

On the n -th generalized operator valued divergences

伊佐 浩史 (Hiroshi ISA)⁽¹⁾, 伊藤 公智 (Masatoshi ITO)⁽²⁾
亀井 栄三郎 (Eizaburo KAMEI)⁽³⁾, 遠山 宏明 (Hiroaki TOHYAMA)⁽⁴⁾,
渡邊 雅之 (Masayuki WATANABE)⁽⁵⁾

(1), (2), (4), (5): 前橋工科大学 (Maebashi Institute of Technology)

1. Introduction.

本報告を通して, A, B はヒルベルト空間 \mathcal{H} 上の strictly positive linear operator とする.

Fujii と Kamei は A, B に関する relative operator entropy を次のように定義した [1]:

$$S(A|B) \equiv A^{\frac{1}{2}}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}.$$

Furuta[6] は $S(A|B)$ を拡張して, 次のように generalized relative operator entropy (cf. [5]) を与えた:

$$S_t(A|B) \equiv A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^t(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ここで, $t = 0$ の場合は $S(A|B)$ となる. また, Yanagi, Kuriyama, Furuichi[17] は, Tsallis relative operator entropy を次のように定義した:

$$T_\alpha(A|B) \equiv \frac{A \sharp_\alpha B - A}{\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1].$$

ここで, $A \sharp_\alpha B \equiv A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}}$ は weighted geometric operator mean (cf. [15]) である. また, $T_0(A|B) \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 0} T_\alpha(A|B) = S(A|B)$ となることに注意する. $S(A|B)$, $S_\alpha(A|B)$, $T_\alpha(A|B)$ について, 次に示す不等式が成立する [8]:

$$(*) \quad S(A|B) \leq T_\alpha(A|B) \leq S_\alpha(A|B) \leq -T_{1-\alpha}(B|A) \leq S_1(A|B), \quad \alpha \in (0, 1).$$

$A \sharp_\alpha B$ を拡張して, path $A \natural_t B$ を次のように定義する ([2, 3, 4, 7, 9, 10, 13, 14, etc.]):

$$A \natural_t B \equiv A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$A = A \natural_0 B$, $B = A \natural_1 B$ であり, $t \in [0, 1]$ の場合は, $A \natural_t B$ は $A \sharp_t B$ に一致する. われわれは, $A \natural_t B$ を用いて Tsallis relative operator entropy を次のように再定義した:

$$T_t(A|B) \equiv \frac{A \natural_t B - A}{t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Petz は [16] において, Bregman type の operator divergence

$$D_{FK}(A|B) \equiv B - A - S(A|B)$$

を導入した. われわれは $D_{FK}(A|B)$ を Petz-Bregman divergence と呼んでいる [11, 12]. ここで, $D_{FK}(A|B)$ は 2 つの relative operator entropy $T_1(A|B)$, $S(A|B)$ の差で表すことができる. さらに [12] においては, (*) に現れる 2 つの項の差

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\equiv T_\alpha(A|B) - S(A|B), \\ \Delta_2 &\equiv S_\alpha(A|B) - T_\alpha(A|B) \end{aligned}$$

等々を operator divergence とみなして、これらについての考察を行った。

本報告では、 $A \natural_t B$ を $\Psi_{A,B}(t)$ と表し、これを operator valued function として扱う。このとき、 $\Psi'_{A,B}(t) = S_t(A|B)$ である [6, 8, 11, 13]。Section 2 では、この関数を基に 2 変数関数 $\Psi_{A,B}^{[n]}(x, y)$ を定義する。このとき、不等式 (*) は $\Psi_{A,B}^{[1]}(x, y)$ を用いて

$$(**) \quad \Psi_{A,B}^{[1]}(0, 0) \leq \Psi_{A,B}^{[1]}(\alpha, 0) \leq \Psi_{A,B}^{[1]}(\alpha, \alpha) \leq \Psi_{A,B}^{[1]}(1, \alpha) \leq \Psi_{A,B}^{[1]}(1, 1), \quad \alpha \in (0, 1)$$

