

線形シア一流上を進行する定常水面波に対する長波モデル

茨城大学 理学部 数学・情報数理領域 村重 淳 (Sunao Murashige)

Department of Mathematics and Informatics, Ibaraki University

概要

本研究では、鉛直方向に速度分布が直線的に変化する流れ（線形シア一流）の水面を、一定速度で波形を変えずに進行する周期的な長波の数学モデルについて考える。特に、等角写像を用いて流場を写した複素平面上で、新しいタイプの強非線形・弱非線形モデルを導出する。このモデルは波長が水深と比べて長いことだけを仮定しているので、比較的振幅の大きな波に対しても適用できる。提案モデルの解から得られる波形は波の振幅とともに大きく変化し、波面が巻き込む場合があることを数値計算で示した。

1 はじめに

海や川における水平方向の流れは、水面や水底の影響を受けて鉛直方向に速度分布が変化することが知られている。このような流れ（シア一流）が水面を伝播する波の運動に与える影響を考えることは重要である [10, 2, 3]。本研究では、Fig.1 のような鉛直方向に速度が直線的に変化する流れ（線形シア一流）の水面を、一定速度で波形を変えずに進行する波の2次元運動について考える。

シア一流の渦度はゼロではないので、一般に渦無し運動の理論を適用できない。ただし、2節で述べるように、線形シア一流は渦度が一定であるので、その摂動が2次元運動である場合は渦無し運動の理論を適用できる。そのため、線形シア一流上の水面波に関する研究は、比較的古くから行われている。Euler 方程式を近似せずに数値的に解く研究は、水深が無限大の場合の周期的な深水波に対しては Simmen & Saffman [9], Choi [3] ら、有限水深の場合の周期的な波に対しては Teles da Silva & Peregrine [10], Okamoto & Shōji [7], Vanden-Broeck [11] らにより行われた。Okamura & Oikawa [8], Francius & Kharif [4] らは、Euler 方程式の解の安定性を数値的に調べた。これらの一連の数値的研究により、シア一流が存在すると水面波の波形は大きく変化し、波面が巻き込む定常進行波 (overhanging waves) が発生する場合があることがわかった (4節 Fig.8 参照)。このとき、水面変位を $y = \eta(x)$ (Fig.1 参照) のように表すと、 $\eta = \eta(x)$ は水平方向の座標 x の多価関数になる。ただし、振幅が大きい場合に対して Euler 方程式の高精度な数値解を得ることは難しい。体系的にシア一流の影響を調べるためには、現象の本質をモデル化した近似方程式の導出とその解析が必要である。水深に対して波長が長く、振幅が比較的小さい場合に対して、Benjamin [1], Freeman & Johnson [5] らは線形シア一流がある場

合の弱非線形・弱分散性モデルを導き, KdV 方程式と同じタイプの近似モデルが得られることを示した. Choi [2] は水深に対して波長が長いことだけを仮定する強非線形・弱分散性モデルを導いた.

Choi [2] のモデルは振幅が小さいことを仮定していないので, 振幅の増加にともなう波形の変化をとらえることができている. ただし, 水面変位を表す関数 $\eta = \eta(x)$ が x の 1 価関数であることを仮定しているので, 波面が巻き込む解 overhanging waves (4 節 Fig.8 参照) をモデル化することはできない. そこで本研究では, 等角写像を用いて流場を適当な複素平面に写すことにより, 水面に沿って変化する変数を独立変数の一つとして選ぶことを試みる. 流場を写した複素平面で長波に対して Choi [2] と同じ近似を適用し, 新しいタイプの強非線形・弱分散性モデルを導出する. また, このモデルの性質を, 物理平面で得られる従来のモデルや Euler 方程式を近似せずに数値的に求めた解と比較することにより検討する.

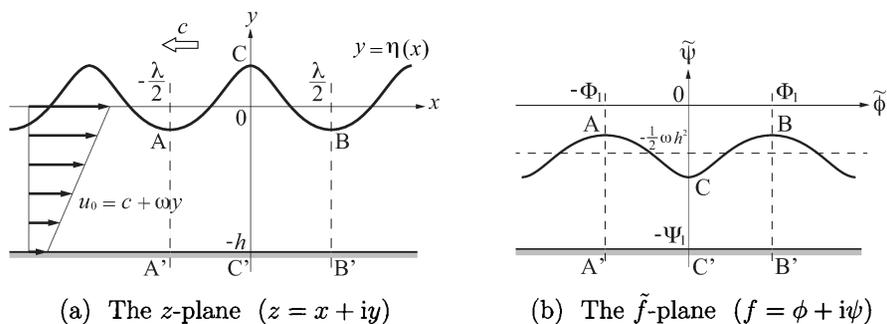


Fig.1 Surface waves on a linear shear current.

