

QUANTUM INVARIANTS OF KNOTS AND THE ANDREWS-GORDON IDENTITIES FOR A_2

WATARU YUASA
(TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY)

1. INTRODUCTION

本稿では、 \mathbb{R}^3 内の枠付き絡み目とその量子不変量の計算を扱う。扱う対象が低次元トポロジーの対象であるため、簡単にこれらの対象について説明する。

\mathbb{R}^3 内の枠付き絡み目とは、向き付けられたアニュラス l 個の非交和 $\sqcup^l S^1 \times [0, 1]$ の \mathbb{R}^3 への埋め込みの全域アイソトピー類のことである。特に、 $l=1$ の時を枠付き結び目と呼ぶ。これらの対象は $\{0\} \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ への射影図を通して扱うことができる。 $(\mathbb{R}^3$ には、自然な向きが定まっているものとする。) この絡み目図式と呼ばれる射影図は次のようにして得ることが出来る。

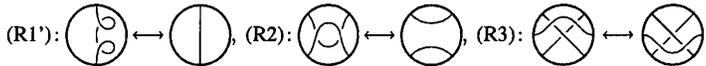
- (1) まず、枠付き絡み目の内点における正の法線ベクトルが $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ の正の法線ベクトルと一致するようにアイソトピーで変形する。
- (2) そして、絡み目の中心 $\sqcup^l S^1 \times \{1/2\} \subset \mathbb{R}^3$ の $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ への射影図を描く。この際、アイソトピーによる変形を用いて射影図の交点は横断的な二重点のみとなるように取ることが出来る。
- (3) 射影図の各交点 p の引き戻しである \mathbb{R}^3 内の 2 点に対して第 1 成分の大小により上下関係が定まる。この上下の情報を点 p に付加したものが絡み目図式である。

実際に描く際には射影図の各交点の近傍で“下”の点を含む弧を“上”の点を含む弧で途切れるように書くことにより上下情報を付加する。また、本稿の紙面上には絡み目図式を $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ と紙面を同一視し、正の法線ベクトルの向きは裏から表へ取ることで描くことにする。この方法により、 $\sqcup^l S^1 \times [0, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ を平面上の図式として描くことが出来た。また、上記の方法の逆を辿ることで与えられた絡み目図式から埋め込み $\sqcup^l S^1 \times [0, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ を得ることも出来る。次の事実が知られている。

Theorem 1.1. L_1, L_2 を埋め込み $\sqcup^l S^1 \times [0, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ とする。そして、 L_i の絡み目図式を D_i とする ($i=1, 2$)。このとき、次の (1) と (2) は同値である。

- (1) L_1 と L_2 が同じ枠付き絡み目を表す。
- (2) D_1 と D_2 は $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ のアイソトピー変形とライデマイスター変形 $(R1'), (R2), (R3)$ の有限列で移行合う。

ここで、ライデマイスター変形とは以下で表される絡み目図式の局所変形である。



上の図では、 \mathbb{R}^3 内に埋め込まれた局所的な 3 次元球体における射影図を描いている。太線で描かれた円の内側が 3 次元球体の内側に対応し、そのなかの細かい線で描かれているのが絡み目図式の一部である。

この定理によって、枠付き絡み目の不変量を絡み目図式から得ることが出来る。つまり、絡み目図式全体からの写像でアイソトピー変形とライデマイスター変形に対して不変であるものを構成すれば良い。本稿では、このようにして枠付き絡み目 L の図式から得られる多項式環に値をもつ不変量、色付きジョーンズ多項式 $J_{n+1}(L; q)$ を扱う。さて、ここで大まかに本稿の目的を概説しておく。まず、次の事実が知られている。

- ある種の枠付き絡み目 L に対して $J_{n+1}(L; q)$ は係数に安定性を持つ。
- この時、 q -級数で表される極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} J_{n+1}(L; q)$ が存在する。
- 当然、この極限は枠付き絡み目の不変量である。

また、 $(2, m)$ -トーラス絡み目 $T(2, m)$ に対して、図式を用いた二通りの方法でこの tail を計算することで以下のような Andrews-Gordon type の q -級数の恒等式が得られる事が知られている。 $\lim_{n \rightarrow \infty} J_{n+1}(T(2, 2m+1); q)$ からは次が得られる。

Theorem 1.2 (The Andrews-Gordon identities for the Ramanujan theta function [And74]).

$$f(-q^{2m}, -q) = (q; q)_\infty \sum_{k_m \leq \dots \leq k_2 \leq k_1} \frac{q^{\sum_{j=1}^{m-1} k_j(k_j+1)}}{\prod_{j=1}^{m-1} (q; q)_{k_j - k_{j+1}}},$$

ここで, $m > 0$ であり, $f(a, b) = \sum_{i=0}^{\infty} a^{\frac{i(i+1)}{2}} b^{\frac{i(i-1)}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} a^{\frac{i(i-1)}{2}} b^{\frac{i(i+1)}{2}}$ は Ramanujan general theta function である.

$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{n+1}(T(2, 2m); q)$ からは次が得られる.