と書き直すことができる。さらに、 $A \leq B$ の場合には、 $\Psi_{A,B}^{[n]}(x, y)$ について同様の不等式

$$(***) \quad \Psi_{A,B}^{[n]}(0, 0) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(\alpha, 0) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(\alpha, \alpha) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(1, \alpha) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(1, 1), \quad \alpha \in (0, 1)$$

が成立することを示す。また、operator divergence $D_{FK}(A|B), \Delta_1, \Delta_2$ は $\Psi_{A,B}^{[1]}(x, y)$ を用いて

$$\begin{aligned} D_{FK}(A|B) &= \Psi_{A,B}^{[1]}(1, 0) - \Psi_{A,B}^{[1]}(0, 0), \\ \Delta_1 &= \Psi_{A,B}^{[1]}(\alpha, 0) - \Psi_{A,B}^{[1]}(0, 0), \\ \Delta_2 &= \Psi_{A,B}^{[1]}(\alpha, \alpha) - \Psi_{A,B}^{[1]}(0, \alpha) \end{aligned}$$

と表すことができる。Section 3 では、これらを一括して含む operator divergence の族

$$D_{A,B}^{[1]}(x, y) \equiv \Psi_{A,B}^{[1]}(x, y) - \Psi_{A,B}^{[1]}(y, y)$$

を考え、さらに、これらを n 次に深化させた

$$D_{A,B}^{[n]}(x, y) \equiv \Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) - \Psi_{A,B}^{[n]}(y, y)$$

を導入し、その具体的な形を提示する。また、 $D_{A,B}^{[n]}(x, y)$ を用いて $D_{FK}(A|B), \Delta_1, \Delta_2$ の n -th operator divergence $D_{FK}^{[n]}(A|B), \Delta_1^{[n]}(\alpha), \Delta_2^{[n]}(\alpha)$ を与える。

2. Operator valued function $\Psi_{A,B}^{[n]}(x, y)$.

$\Psi_{A,B}(t) \equiv A \natural_t B$ ($t \in \mathbb{R}$) とする。 $\Psi_{A,B}(t)$ の n 次導関数について、次が成立する。

Lemma 1. For $n \in \mathbb{N}$,

$$\Psi_{A,B}^{(n)}(t) \left(= \frac{d^n}{dt^n} \Psi_{A,B}(t) \right) = (A \natural_t B)(A^{-1}S(A|B))^n.$$

Proof. $X = A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ とおく。定数 $a > 0$ に対して $\frac{d^n}{dt^n} a^t = a^t(\log a)^n$ であることより

$$\begin{aligned} \Psi_{A,B}^{(n)}(t) &= A^{\frac{1}{2}}X^t(\log X)^n A^{\frac{1}{2}} \\ &= A^{\frac{1}{2}}X^t A^{\frac{1}{2}}A^{-1}A^{\frac{1}{2}}(\log X)A^{\frac{1}{2}}A^{-1}A^{\frac{1}{2}}(\log X)A^{\frac{1}{2}} \cdots A^{-1}A^{\frac{1}{2}}(\log X)A^{\frac{1}{2}} \\ &= (A \natural_t B)(A^{-1}S(A|B))(A^{-1}S(A|B)) \cdots (A^{-1}S(A|B)) \\ &= (A \natural_t B)(A^{-1}S(A|B))^n \end{aligned}$$

である。 □

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、operator valued function $\Psi_{A,B}^{[n]} : \mathbb{R}^2 \rightarrow B(\mathcal{H})$ を次のように帰納的に定義する。

Definition 2.

$$\Psi_{A,B}^{[1]}(x, y) \equiv \frac{\Psi_{A,B}(x) - \Psi_{A,B}(y)}{x - y} \quad (x \neq y), \quad \Psi_{A,B}^{[1]}(y, y) \equiv \lim_{x \rightarrow y} \Psi_{A,B}^{[1]}(x, y).$$