(a) the physical plane (the z -plane) and (b) the complex velocity potential \tilde{f} -plane. In the \tilde{f} -plane, the water surface $y = \eta(x)$ is mapped onto $\tilde{\psi} = -\frac{1}{2}\omega(\eta + h)^2$ (see (20)).

2 線形シア一流上を進行する定常水面波

2.1 定式化

Fig.1 のように, 水深 h が一定で線形シア一流が存在する水路の表面を, 一方向に一定速度 c で波形を変えずに進む周期的な波の, 進行方向に沿った鉛直断面における 2 次元運動を, 波と一緒に移動する座標系で考える. 波の山 C の下の静水面を原点とする (x, y) 座標平面を考え, 波は左方向に進むとする. このとき, 線形シア一流の速度場 (u_0, v_0) は次式で与えられる.

$$u_0 = c + \omega y \quad \text{and} \quad v_0 = 0. \quad (1)$$

ここで, ω は実定数を表す. この流場の渦度 Ω_0 は

$$\Omega_0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = -\omega, \quad (2)$$

となるので一定である。このような線形シア一流の水面に波が発生するとき、その速度場 (u, v) は次のように表すことができる。

$$\begin{cases} u = u_0 + \hat{u} = c + \omega y + \hat{u} , \\ v = v_0 + \hat{v} = \hat{v} . \end{cases} \quad (3)$$

このとき、非粘性・非圧縮流体の2次元運動において渦度は保存される、すなわち

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \Omega_0 = -\omega . \quad (4)$$

したがって、速度場 (3) の摂動部分 (\hat{u}, \hat{v}) の渦度 $\hat{\Omega}$ は

$$\hat{\Omega} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} = 0 , \quad (5)$$

となるので、線形シア一流 (1) に対する摂動流の2次元運動は渦無しである。また、速度場 (3) を

$$\begin{cases} u = u_0 + \hat{u} = \omega y + \tilde{u} & \text{with } \tilde{u} = c + \hat{u} , \\ v = v_0 + \hat{v} = \tilde{v} & \text{with } \tilde{v} = \hat{v} , \end{cases} \quad (6)$$

のように表すと、 (\tilde{u}, \tilde{v}) の渦度もゼロ、すなわち

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = 0 , \quad (7)$$

となるので、 (\tilde{u}, \tilde{v}) は複素速度ポテンシャル $\tilde{f} = \tilde{\phi} + i\tilde{\psi}$ を用いて次のように表すことができる。

$$\frac{d\tilde{f}}{dz} = \tilde{u}(x, y) - i\tilde{v}(x, y) , \quad (8)$$

ここで、 $z = x + iy$ は複素座標を表し、 $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ の間には次のように関係がある。

$$\begin{cases} \tilde{u}(x, y) = c + \hat{u}(x, y) = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} , \\ \tilde{v}(x, y) = \hat{v}(x, y) = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} . \end{cases} \quad (9)$$

一方、非圧縮性流体の2次元運動 (u, v) は流れ関数 ψ を用いて

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{and} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} , \quad (10)$$

のように表すことができる。この流れ関数 ψ と渦無し運動を表す流れ関数 $\tilde{\psi} = \text{Im}\{\tilde{f}\}$ の関係は次式で与えられる。

$$\psi = \frac{1}{2}\omega(y+h)^2 + \tilde{\psi} . \quad (11)$$

水底 $y = -h$ と水面 $y = \eta$ では ψ は一定であるので、

$$\psi(y = -h) = -\Psi_1 (= \text{const.}) \quad \text{and} \quad \psi(y = \eta) = 0 , \quad (12)$$

とする。このとき、

$$\int_{-h}^{\eta} u \, dy = \int_{-h}^0 u_0 \, dy = \left(c - \frac{1}{2} \omega h \right) h , \quad (13)$$

と

$$\int_{-h}^{\eta} u \, dy = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \, dy = \Psi_1 , \quad (14)$$

より、波の進行速度 c と Ψ_1 の関係

$$\Psi_1 = \left(c - \frac{1}{2} \omega h \right) h , \quad (15)$$

を得る。

水底と水面の境界条件は、それぞれ

$$v = 0 \quad \text{at } y = -h , \quad (16)$$

と Bernoulli の定理

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + g\eta = R \quad \text{at } y = \eta(x) , \quad (17)$$