Theorem 1.3 (The Andrews-Gordon identities for the Ramanujan false theta function [Haj16, BM15]).

$$\Psi(q^{2m-1}, q) = (q; q)_\infty \sum_{k_{m-1} \leq \dots \leq k_2 \leq k_1} \frac{q^{\sum_{j=1}^{m-1} k_j(k_j+1)}}{(q; q)_{k_{m-1}}^2 \prod_{j=1}^{m-2} (q; q)_{k_j - k_{j+1}}},$$

ここで $m > 1$ であり, $\Psi(a, b) = \sum_{i=0}^{\infty} a^{\frac{i(i+1)}{2}} b^{\frac{i(i-1)}{2}} - \sum_{i=0}^{\infty} a^{\frac{i(i-1)}{2}} b^{\frac{i(i+1)}{2}}$ は Ramanujan general false theta function である. (例えば [MSZ09] を参照して頂きたい).

よく知られている事実だが, 色付きジョーンズ多項式は $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の既約表現から得られる絡み目の量子不変量である. さらに, $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ に対して得られる絡み目の量子不変量に対しても関式による定式化がされている. 先ほど述べたように, 関式を用いた二通りの計算方法から Andrews-Gordon type の q -級数の恒等式が得られた. よって, “ \mathfrak{sl}_3 色付きジョーンズ多項式に対して, 関式を用いた二通りの計算方法から Andrews-Gordon type の q -級数の一般化が得られるであろう.” という自然な予想ができる. しかし, 次の点が \mathfrak{sl}_2 の色付きジョーンズ多項式の場合と異なる.

- どのような枠付き絡み目に対して \mathfrak{sl}_3 色付きジョーンズ多項式の tail が存在するか知られていない.
- \mathfrak{sl}_3 色付きジョーンズ多項式における関式を用いた計算例, 計算公式がほとんどない.
- 当然, 実際に計算可能な “二通りの計算方法” もよく知られていない.
- そもそも \mathfrak{sl}_3 色付きジョーンズ多項式の具体的な計算例がほとんどない.

上記のように, 通常の色付きジョーンズ多項式と異なり, 未知な点が数多くある. 何よりも, $T(2, 2m+1)$ や $T(2, 2m)$ の \mathfrak{sl}_3 色付きジョーンズ多項式の計算例や計算方法が知られていない以上, それらの tail にあたる具体的な q -級数を求めることが出来ない. 筆者はこれらの確立されていない計算方法や計算公式を導出して, トーラス絡み目の tail を計算することで Andrews-Gordon type の恒等式の \mathfrak{sl}_3 における一般化を得た. 具体的には次のような仕事をした.

- [Yua17a] において, 既存の色付きジョーンズ多項式の計算に有効な関式を用いた計算公式の新しい証明方法を与えた.
- [Yua17a] において, 上記の証明方法を用いて \mathfrak{sl}_3 色付きジョーンズ多項式の計算に有効な様々な関式を用いた計算公式を与えた.
- [Yua17a] において, $T(2, 2m)$ を含むようなクラスの絡み目である二橋絡み目に対して \mathfrak{sl}_3 色付きジョーンズ多項式の明示公式を与えた.
- [Yua17b] において, [Yua17a] とは異なる方法の計算方法を与え, $T(2, 2m)$ の \mathfrak{sl}_3 色付きジョーンズ多項式の明示公式を異なる形で与えた.
- [Yua17b] において, $T(2, 2m)$ の \mathfrak{sl}_3 色付きジョーンズ多項式の二つの明示公式から, Andrews-Gordon type の恒等式を与えた.

本稿では, “関式を用いた計算とはどのようなものか?”, “二通りの計算方法とはどのようなものか?” という点を中心に解説したいと思う. 本稿は以下のような構成となっている. 2.3 節では, 色付きジョーンズ多項式の関式を用いた計算を解説する. 4 節では, \mathfrak{sl}_3 色付きジョーンズ多項式の関式を用いた計算を解説する. 5 節では, \mathfrak{sl}_3 色付きジョーンズ多項式から得られる Andrews-Gordon identity を紹介する. ちなみに, 4 節での計算方法やその証明の手法は, 2.3 節と非常に似ている. そのため, 2.3 節で関式を用いた計算に関して比較的詳しく解説するが, 4 節は得られた公式などを紹介するに留める. 詳しくは, [Yua17b] を参照して頂きたい.

本稿で用いる記号の準備をしておく. q -Pochhammer symbol を次で定義する.

$$(q; q)_k = \prod_{l=1}^k (1 - q^l).$$

今後、 $(q; q)_k$ を $(q)_k$ と省略することもある。 $k \leq n$ なる非負整数 k, n に対して、 q -二項係数を次で定義する。

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}$$

更に、 $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ を満たす非負整数 n_1, n_2, \dots, n_m に対して、 q -多項係数を次で定義する。

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m}_q = \frac{(q)_n}{(q)_{n_1} (q)_{n_2} \dots (q)_{n_m}}$$

q -整数を $[n] = \frac{q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$ により定義し、 q -整数による二項係数を $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]! [n-k]!}$ により定義する。ここで、 n, k は $n \geq k$ を満たす非負整数とし、 q -整数の階乗を $[n]! = \prod_{i=1}^n [i]$ により定義する。

2. KAUFFMAN BRACKET と色付きジョーンズ多項式

まず、Kauffman bracket を定義する。

Definition 2.1 (The Kauffman bracket). 絡み目図式全体から $\mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}})$ への写像を以下で定義する。

$$\begin{aligned} & \bullet \left\langle \begin{array}{c} \text{X} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle_2 = q^{\frac{1}{2}} \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle_2 + q^{-\frac{1}{2}} \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle_2, \\ & \bullet \left\langle G \sqcup \bigcirc \right\rangle_2 = -[2] \langle G \rangle_2, \end{aligned}$$