For $n \geq 2$,

$$\Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) \equiv \frac{\Psi_{A,B}^{[n-1]}(x, y) - \Psi_{A,B}^{[n-1]}(y, y)}{x - y} \quad (x \neq y), \quad \Psi_{A,B}^{[n]}(y, y) \equiv \lim_{x \rightarrow y} \Psi_{A,B}^{[n]}(x, y).$$

$A \natural B = A$ より, $A = B$ のときは $\Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) = 0$ である. また, 定義より

$$\begin{aligned} T_x(A|B) &= \frac{A \natural_x B - A}{x} = \Psi_{A,B}^{[1]}(x, 0), \\ S_y(A|B) &= (A \natural_y B)A^{-1}S(A|B) = \Psi_{A,B}^{[1]}(y, y), \\ S(A|B) &= \Psi_{A,B}^{[1]}(0, 0). \end{aligned}$$

である. したがって, $\Psi_{A,B}^{[1]}(x, y)$ を用いて不等式(*) は次のように書き直すことができる.

$$(**) \quad \Psi_{A,B}^{[1]}(0, 0) \leq \Psi_{A,B}^{[1]}(\alpha, 0) \leq \Psi_{A,B}^{[1]}(\alpha, \alpha) \leq \Psi_{A,B}^{[1]}(1, \alpha) \leq \Psi_{A,B}^{[1]}(1, 1), \quad \alpha \in (0, 1).$$

この不等式の, $\Psi_{A,B}^{[n]}(x, y)$ ($n \in \mathbb{N}$) への拡張について考察する.

まず, $\Psi_{A,B}^{[n]}(x, y)$ の性質を調べるために次の関数を考える.

$$\phi_{a,n}(h) \equiv \frac{a^h - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^k}{k!} (\log a)^k}{h^n}, \quad h \neq 0.$$

ただし, $a (\neq 1)$ は正の実数, n は自然数とする. Taylor の定理より次がいえる.

Lemma 3. *There exists a real number θ with $0 < \theta < 1$ such that*

$$\phi_{a,n}(h) = \frac{a^{\theta h}}{n!} (\log a)^n.$$

In particular,

- (1) $\lim_{h \rightarrow 0} \phi_{a,n}(h) = \frac{(\log a)^n}{n!},$
- (2) $\phi_{a,n}(h) > 0$ if $a > 1$ or n is even,
- (3) $\phi_{a,n}(h) < 0$ if $a < 1$ and n is odd.

$\Psi_{A,B}^{[n]}(x, y)$ は次のように表すことができる.

Theorem 4. *Let $n \in \mathbb{N}$ and assume $A \neq B$. Then*

$$(*) \quad \Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(x-y)^n} \left(A \natural_x B - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-y)^k}{k!} (A \natural_y B) (A^{-1}S(A|B))^k \right) & \text{if } x \neq y, \\ \frac{1}{n!} (A \natural_y B) (A^{-1}S(A|B))^n & \text{if } x = y. \end{cases}$$

Proof. n に関する帰納法により証明する.

$x \neq y$ のときは

$$\Psi_{A,B}^{[1]}(x, y) = \frac{\Psi_{A,B}(x) - \Psi_{A,B}(y)}{x - y} = \frac{A \natural_x B - A \natural_y B}{x - y}$$

であり, したがって

$$\begin{aligned} \Psi_{A,B}^{[1]}(y, y) &= \lim_{x \rightarrow y} \Psi_{A,B}^{[1]}(x, y) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{A \natural_x B - A \natural_y B}{x - y} \\ &= S_y(A|B) = (A \natural_y B)A^{-1}S(A|B) \end{aligned}$$

となるため, $n = 1$ のとき (*) は成立している.