により与えられる。(17) の g は重力加速度を、 R は実定数を表す。

2.2 Euler 方程式の数値解

Teles da Silva & Peregrine [10], Okamoto & Shōji [7], Vanden-Broeck [11] らは、2.1 節の定式化のもとで支配方程式 (Euler 方程式) を近似せずに、すなわち波長や振幅に対する仮定はせずに、数値的に解く方法を開発した [10, 7, 11]。Fig.2 は波長 λ と水深 h の比が $\lambda/h = 20$ のときの波形を、Teles da Silva & Peregrine [10] の方法にしたがい求めた計算例を表す。この図より、シア一流の渦度 $\Omega = -\omega$ と波の振幅の増加とともに波形は大きく変化し、Fig.2(c) のように波面が巻き込む解 (overhanging solutions) が得られる場合があることがわかる。Fig.3 はシア一流の渦度の値を固定 ($\omega^* = \omega/\sqrt{g/\lambda} = 11$) して、波長と水深の比 λ/h を変えたときの波形の変化を表している。波長の増加とともに、波面の巻き込みが小さくなることがわかる。

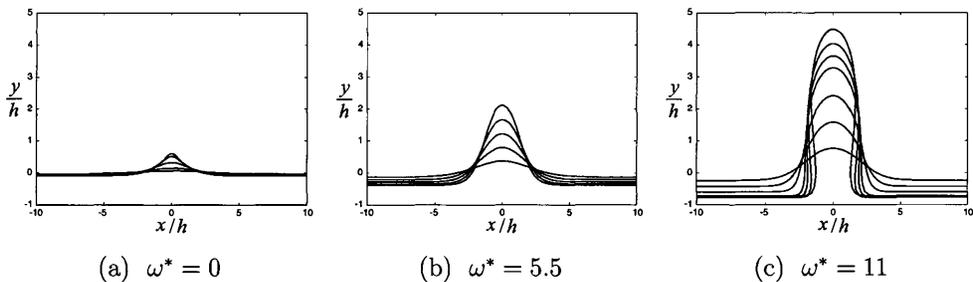


Fig.2 Computed results of wave profile for the full Euler equations.

The vorticity $\Omega_0 = -\omega$ of the linear shear current is changed with the wavelength-to-depth ratio fixed to $\lambda/h = 20$. $\omega^* = \omega/\sqrt{g/\lambda}$.

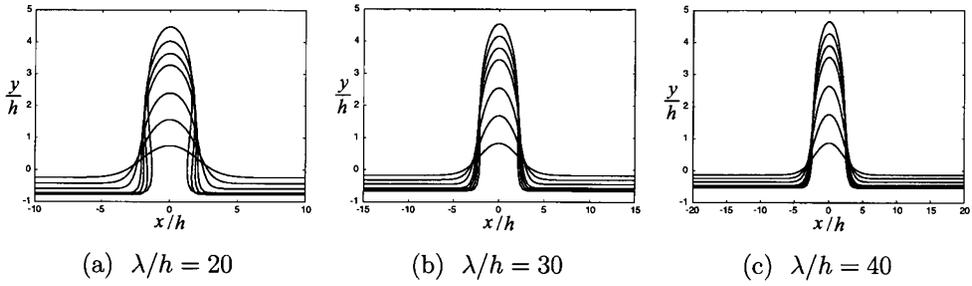


Fig.3 Computed results of wave profile for the full Euler equations.

The wavelength-to-depth ratio λ/h is changed with the vorticity $\Omega_0 = -\omega$ of the linear shear current fixed to $\omega^* = 11$. $\omega^* = \omega/\sqrt{g/\lambda}$.

2.3 長波に対する物理平面における強非線形・弱分散性モデル

水深に対して波長が十分長い (h/λ が小さい) 場合, 水平方向の微分 $h\partial/\partial x$ が小さいことを仮定できる. このことを利用して, Benjamin [1] と Choi [2] は, 水面変位 $\eta = \eta(x)$ に対する次のような強非線形・弱分散性モデルを導いた.

$$\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 = R(\eta)(\eta_C - \eta)(\eta - \eta_B), \quad (18)$$

ここで, η_B と η_C は波の谷 B と山 C における水面変位を, $R(\eta) = 3Q_1(\eta)/Q_2(\eta)$ は次式により与えられる η に関する有理関数を表す.

$$Q_1(\eta) = \frac{1}{F_h^2 \cdot h^3} \left(\frac{ch}{\Psi_1}\right)^2 (\eta + h) - \frac{1}{(\eta_B + h)(\eta_C + h)} + \frac{1}{12} \left(\frac{\omega}{\Psi_1}\right)^2 (\eta + h)(\eta + \eta_B + \eta_C + 3h),$$

$$Q_2(\eta) = \left\{1 + \frac{1}{2} \frac{\omega}{\Psi_1} (\eta + h)^2\right\}^2 \quad \text{with } F_h = c/\sqrt{gh} . \quad (19)$$

Fig.4 は波長 λ と水深 h の比が $\lambda/h = 20$ のときの強非線形・弱分散性モデル (18) の解の波形を数値的に求めた計算例を表す. シア一流の渦度 $\Omega = -\omega$ と波の振幅の増加とともに波形は変化しているが, (18) では水面変位 η が水平座標 x の 1 価関数であること仮定しているので, Fig.2 で観察された波面が巻き込む解 (overhanging solutions) は得られない.