ここで G は任意の絡み目図式とする。この絡み目図式からの写像 $\langle \cdot \rangle_2$ を Kauffman bracket と呼ぶ。

上の定義について少し解説をする。結び目図式 D の Kauffman bracket $\langle D \rangle_2$ を考えよう。まず、一番目の関係式を D の各交点に適用することで、 D の全ての交点が消え、交点のない図式(円周の非交和)の線形和として表される。次に、二番目の関係式により“一番内側”の円周から順番に消去することが出来る。最終的に多項式に係数を持つ空の図式 $\tilde{J}(D; q) \langle \emptyset \rangle_2$ が得られる。さらに、Kauffman bracket はライデマイスター変形に対して不変であることが簡単に確かめられる。(実際、(R1'), (R2), (R3) の左右の図式の Kauffman bracket を計算してみればわかる。) よって、得られた多項式 $\tilde{J}(D; q)$ は D を絡み目図式にもつ枠付き絡み目の不変量となっている。この $\tilde{J}(D; q)$ を自明な結び目の Kauffman bracket による値で正規化した $J(D; q) = \tilde{J}(D; q) / [2]^{\text{linking}}$ が Jones [Jon85] により発見された有名な枠付き結び目の多項式不変量、枠付き結び目のジョーンズ多項式である。

Remark 2.2. $J(D; q)$ は結び目の“writhe”による補正を施すことで(枠付きではない)結び目の不変量となる。また、枠付き絡み目の場合も同様にして多項式不変量が得られる。

以上の方法で、Kauffman bracket からジョーンズ多項式が得られ、絡み目図式を用いてその計算が行える事がわかった。次に、色付きジョーンズ多項式の絡み目図式を用いた定義を与える。そのために、まずは図式 $\left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle_2$ で表される Jones-Wenzl 冪等元を定義する。絡み目図式内の arc に非負整数に与えられたラベル n は、その arc を n 本平行化して得られる絡み目図式を表す。

$$\begin{array}{c} n \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \Bigg\} n, \quad \begin{array}{c} l \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ k \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \Bigg\} \begin{array}{c} l \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ k \end{array}.$$

Definition 2.3 (The A_1 clasps, The Jones-Wenzl idempotents etc.).

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle_2 &= \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle_2 \\ \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle_2 &= \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle_2 + \frac{[n-1]}{[n]} \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle_2 \end{aligned}$$

右辺により左辺の Jones-Wenzl 冪等元(白い箱)が定義される。つまり、白い箱の挟まったラベル付きの絡み目図式に対する、Kauffman bracket は上の定義に従って、白い箱を“展開”することで計算ができる。この Jones-Wenzl 冪等元は以下のような性質を持つ。The A_1 clasp has the following properties.

Lemma 2.4 (Kauffman-Lins [KL94] etc.). For any positive integer n ,

これらの公式は本質的に初めて得られた公式というわけではない。しかし、これまでの証明では右辺の係数を $C_n(q)$ という多項式で置き、 n に関する帰納法で証明するものばかりであった。[Yua17a] では、整数の分割 (ヤング図形) と絡み目図式を対応付けることで、これら全ての公式を同じ方法で導出した。以下で、Proposition 3.1 を例にこの手法の概要を説明する。次の整数の分割に関する補題を用いる。

Lemma 3.3 (Andrews and Eriksson [AE04] etc.). 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ を s 組の正整数で $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, s-1$) を満たすものとし、 $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$ と定義する。与えられた非負整数 k と l に対して、 $\mathcal{P}(k, l)$ により、分割 λ で $0 \leq \lambda_1 \leq k$ か $0 \leq s \leq l$ を満たすもの全ての集合を表す。このとき、以下が成り立つ:

$$\binom{k+l}{k}_q = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(k,l)} q^{|\lambda|}.$$

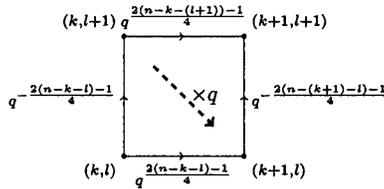
Proposition 3.1. まず、次の図式を考える。

$$\langle \sigma(k, l; n) \rangle_2 = \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram with two arcs and crossings} \end{array} \right\rangle_2.$$

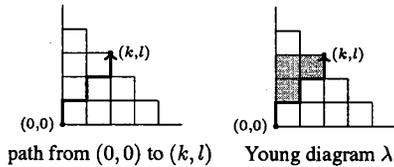
原理的には、左辺の図式から右辺の図式を得るには n でラベル付けされた二本の arc の交差を Kauffman bracket の定義により解消すればよい。この解消操作の途中で現れる図式が $\sigma(k, l; n)$ である。 $\langle \sigma(k, l; n) \rangle_2$ の交差を一箇所解消することにより、次の式が得られる。

$$(3.1) \quad \langle \sigma(k, l; n) \rangle_2 = q^{\frac{2(n-k-l)-1}{4}} \langle \sigma(k+1, l; n) \rangle_2 + q^{-\frac{2(n-k-l)-1}{4}} \langle \sigma(k, l+1; n) \rangle_2.$$