$n \geq 2$ として

$$\begin{aligned} \Psi_{A,B}^{[n-1]}(x, y) &= \frac{A \natural_x B - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(x-y)^k}{k!} (A \natural_y B)(A^{-1}S(A|B))^k}{(x-y)^{n-1}}, \\ \Psi_{A,B}^{[n-1]}(y, y) &= \frac{1}{(n-1)!} (A \natural_y B)(A^{-1}S(A|B))^{n-1} \end{aligned}$$

が成立していると仮定する. $x \neq y$ のとき

$$\begin{aligned} \Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) &= \frac{1}{x-y} \left(\Psi_{A,B}^{[n-1]}(x, y) - \Psi_{A,B}^{[n-1]}(y, y) \right) \\ &= \frac{1}{(x-y)^n} \left(A \natural_x B - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-y)^k}{k!} (A \natural_y B)(A^{-1}S(A|B))^k \right) \end{aligned}$$

であり, したがって

$$\begin{aligned} \Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) &= A^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-y)^k}{k!} (A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^y (\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^k}{(x-y)^n} \right) A^{\frac{1}{2}} \\ &= A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^y \left(\frac{(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{x-y} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-y)^k}{k!} (\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^k}{(x-y)^n} \right) A^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である. $a > 0$ に対して

$$\psi_{x,y}^n(a) = \begin{cases} a^y \phi_{a,n}(x-y) & \text{if } a \neq 1, \\ 0 & \text{if } a = 1 \end{cases}$$

とすると

$$\Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) = A^{\frac{1}{2}} \psi_{x,y}^n(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}$$

であり, Lemma 3 より

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow y} \Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) &= A^{\frac{1}{2}} \lim_{x \rightarrow y} \psi_{x,y}^n(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} \\
 &= A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^y \frac{(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^n}{n!} A^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{n!} A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^y A^{\frac{1}{2}} A^{-1} A^{\frac{1}{2}} (\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^n A^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{n!} (A \natural_y B)(A^{-1}S(A|B))^n
 \end{aligned}$$

である. したがって, n についても $(*)$ が成立している. □

$\Psi_{A,B}^{[n]}(x, y)$ は次に示す性質を持つ.

Proposition 5. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{R}$ with $x \neq y$. If $A \neq B$, then $\Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) \neq 0$.*

Proof. Theorem 4 の証明と同じく, $a > 0$ に対して

$$\psi_{x,y}^n(a) = \begin{cases} a^y \phi_{a,n}(x-y) & \text{if } a \neq 1, \\ 0 & \text{if } a = 1 \end{cases}$$

とする. Lemma 3 より, $0 < \theta < 1$ となる実数 θ が存在して

$$\psi_{x,y}^n(a) = \frac{a^{y+\theta(x-y)}}{n!} (\log a)^n$$

であることより

$$\begin{aligned}
 \Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) &= A^{\frac{1}{2}} \psi_{x,y}^n(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{n!} A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{y+\theta(x-y)} (\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^n A^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

である. $A \neq B$ とすると, $\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \neq 0$ である. $\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ は self-adjoint であるから, $(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^n \neq 0$ であり,

$$\Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{y+\theta(x-y)} (\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^n A^{\frac{1}{2}} \neq 0$$

を得る. □

$\Psi_{A,B}^{[n]}(x, y)$ についての基本的な関係として, 次の不等式が成立する.

Theorem 6. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{R}$ with $x > y$. Then*

- (1) $\Psi_{A,B}^{[n]}(y, y) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(x, x)$ if n is odd,
- (2) $\Psi_{A,B}^{[n]}(y, y) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(x, x)$ if n is even and $A \leq B$,
 $\Psi_{A,B}^{[n]}(y, y) \geq \Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) \geq \Psi_{A,B}^{[n]}(x, x)$ if n is even and $A \geq B$.

