i,i} \geq k\} = \text{diag}(P_k) - \text{diag}(P_k^\emptyset) \quad (43)$$

を満たす. 左辺は π の k 以上の主対角成分の個数である. また右辺の P_k^\emptyset の定義は 4 節と同じである. 従って

$$\text{tr}(\pi) = \sum_{k=1}^c \#\{(i, i); \pi_{i,i} \geq k\} = \sum_{k=1}^c \{\text{diag}(P_k) - \text{diag}(P_k^\emptyset)\} \quad (44)$$

が成り立つ. 平面分割の重み $w(\pi)$ は (26) により定義される. 今の場合 (42) と (36), (44) より

$$\begin{aligned}
w(\pi) &= \prod_{k=1}^c \frac{w(P_k)}{w(P_k^\emptyset)} \\
&= \prod_{k=1}^c \frac{y^{\text{diag}(P_k)} q^{\text{area}(P_k)} \prod_{i=1}^{\text{diag}(P_k)} (1-q^i) \prod_{i=\text{diag}(P_k)+1}^{a+c-k} (1-yq^i)}{y^{\text{diag}(P_k^\emptyset)} q^{\text{area}(P_k^\emptyset)} \prod_{i=1}^{\text{diag}(P_k^\emptyset)} (1-q^i) \prod_{i=\text{diag}(P_k^\emptyset)+1}^{a+c-k} (1-yq^i)} \\
&= \prod_{k=1}^c y^{\text{diag}(P_k) - \text{diag}(P_k^\emptyset)} q^{\text{area}(P_k) - \text{area}(P_k^\emptyset)} \prod_{i=\text{diag}(P_k^\emptyset)+1}^{\text{diag}(P_k)} \frac{1-q^i}{1-yq^i} \\
&= y^{\sum_{k=1}^c \{\text{diag}(P_k) - \text{diag}(P_k^\emptyset)\}} q^{\sum_{k=1}^c \{\text{area}(P_k) - \text{area}(P_k^\emptyset)\}} \\
&\quad \times \prod_{k=1}^c \prod_{i=1}^{\text{diag}(P_k) - \text{diag}(P_k^\emptyset)} \frac{1-q^{i+\text{diag}(P_k^\emptyset)}}{1-yq^{i+\text{diag}(P_k^\emptyset)}} \\
&= y^{\text{tr}(\pi)} q^{|\pi|} \prod_{k=1}^c \prod_{i=1}^{\#\{(i,i); \pi_{i,i} \geq k\}} \frac{1-q^{c+i-k}}{1-yq^{c+i-k}} \\
&= y^{\text{tr}(\pi)} q^{|\pi|} \prod_{i=1}^{\min\{a,b\}} \prod_{k=1}^{\pi_{i,i}} \frac{1-q^{c+i-k}}{1-yq^{c+i-k}} \tag{45}
\end{aligned}$$

である. ただし途中 $\text{diag}(P_k^\emptyset) = c - k$ を用いた.

結局 (40), (45) より, 定理 5 は次の分配関数を導く.

定理 6. 任意の $a, b, c \geq 0$ に対して

$$\sum_{\pi \in \text{PP}(a,b,c)} y^{\text{tr}(\pi)} q^{|\pi|} \omega(\pi) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{1-yq^{i+j+k-1}}{1-yq^{i+j+k-2}}, \tag{46a}$$

$$\omega(\pi) = \prod_{i=1}^{\min\{a,b\}} \prod_{k=1}^{\pi_{i,i}} \frac{1-q^{c+i-k}}{1-yq^{c+i-k}} \tag{46b}$$

が成り立つ.

分配関数 (46) は MacMahon の母関数 (3) を含んでいる. 実際 $y = 1$ のとき, $y^{\text{tr}(\pi)} = \omega(\pi) = 1$ より (46) の左辺は (3) の左辺に帰着する. (46) の右辺が (3) の右辺に帰着する明らかである.

分配関数 (46) は Stanley のトレース母関数 (6) も含んでいる. 実際 (46) において

$c \rightarrow \infty$ とすると,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \text{PP}(a, b, c) = \bigcup_{c=0}^{\infty} \text{PP}(a, b, c) = \text{PP}(a, b) \quad (47)$$

および

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \omega(\pi) = \lim_{c \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{\min\{a,b\}} \prod_{k=1}^{\pi_{i,i}} \frac{1 - q^{c+i-k}}{1 - yq^{c+i-k}} = \prod_{i=1}^{\min\{a,b\}} \prod_{k=1}^{\pi_{i,i}} 1 = 1 \quad (48)$$

より (46) の左辺は (6) の左辺に帰着する. また

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{1 - yq^{i+j+k-1}}{1 - yq^{i+j+k-2}} = \lim_{c \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \frac{1 - yq^{c+i+j-1}}{1 - yq^{i+j-1}} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \frac{1}{1 - yq^{i+j-1}} \quad (49)$$

より (46) の右辺は (6) の右辺に帰着する.

こうして離散 2 次元戸田分子の特殊解 (40) から, 積表示を持ち, かつ MacMahon の母関数 (3) と Stanley のトレース母関数 (6) を同時に含むような分配関数 (46) を導出することができた. なおこの分配関数 (46) は, 双直交多項式 (little q -Laguerre 多項式) と平面分割の関係からも導くことができる [6].

参考文献

- [1] M. Aigner and G. M. Ziegler, *Proofs from the book*, fifth ed., Springer-Verlag, Berlin, 2014.
- [2] D. M. Bressoud, *Proofs and confirmations. the story of the alternating sign matrix conjecture*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [3] I. M. Gessel and X. G. Viennot, *Determinants, paths, and plane partitions*, preprint, 1989.
- [4] R. Hirota, S. Tsujimoto, and T. Imai, *Difference scheme of soliton equations*, State of the art and perspectives of studies on nonlinear integrable systems (Japanese) (Kyoto, 1992), Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku, 822, 1993, pp. 144–152.
- [5] S. Kamioka, *Multiplicative partition functions for reverse plane partitions derived from an integrable dynamical system*, arXiv:1701.06762 [math.CO].

- [6] ———, *A triple product formula for plane partitions derived from biorthogonal polynomials*, FPSAC 2016 (Vancouver, Canada), DMTCS proc., 2016, pp. 671–682.
- [7] C. Krattenthaler, *Plane partitions in the work of Richard Stanley and his school*, arXiv:1503.05934v2 [math.CO].
- [8] P. A. MacMahon, *Combinatory analysis, volume 2*, Cambridge University Press, Cambridge, 1916.
- [9] R. P. Stanley, *The conjugate trace and trace of a plane partition*, J. Combinatorial Theory Ser. A **14** (1973), 53–65.
- [10] ———, *Enumerative combinatorics, vol. 2*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 62, Cambridge, 1999.