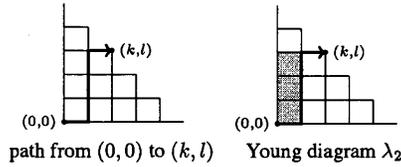
そして、 $0 \leq k+l \leq n$ を満たす非負整数 k, l に対して、 $\langle \sigma(k, l; n) \rangle_2$ を $(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に対応させる。そして、(3.1) を参考に、 (k, l) と $(k+1, l)$ を結ぶ辺に係数 $q^{\frac{2(n-k-l)-1}{4}}$ を、 (k, l) と $(k, l+1)$ を結ぶ辺に係数 $q^{-\frac{2(n-k-l)-1}{4}}$ を対応させる。



上の図を見て分かるように、上の経路を辿った場合と下の経路を辿った場合の係数の積を比べるとその差は q 倍となる。今、 $(0, 0)$ に対応しているのが左辺の図式である。そして、右辺の図式の各項は $k+l=n$ を満たす点 (k, l) に対応している。式 (3.1) から、右辺 $\langle \sigma(k, l; n) \rangle_2$ ($k+l=n$) の係数は $(0, 0)$ から (k, l) までの経路に現れる係数の積を全ての経路に関して足し合わせたものだとわかる。そして、これらの経路とヤング図形は以下のように対応する。



This Young diagram λ_1 corresponds to a partition $(2, 1)$.



This Young diagram λ_2 corresponds to a partition $(1, 1, 1)$.

一番上の経路 ((0,0) から (0,l) を通り (k,l) に行く経路) における係数の積が

$$\prod_{i=0}^{l-1} q^{-\frac{2(n-i)-1}{4}} \prod_{j=0}^{k-1} q^{\frac{2(n-l-j)-1}{4}}$$

であること, Lemma 3.3 を併せることで 右辺の $(\sigma(k, l; n))_2$ の係数が以下のように計算できる.

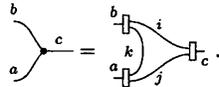
$$\prod_{i=0}^{l-1} q^{-\frac{2(n-i)-1}{4}} \prod_{j=0}^{k-1} q^{\frac{2(n-l-j)-1}{4}} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(k, l)} q^{|\lambda|} = q^{-\frac{n^2+2k^2}{4}} \binom{n}{k}_q.$$

このようにして, 公式を得ることが出来た. □

Remark 3.4. 上に挙げた, その他の公式も全く同様の手法で計算することが出来る. この手法は汎用性が高く, その他の図式に対する Kauffman bracket の計算にも用いることが出来ると思われる. さらに, 平面ではなく 3次元など高次元の格子内の経路と図式を対応させて公式を得ることも出来るのではないかと期待できる.

3.2. 3 価グラフを用いた計算方法. ここで挙げる 3 価グラフを用いた計算はよく知られているため簡単に説明する. 詳しくは [KL94]などを参照して頂きたい.

ラベル付きの 3 価グラフを次のように 白い箱を持つラベル付きの図式に対応させる: 許容的なラベル付け (a, b, c) に対して, $i = \frac{b+c-a}{2}, j = \frac{c+a-b}{2}, k = \frac{a+b-c}{2}$ とした時,



ここで, (a, b, c) が許容的な定義は次で与えられる.

Definition 3.5. 非負整数の三組 (a, b, c) が,

- $a + b + c$ は偶数,
- $a + b - c, b + c - a, c + a - b$ が全て非負整数,

を満たす時に許容的という.

次の記法を用いる:

- $\Delta_n = \left\langle \begin{array}{c} \bigcirc \\ n \end{array} \right\rangle_2,$
- $\theta(a, b, c) = \left\langle \begin{array}{c} \bigcirc \\ a \quad b \\ c \end{array} \right\rangle_2,$
- $\text{Tet} \begin{bmatrix} a & b & j \\ c & d & i \end{bmatrix} = \left\langle \begin{array}{c} \triangle \\ a \quad b \quad c \\ d \quad i \quad j \end{array} \right\rangle_2,$
- $\left\{ \begin{array}{c} a & b & j \\ c & d & i \end{array} \right\} = \frac{\text{Tet} \begin{bmatrix} a & b & j \\ c & d & i \end{bmatrix} \Delta_j}{\theta(a, d, j)\theta(b, c, j)},$

ここで与えられている $\Delta_n, \theta(a, b, c)$ や $\text{Tet} \begin{bmatrix} a & b & j \\ c & d & i \end{bmatrix}$ の値は具体的に q -整数を用いて計算されている. 詳しくは [KL94] や [MV94] を参照して頂きたい. 3 価グラフを用いた計算では次の公式が重要なので紹介しておく.

Proposition 3.6 (Recoupling Theorem). 与えられた非負整数 a, b, c, d, i は $(a, b, i), (c, d, i)$ 共に許容的とする. このとき,

$$\left\langle \begin{array}{c} b & & c \\ \diagdown & \diagup & \\ i & & \\ \diagup & \diagdown & \\ a & & d \end{array} \right\rangle_2 = \sum_{(a,d,j), (b,c,j): \text{許容的}} \begin{Bmatrix} b & c & j \\ a & d & i \end{Bmatrix} \left\langle \begin{array}{c} b & & c \\ \diagdown & \diagup & \\ & & j \\ \diagup & \diagdown & \\ a & & d \end{array} \right\rangle_2$$

右辺の係数は量子 $6j$ -シンボルと呼ばれる. また, 次の公式もよく用いられる.

$$(3.2) \quad \begin{array}{c} b \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \\ c \end{array} = (-1)^{\frac{a-b-c}{2}} q^{-\frac{1}{6}(a(a+2)-b(b+2)-c(c+2))} \begin{array}{c} c \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \\ b \end{array}.$$

この公式は Proposition 3.2 のように full twist を消去する役割を果たす.