Proof. まず, $\Psi_{A,B}^{[n]}(y, y)$ と $\Psi_{A,B}^{[n]}(x, y)$ の関係について調べる. 定義より

$$\Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) - \Psi_{A,B}^{[n]}(y, y) = (x - y)\Psi_{A,B}^{[n+1]}(x, y)$$

である. $\psi_{x,y}^n(a)$ を Theorem 4 の証明と同じく

$$\psi_{x,y}^n(a) = \begin{cases} a^y \phi_{a,n}(x - y) & \text{if } a \neq 1, \\ 0 & \text{if } a = 1 \end{cases}$$

とする. Lemma 3 の (2), (3) より

$$\psi_{x,y}^{n+1}(a) \begin{cases} \geq 0 & \text{if } n \text{ is odd or } a \geq 1, \\ \leq 0 & \text{if } n \text{ is even and } a \leq 1 \end{cases}$$

であるから

$$\Psi_{A,B}^{[n+1]}(x, y) \begin{cases} \geq 0 & \text{if } n \text{ is odd or } A \leq B, \\ \leq 0 & \text{if } n \text{ is even and } A \geq B \end{cases}$$

である. したがって

$$\begin{aligned} \Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) &\geq \Psi_{A,B}^{[n]}(y, y) && \text{if } n \text{ is odd or } A \leq B, \\ \Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) &\leq \Psi_{A,B}^{[n]}(y, y) && \text{if } n \text{ is even and } A \geq B \end{aligned}$$

である.

次に, $\Psi_{A,B}^{[n]}(x, y)$ と $\Psi_{A,B}^{[n]}(x, x)$ の関係を調べる. $X = A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ とおくと

$$\begin{aligned} &\Psi_{A,B}^{[n]}(x, x) - \Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) \\ &= \frac{(A \natural_x B)}{n!} (A^{-1}S(A|B))^n - \frac{1}{(x-y)^n} \left(A \natural_x B - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-y)^k}{k!} (A \natural_y B) (A^{-1}S(A|B))^k \right) \\ &= A^{\frac{1}{2}} \left(\frac{X^x}{n!} (\log X)^n - \frac{1}{(x-y)^n} \left(X^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-y)^k}{k!} X^y (\log X)^k \right) \right) A^{\frac{1}{2}} \\ &= A^{\frac{1}{2}} X^y \left(\frac{X^{x-y}}{n!} (\log X)^n - \frac{1}{(x-y)^n} \left(X^{x-y} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-y)^k}{k!} (\log X)^k \right) \right) A^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である. ここで, $a > 0$ に対して, Lemma 3 を用いると

$$\begin{aligned} &\frac{a^{x-y}}{n!} (\log a)^n - \frac{1}{(x-y)^n} \left(a^{x-y} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-y)^k}{k!} (\log a)^k \right) \\ &= \frac{a^{x-y}}{n!} (\log a)^n - \phi_{a,n}(x-y) \\ &= \frac{1}{n!} (a^{x-y} - a^{\theta(x-y)}) (\log a)^n \quad (\exists \theta \in (0, 1)) \\ &\begin{cases} \geq 0 & \text{if } n \text{ is odd or } a \geq 1, \\ \leq 0 & \text{if } n \text{ is even and } a \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

であり, したがって

$$\begin{aligned}\Psi_{A,B}^{[n]}(x, x) &\geq \Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) \text{ if } n \text{ is odd or } A \leq B, \\ \Psi_{A,B}^{[n]}(x, x) &\leq \Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) \text{ if } n \text{ is even and } A \geq B\end{aligned}$$

である.

以上より, n が奇数の場合は

$$\Psi_{A,B}^{[n]}(y, y) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(x, x)$$

が成立し, n が偶数の場合には

$$\begin{aligned}\Psi_{A,B}^{[n]}(y, y) &\leq \Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(x, x) \text{ if } A \leq B, \\ \Psi_{A,B}^{[n]}(y, y) &\geq \Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) \geq \Psi_{A,B}^{[n]}(x, x) \text{ if } A \geq B\end{aligned}$$

が成立している. □

Corollary 7. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in (0, 1)$.*

(1) *If n is odd,*

$$\Psi_{A,B}^{[n]}(0, 0) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(\alpha, 0) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(\alpha, \alpha) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(1, \alpha) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(1, 1).$$

(2) *If n is even and $A \leq B$,*

$$\Psi_{A,B}^{[n]}(0, 0) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(\alpha, 0) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(\alpha, \alpha) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(1, \alpha) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(1, 1).$$

If n is even and $A \geq B$,

$$\Psi_{A,B}^{[n]}(0, 0) \geq \Psi_{A,B}^{[n]}(\alpha, 0) \geq \Psi_{A,B}^{[n]}(\alpha, \alpha) \geq \Psi_{A,B}^{[n]}(1, \alpha) \geq \Psi_{A,B}^{[n]}(1, 1).$$

この結果は, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, (***) に対応する関係を与えている. 特に, $A \leq B$ の場合については

$$(***) \quad \Psi_{A,B}^{[n]}(0, 0) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(\alpha, 0) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(\alpha, \alpha) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(1, \alpha) \leq \Psi_{A,B}^{[n]}(1, 1), \quad \alpha \in (0, 1)$$

が成立する.

3. A generalization of the n -th Petz-Bregman divergence.

Section 2 より, $D_{FK}(A|B)$, Δ_1 , Δ_2 は, $\Psi_{A,B}^{[1]}(x, y)$ を使って次のように表すことができる:

$$\begin{aligned}D_{FK}(A|B) &= T_1(A|B) - S(A|B) = \Psi_{A,B}^{[1]}(1, 0) - \Psi_{A,B}^{[1]}(0, 0), \\ \Delta_1 &= T_\alpha(A|B) - S(A|B) = \Psi_{A,B}^{[1]}(\alpha, 0) - \Psi_{A,B}^{[1]}(0, 0), \\ \Delta_2 &= S_\alpha(A|B) - T_\alpha(A|B) = \Psi_{A,B}^{[1]}(\alpha, \alpha) - \Psi_{A,B}^{[1]}(0, \alpha).\end{aligned}$$

これらのことより, より一般に $\Psi_{A,B}^{[1]}(x, y)$ と $\Psi_{A,B}^{[1]}(y, y)$ の差を, (x, y) をパラメータとした A と B についての operator divergence と見なす. さらに, これらを n 次に深化させたものを次で定義する.

Definition 8. For $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{R}$,

$$D_{A,B}^{[n]}(x, y) \equiv \Psi_{A,B}^{[n]}(x, y) - \Psi_{A,B}^{[n]}(y, y).$$

定義より $D_{A,B}^{[n]}(x, y) = (x - y)\Psi_{A,B}^{[n+1]}(x, y)$ であるため, Proposition 5 から次のことがいえる.

Proposition 9. Let $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{R}$ with $x \neq y$. Then $D_{A,B}^{[n]}(x, y) = 0$ implies $A = B$.

このことに基づいて, $D_{A,B}^{[n]}(x, y)$ は operator divergence と見なせる. 特に $D_{A,B}^{[n]}(1, 0) = \Psi_{A,B}^{[n]}(1, 0) - \Psi_{A,B}^{[n]}(0, 0)$ を n -th Petz-Bregman divergence と呼び, $D_{A,B}^{[n]}(x, y)$ を generalized n -th Petz-Bregman divergence と呼ぶことにする. $D_{A,B}^{[n]}(x, y)$ は具体的には次のように表される.

Theorem 10. For $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{R}$,

$$D_{A,B}^{[n]}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(x-y)^n} \left(A \natural_x B - \sum_{k=0}^n \frac{(x-y)^k}{k!} (A \natural_y B)(A^{-1}S(A|B))^k \right) & \text{if } x \neq y, \\ 0 & \text{if } x = y. \end{cases}$$

generalized n -th Petz-Bregman divergence $D_{A,B}^{[n]}(x, y)$ を用いて, $D_{FK}^{[n]}(A|B)$, $\Delta_1^{[n]}(\alpha)$, $\Delta_2^{[n]}(\alpha)$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} D_{FK}^{[n]}(A|B) &\equiv D_{A,B}^{[n]}(1, 0), \\ \Delta_1^{[n]}(\alpha) &\equiv D_{A,B}^{[n]}(\alpha, 0), \quad 0 < \alpha < 1, \\ \Delta_2^{[n]}(\alpha) &\equiv -D_{A,B}^{[n]}(0, \alpha), \quad 0 < \alpha < 1. \end{aligned}$$