これらの手法を用いて絡み目の色付きジョーンズ多項式を計算することが出来る. そして, スケイン関係式を用いた計算方法で得たトラス絡み目の色付きジョーンズ多項式の極限 “tail” が Theorem 1.2, 1.3 の右辺, 3 価グラフを用いた計算方法で得た “tail” が左辺となる. tail については, 以降の節で \mathfrak{sl} 色付きジョーンズ多項式の tail を具体的に計算するので, ここでは省略することにする. 詳しくは Dasbach-Lin [DL06, DL07] や Garoufalidis and Lê [GL15], Hajij [Haj16]などを参照していただきたい.

4. A_2 BRACKET と \mathfrak{sl}_3 色付きジョーンズ多項式

この節では, Kuperberg [Kup96] により与えられた A_2 bracket と A_2 clasp を紹介する. これらは, それぞれ Kauffman bracket (A_1 bracket) と Jones-Wenzl 冪等元 (A_1 clasp) にあたるものである.

各 arc に向きが付けられた絡み目図式に対して, 次により A_2 bracket を定める.

Definition 4.1 (The A_2 bracket). 向き付けられた絡み目図式から $\mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}})$ への写像を以下で定義する.

- $\left\langle \begin{array}{c} \text{X} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle_3 = q^{\frac{1}{2}} \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle_3 - q^{-\frac{1}{2}} \left\langle \begin{array}{c} \text{O} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle_3,$
- $\left\langle \begin{array}{c} \text{X} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle_3 = q^{-\frac{1}{2}} \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle_3 - q^{\frac{1}{2}} \left\langle \begin{array}{c} \text{O} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle_3,$
- $\left\langle \begin{array}{c} \text{O} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle_3 = \left\langle \begin{array}{c} \text{O} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle_3 + \left\langle \begin{array}{c} \text{O} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle_3,$
- $\left\langle \begin{array}{c} \text{O} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle_3 = [2] \left\langle \begin{array}{c} \text{O} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle_3,$
- $\left\langle G \sqcup \begin{array}{c} \text{O} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle_3 = [3] \langle G \rangle_3.$

上の関係式により, \mathbb{R}^2 上の向き付けられた絡み目図式 D の A_2 bracket $\langle D \rangle_3$ は $J^{\mathfrak{sl}_3}(D; q)(q)(\emptyset)$ となり, 得られた多項式 $J^{\mathfrak{sl}_3}(D; q)$ は D から得られる向き付けられた枠付き絡み目の不変量になっている.

次に, 本稿で計算する \mathfrak{sl}_3 色付きジョーンズ多項式を定義するために重要な役割を果たす, A_2 clasp を定義する. これは, Kauffman bracket における Jones-Wenzl 冪等元に相当するものである. 以後, Kauffman bracket の時と同様に, 非負整数 n でラベルの付いた arc は, その arc を n 本平行化したものを表すこととする. さらに, 平行化したものの向きはラベルの付いた arc と同じとする.

Definition 4.2. (The A_2 clasp of type $(n, 0)$ [Kup96])

$$\left\langle \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle_3 = \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle_3,$$

$$\left\langle \begin{array}{c} \boxed{n} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle_3 = \left\langle \begin{array}{c} \boxed{n-1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle_3 - \frac{[n-1]}{[n]} \left\langle \begin{array}{c} \boxed{n-1} \quad \boxed{n-2} \quad \boxed{n-1} \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \end{array} \right\rangle_3.$$

Definition 4.3 (the A_2 clasp of type (n, m) [Kup96, OY97]).

$$\left\langle \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\rangle_3 = \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\rangle_3.$$

さて, Kauffman bracket と Jones-Wenzl 冪等元を使って色付きジョーンズ多項式が定義できたように, A_2 bracket と A_2 clasp を使って \mathfrak{sl}_3 色付きジョーンズ多項式を定義しよう.

Definition 4.4 (\mathfrak{sl}_3 色付きジョーンズ多項式). L を向き付けられた棒付き絡み目とし, D を L の向き付けられた絡み目図式とする. さらに, D の各 arc に対し, それと逆の向きを付けた平行な arc を左側にひとつ取る. そして元の arc に n , 平行化した arc に m という非負整数によるラベル付けをして, それら二つの arc をまたぐように type (n, m) の A_2 clasp を表す白い箱を挟んで得られた図式を $D(n, m)$ とする. このとき, 向き付けられた棒付き絡み目 L の \mathfrak{sl}_3 色付きジョーンズ多項式 $J_{(n,m)}^{\mathfrak{sl}_3}(L; q)$ を以下で定義する.

$$J_{(n,m)}^{\mathfrak{sl}_3}(L; q) = \bar{J}_{(n,m)}^{\mathfrak{sl}_3}(L; q) / \left\langle m \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\rangle_3,$$

ここで,

$$\langle D(n, m) \rangle_3 = \bar{J}_{(n,m)}^{\mathfrak{sl}_3}(L; q) \langle \emptyset \rangle_3$$

とする.

このように, 絡み目図式と A_2 bracket を用いて \mathfrak{sl}_3 色付きジョーンズ多項式を定義することが出来た. 次に, 実際にこの不変量を計算するために筆者が得た A_2 bracket に関する公式を紹介する.