特に, $D_{FK}^{[1]}(A|B) = D_{A,B}^{[1]}(1, 0) = D_{FK}(A|B)$, $\Delta_1^{[1]}(\alpha) = D_{A,B}^{[1]}(\alpha, 0) = \Delta_1$, $\Delta_2^{[1]}(\alpha) = -D_{A,B}^{[1]}(0, \alpha) = \Delta_2$ である. Theorem 10 より, $D_{FK}^{[n]}(A|B)$, $\Delta_1^{[n]}(\alpha)$, $\Delta_2^{[n]}(\alpha)$ の具体的な表現を得る.

Corollary 11. For $n \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} (1) \quad D_{FK}^{[n]}(A|B) &= B - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A(A^{-1}S(A|B))^k, \\ (2) \quad \Delta_1^{[n]}(\alpha) &= \frac{1}{\alpha^n} \left(A \natural_\alpha B - \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} A(A^{-1}S(A|B))^k \right), \\ (3) \quad \Delta_2^{[n]}(\alpha) &= -\frac{1}{(-\alpha)^n} \left(A - \sum_{k=0}^n \frac{(-\alpha)^k}{k!} (A \natural_\alpha B)(A^{-1}S(A|B))^k \right). \end{aligned}$$

References

- [1] J. I. Fujii and E. Kamei, Relative operator entropy in noncommutative information theory, *Math. Japon.*, **34**(1989), 341–348.
- [2] J. I. Fujii and E. Kamei, Interpolational paths and their derivatives, *Math. Japon.*, **39**(1994), 557–560.
- [3] J. I. Fujii and E. Kamei, Path of Bregman-Petz operator divergence, *Sci. Math. Jpn.*, **70**(2009), 329–333.
- [4] M. Fujii, J. Mičić, J. Pečarić and Y. Seo, Recent Developments of Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities, *Monographs in Inequalities 4*, Element, Zagreb(2012).
- [5] S. Furuichi, K. Yanagi, and K. Kuriyama, Fundamental properties of Tsallis relative entropy, *J. Math. Phys.*, **45**(2004), 4868–4877.
- [6] T. Furuta, Parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbert space operators, *Linear Algebra Appl.*, **381**(2004), 219–235.
- [7] T. Furuta, J. Mičić, J. Pečarić and Y. Seo, Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities, *Monographs in Inequalities 1*, Element, Zagreb(2005).
- [8] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Relative operator entropy, operator divergence and Shannon inequality, *Sci. Math. Jpn.*, **75**(2012), 289–298.
- [9] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Extensions of Tsallis relative operator entropy and operator valued distance, *Sci. Math. Jpn.*, **76**(2013), 427–435.
- [10] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, On relations between operator valued α -divergence and relative operator entropies, *Sci. Math. Jpn.*, **78**(2015), 215–228. (online: e-2015 (2015), 215–228.)
- [11] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Expanded relative operator entropies and operator valued α -divergence, *J. Math. Syst. Sci.*, **5**(2015), 215–224.
- [12] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Some operator divergences based on Petz-Bregman divergence, *Sci. Math. Jpn.*, **80**(2017), 161–170.
- [13] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Velocity and acceleration on the paths $A \natural_t B$ and $A \natural_{t,r} B$, to appear in *Sci. Math. Jpn.*
- [14] E. Kamei, Paths of operators parametrized by operator means, *Math. Japon.*, **39**(1994), 395–400.
- [15] F. Kubo and T. Ando, Means of positive linear operators, *Math Ann.*, **248**(1980), 205–224.
- [16] D. Petz, Bregman divergence as relative operator entropy, *Acta Math. Hungar.*, **116**(2007), 127–131.
- [17] K. Yanagi, K. Kuriyama and S. Furuichi, Generalized Shannon inequalities based on Tsallis relative operator entropy, *Linear Algebra Appl.*, **394**(2005), 109–118.