4.1. A_2 bracket に対するスケイン関係式を用いた計算方法, Kauffman bracket の節で説明したのと同様に, A_2 bracket の定義と整数の分割に関する補題を組み合わせる事で次のような公式が得られた.

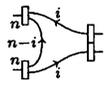
Theorem 4.5 (m full twists formula for the A_2 bracket).

$$\left\langle \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\rangle_3 = q^{-2\frac{m}{3}(n^2+3n)} \sum_{0 \leq k_m \leq \dots \leq k_1 \leq n} q^{n-k_m} q^{\sum_{i=1}^m (k_i^2+2k_i)} \times \frac{(q)_n}{(q)_{k_m}} \begin{bmatrix} n \\ k'_1, k'_2, \dots, k'_m, k_m \end{bmatrix}_q \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\rangle_3,$$

ここで, $i = 0, 1, \dots, m-1$ に対して, k_i, k'_i は $k_0 = n, k'_{i+1} = k_i - k_{i+1}$ なる整数とする.

この他にも, Theorem 3.1 に対応する colored A_2 bracket スケイン関係式など, 様々な公式が得られたが, 図式に対して新たな記号を定義しなければならない事や, 本稿では用いない事から省略させて頂く. 詳しくは [Yua17a] を参照して頂きたい.

4.2. A_2 bracket の 3 価グラフを用いた計算方法. 一般に, \mathfrak{sl}_3 に対するスケインを 3 価グラフを用いて表す方法は既に知られている. しかしながら, それらの図式の値や量子 $6j$ -シンボルの具体的な値などは知られていない. 筆者は, これらの値をラベルに制限を加えた上で具体的に計算した. 非負整数 n と $0 \leq i \leq n$ に対して,



を $\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}$ で表すことにする. さらに, 次の記法を用いる:

- $\Delta(m, n) = \left\langle m \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\rangle_3,$

- $\theta(n, n, (i, i)) = \left\langle \frac{n!}{n} \right\rangle_3,$
- $\text{Tet} \begin{bmatrix} n & n & (j, j) \\ n & n & (i, i) \end{bmatrix} = \left\langle \frac{n!}{n} \right\rangle_3,$
- $\left\{ \begin{matrix} n & n & (j, j) \\ n & n & (i, i) \end{matrix} \right\} = \frac{\text{Tet} \begin{bmatrix} n & n & (j, j) \\ n & n & (i, i) \end{bmatrix} \Delta(j, j)}{\theta(n, n, (j, j))^2}.$

筆者は [Yua17b] で、これらの値を具体的に計算した.

Lemma 4.6.

- (1) $\Delta(i, j) = \frac{[i+1][j+1][i+j+2]}{[2]},$
- (2) $\theta(n, n, (i, i)) = \sum_{k=0}^i (-1)^k \frac{[i]^2}{[2i+1]} \frac{\Delta(n, 0)^2}{\Delta(n-i+k, 0)} = \frac{[n+i+2]}{[n]} \Delta(i, i),$
- (3) $\text{Tet} \begin{bmatrix} n & n & (j, j) \\ n & n & (i, i) \end{bmatrix} = \sum_{k=\max\{0, i+j-n\}}^i (-1)^k \frac{[i]^2}{[2i+1]} \frac{[n-j]}{[n]} \theta(n, n, (j, j)).$

また、次のような変換公式も成り立つ.

Proposition 4.7 (Recoupling Theorem).

$$\left\langle \frac{n!}{n} \right\rangle_3 = \sum_{j=0}^n \left\{ \begin{matrix} n & n & (j, j) \\ n & n & (i, i) \end{matrix} \right\} \left\langle \frac{n!}{n} \right\rangle_3.$$

次に、これらの公式を用いて計算した s_3 色付きジョーンズ多項式の具体例と tail と呼ばれる極限について紹介する.

5. s_3 色付きジョーンズ多項式の TAIL と s_3 ANDREWS-GORDON 恒等式

まずは、公式を用いることで得られる二橋絡み目に対する s_3 色付きジョーンズ多項式の明示公式を紹介する.

5.1. 二橋絡み目の s_3 色付きジョーンズ多項式. 二橋絡み目 $[2a_1, 2a_2, \dots, 2a_l]$ のタイプ $(n, 0)$ の s_3 色付きジョーンズ多項式

$J_{(n,0)}^{s_3}([2a_1, 2a_2, \dots, 2a_l]; q)$ は次で定義される.

$$J_{(n,0)}^{s_3}([2a_1, 2a_2, \dots, 2a_l]; q) = \begin{cases} \left\langle \frac{n!}{n} \right\rangle_3 / \left\langle \frac{n!}{n} \right\rangle_3 & \text{if } l \text{ is odd,} \\ \left\langle \frac{n!}{n} \right\rangle_3 / \left\langle \frac{n!}{n} \right\rangle_3 & \text{if } l \text{ is even} \end{cases}$$

ここで、 a_1, a_2, \dots, a_l は 0 でない整数とし、

$$\boxed{m} = \begin{cases} \text{right-handed } m \text{ half twists} & \text{if } m > 0, \\ \text{left-handed } m \text{ half twists} & \text{if } m < 0, \end{cases}$$

とする.

Theorem 5.1 (スケイン関係式を用いた計算方法により得られた公式 [Yua17a]).

$$\begin{aligned}
 & J_{(n,0)}^{sl_3}([2a_1, 2a_2, \dots, 2a_l]; q) \\
 &= \prod_{j=0}^{l-1} \sum_{0 \leq k_{|a_j+1}^{(j+1)} \leq \dots \leq k_1^{(j+1)} \leq K_j} (-1)^{K_j - k_{|a_j+1}^{(j+1)}} q^{\epsilon_{j+1}(K_j - k_{|a_j+1}^{(j+1)})} q^{\epsilon_{j+1} \sum_{i=1}^{|a_j+1|} (k_i^{(j+1)^2} + 2k_i^{(j+1)})} \\
 & \times \frac{(q^{\epsilon_j+1})_{K_j}}{(q^{\epsilon_j+1})_{k_{|a_j+1}^{(j+1)}}} \left(k_1^{(j+1)'}, k_2^{(j+1)'}, \dots, k_{|a_j+1}^{(j+1)'}, k_{|a_j+1}^{(j+1)} \right)_{q^{\epsilon_j+1}} \\
 & \times q^{-(n-K_1)} \frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{K_1+1})(1-q^{K_1+2})},
 \end{aligned}$$

ここで, $\epsilon_{j+1} = \frac{a_j+1}{|a_j+1}$, $K_0 = n$, $K_j = n - k_1^{(j)}$ とし, $k_0^{(j)} = K_j$, $k_{|a_j+1}^{(j+1)' } = k_i^{(j)} - k_{i+1}^{(j)}$ として定義する.

Theorem 5.2 (3個グラフを用いた計算方法により得られた公式 [Yua17b]).

$$\begin{aligned}
 & J_{(n,0)}^{sl_3}([2a_1, 2a_2, \dots, 2a_l]; q) \\
 &= \sum_{0 \leq i_1, i_2, \dots, i_l \leq n} \frac{\Delta(i_1, i_1) \theta(n, n, (i_1, i_1))}{\Delta(n, 0) \theta(n, n, (i_1, i_1))} q^{-\frac{2}{3}(n^2+3n)(a_1+a_2+\dots+a_l)} q^{\sum_{k=1}^l a_k (i_k^2 + i_k)} \\
 & \times \prod_{k=1}^{l-1} \left\{ \begin{matrix} n & n & (i_{k+1}, i_{k+1}) \\ n & n & (i_k, i_k) \end{matrix} \right\}.
 \end{aligned}$$

Remark 5.3. 二橋絡み目は $(2, 2m)$ -トラス絡み目 $T(2, 2m)$ を含むようなクラスの絡み目である. 実際, $T(2, 2m) = [2m]$ である.

5.2. $T(2, 2m)$ に対する sl_3 色付きジョーンズ多項式の tail. Armond [Arm13] や, Garoufalidis-Lê [GL15] により, 交代絡み目などの絡み目に対する sl_2 色付きジョーンズ多項式に対しては, その係数の安定性より tail という極限が存在することが知られている. 既に1節で紹介したように, $(2, k)$ -トラス絡み目の sl_2 色付きジョーンズ多項式においては, その明示公式を二通りの方法を与え, それぞれの極限を求めることで Rogers-Ramanujan identity の一般化である Andrews-Gordon identity という q -級数の恒等式を得ることができる. k が奇数の時には Ramanujan のテータ関数, k が偶数の時には Ramanujan の false テータ関数に対する Andrews-Gordon identity が得られる. 筆者は $(2, 2m)$ -トラス絡み目に関して前節で得られた二つの公式を用いて, tail にあたる sl_3 色付きジョーンズ多項式の極限を考えた. これにより得られた q -級数の恒等式は, Ramanujan の false テータ関数に対する Andrews-Gordon identity の結び目理論における一般化となっている.

まずは, ここでいう q -級数の極限というものを定義する.

Definition 5.4. 変数 q の形式的冪級数の族 $\{f_n(q) \in \mathbb{Z}[[q]] \mid n \geq 1\}$ を考える. $f(q) \in \mathbb{Z}[[q]]$ が存在して, 任意の正整数 n に対して, $f_n(q) = f(q)$ が $\mathbb{Z}[[q]]/q^{n+1}\mathbb{Z}[[q]]$ で成り立つとき, $\{f_n(q)\}_n$ の極限が $f(q)$ であるといい, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(q) = f(q)$ と書く.

以下, m は正の整数とする.

$(2, 2m)$ -トラス絡み目の sl_3 色付きジョーンズ多項式は $J_{(n,0)}^{sl_3}([2m]; q)$ により与えられる. この多項式の最低次数は $-\frac{2m}{3}(n^2+3n)+n$ となり, $q^{\frac{2m}{3}(n^2+3n)-n} J_{(n,0)}^{sl_3}([2m]; q)$ を考えることで q -多項式の族が得られる. 定理 5.2 の表示より得られる族を $\{\Psi_n^{(m)}(q)\}_n$ とし, 定理 5.1 の表示より得られる族を $\{G_n^{(m)}(q)\}_n$ とする. ここで,

$$\begin{aligned}
 \Psi_n^{(m)}(q) &= \sum_{i=0}^n q^{-2i} q^{m(i^2+2i)} \frac{(1-q^{i+1})^3 (1+q^{i+1})}{(1-q)(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}, \\
 G_n^{(m)}(q) &= \sum_{0 \leq k_m \leq \dots \leq k_2 \leq k_1 \leq n} q^{-2k_m} q^{\sum_{i=1}^m (k_i^2+2k_i)} \frac{(q)_n^2}{(q)_{k_m}^2 (q)_{n-k_1} (q)_{k_1-k_2} \dots (q)_{k_{m-1}-k_m}} \\
 & \times \frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{n-k_m+1})(1-q^{n-k_m+2})},
 \end{aligned}$$

である。上の式において、 $(q)_n$ は q -Pochhammer symbol $(q; q)_k = \prod_{l=1}^k (1 - q^l)$ を表すものとする。

Remark 5.5. 当然、同じ絡み目の不変量なので $\Psi_n^{(m)}(q) = G_n^{(m)}(q)$ である。

それぞれの極限を求めることで以下の恒等式が得られる。

Theorem 5.6 (The \mathfrak{sl}_3 Andrews-Gordon identity for the Ramanujan false theta function [Yua17b]).

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{-2i} q^{m(i^2+2i)} \frac{(1 - q^{i+1})^3 (1 + q^{i+1})}{1 - q} = (q)_{\infty} \sum_{0 \leq k_m \leq \dots \leq k_2 \leq k_1} \frac{q^{-2k_m} q^{\sum_{j=1}^m (k_j^2 + 2k_j)}}{(q)_{k_m}^2 (q)_{k_1 - k_2} \dots (q)_{k_{m-1} - k_m}}.$$

Bringmann-Kasdzian-Milas [BKM17, Section 9 (5)] において、この q -級数の恒等式が異なる立場からも、 \mathfrak{sl}_2 における Andrews-Gordon 恒等式の \mathfrak{sl}_3 への一般化であるという事が言及されている。

REFERENCES

- [AE04] George E. Andrews and Kimmo Eriksson, *Integer partitions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004. MR 2122332
- [And74] George E. Andrews, *An analytic generalization of the Rogers-Ramanujan identities for odd moduli*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **71** (1974), 4082–4085. MR 0351985
- [Arm13] Cody Armond, *The head and tail conjecture for alternating knots*, Algebr. Geom. Topol. **13** (2013), no. 5, 2809–2826. MR 3116304
- [BKM17] Kathrin Bringmann, Jonas Kasdzian, and Antun Milas, *Higher depth quantum modular forms, multiple Eichler integrals, and \mathfrak{sl}_3 false theta functions*, arXiv:1704.06891 (2017).
- [BM15] Kathrin Bringmann and Antun Milas, *\mathcal{W} -algebras, false theta functions and quantum modular forms, I*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2015), no. 21, 11351–11387. MR 3456046
- [DL06] Oliver T. Dasbach and Xiao-Song Lin, *On the head and the tail of the colored Jones polynomial*, Compos. Math. **142** (2006), no. 5, 1332–1342. MR 2264669
- [DL07] ———, *A volumish theorem for the Jones polynomial of alternating knots*, Pacific J. Math. **231** (2007), no. 2, 279–291. MR 2346497
- [GL15] Stavros Garoufalidis and Thang T. Q. Lê, *Nahm sums, stability and the colored Jones polynomial*, Res. Math. Sci. **2** (2015), Art. 1, 55. MR 3375651
- [Haj16] Mustafa Hajij, *The tail of a quantum spin network*, Ramanujan J. **40** (2016), no. 1, 135–176. MR 3485997
- [Haj17] ———, *The colored Kauffman skein relation and the head and tail of the colored Jones polynomial*, J. Knot Theory Ramifications **26** (2017), no. 3, 1741002, 14. MR 3627702
- [Jon85] V. F. R. Jones, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985), no. 1, 103–111. MR 766964
- [KL94] Louis H. Kauffman and Sostenes L. Lins, *Temperley-Lieb recoupling theory and invariants of 3-manifolds*, Annals of Mathematics Studies, vol. 134, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994. MR 1280463 (95c:57027)
- [Kup96] Greg Kuperberg, *Spiders for rank 2 Lie algebras*, Comm. Math. Phys. **180** (1996), no. 1, 109–151. MR 1403861
- [Mas03] Gregor Masbaum, *Skein-theoretical derivation of some formulas of Habiro*, Algebr. Geom. Topol. **3** (2003), 537–556 (electronic). MR 1997328
- [MSZ09] James McLaughlin, Andrew V. Sills, and Peter Zimmer, *Rogers-Ramanujan computer searches*, J. Symbolic Comput. **44** (2009), no. 8, 1068–1078. MR 2523768
- [MV94] G. Masbaum and P. Vogel, *3-valent graphs and the Kauffman bracket*, Pacific J. Math. **164** (1994), no. 2, 361–381. MR 1272656
- [OY97] Tomotada Ohtsuki and Shuji Yamada, *Quantum $SU(3)$ invariant of 3-manifolds via linear skein theory*, J. Knot Theory Ramifications **6** (1997), no. 3, 373–404. MR 1457194
- [Yua17a] Wataru Yuasa, *The \mathfrak{sl}_3 colored Jones polynomials for 2-bridge links*, J. Knot Theory Ramifications **26** (2017), no. 7, 1750038, 37. MR 3660093
- [Yua17b] ———, *A q -series identity via the \mathfrak{sl}_3 colored Jones polynomials for the $(2, 2m)$ -torus link*, to appear in Proceedings of the American Mathematical Society (arXiv:1612.02144) (2017).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY, 2-12-1 OOKAYAMA, MEGURO-KU, TOKYO 152-8551, JAPAN
E-mail address: yuasa.v.aa@m.titech.ac.jp