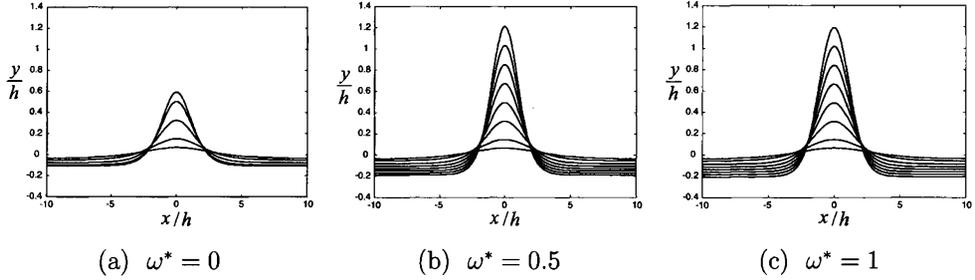


Fig.4 Computed results of wave profile for the full nonlinear and weakly dispersive model (18) in the physical plane (the z -plane). The vorticity $\Omega_0 = -\omega$ of the linear shear current is changed with the wavelength-to-depth ratio fixed to $\lambda/h = 20$. $\omega^* = \omega/\sqrt{g/\lambda}$.

3 複素速度ポテンシャル \tilde{f} 平面における定式化と強非線形・弱分散性モデル

3.1 流場の等角写像

(11) と (12) より, 水底 $y = -h$ と水面 $y = \eta(x)$ における $\tilde{\psi}$ は次のように与えられる.

$$\tilde{\psi}(y = -h) = -\Psi_1 \quad \text{and} \quad \tilde{\psi}(y = \eta) = -\frac{1}{2}\omega(\eta + h)^2. \quad (20)$$

したがって, 物理平面 (z 平面) の流場は, 等角写像を用いて \tilde{f} 平面に Fig.1(b) のように写すことができる. 波長 λ が水深 h に比べて十分長い (h/λ が小さい) とき, \tilde{f} 平面における 1 周期分の領域は細長い (Ψ_1/Φ_1 が小さい) と考えられる. シア一流がない場合, h/λ と Ψ_1/Φ_1 の関係は次式で与えられる [6].

$$\frac{\Psi_1}{2\Phi_1} = \frac{h}{\lambda} + \frac{1}{2\Phi_1} \int_{-\Phi_1}^{\Phi_1} \frac{\eta}{\lambda} d\tilde{\phi}. \quad (21)$$

したがって, \tilde{f} 平面では, 長波に対して $\tilde{\phi}$ 方向の微分 $\Psi_1 \partial / \partial \tilde{\phi}$ が小さいことを仮定できる. 次節では, このことを利用した \tilde{f} 平面における長波近似を考える.

3.2 \tilde{f} 平面における強非線形・弱分散性モデル

\tilde{f} 平面において複素座標 $z = z(\tilde{f})$ は解析的で, 水底 $\tilde{\psi} = -\Psi_1$ を中心に次のように展開できる.

$$\begin{aligned} z(\tilde{f}) &= z(\tilde{\phi} + i\tilde{\psi}) \\ &= z(\tilde{\phi} - i\Psi_1 + i(\tilde{\psi} + \Psi_1)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} \{i(\tilde{\psi} + \Psi_1)\}^k \frac{d^k}{d\tilde{\phi}^k} \right] \underbrace{z(\tilde{\phi} - i\Psi_1)}_{\tilde{x}(\tilde{\phi}) - ih} \\ &= \tilde{x}(\tilde{\phi}) - ih + i(\tilde{\psi} + \Psi_1) \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{\phi}} - \frac{1}{2}(\tilde{\psi} + \Psi_1)^2 \frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{\phi}^2} - i\frac{1}{3!}(\tilde{\psi} + \Psi_1)^3 \frac{d^3\tilde{x}}{d\tilde{\phi}^3} + \dots, \end{aligned} \quad (22)$$

ここで, $\tilde{x}(\tilde{\phi}) = x(\tilde{\phi}, \tilde{\psi} = -\Psi_1)$. したがって, x と y は \tilde{f} 平面において, それぞれ次のように展開できる.

$$\begin{cases} x(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = \tilde{x}(\tilde{\phi}) - \frac{1}{2}(\tilde{\psi} + \Psi_1)^2 \frac{d^2 \tilde{x}}{d\tilde{\phi}^2} + \frac{1}{4!}(\tilde{\psi} + \Psi_1)^4 \frac{d^4 \tilde{x}}{d\tilde{\phi}^4} + \dots, \\ y(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = -h + (\tilde{\psi} + \Psi_1) \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{\phi}} - \frac{1}{3!}(\tilde{\psi} + \Psi_1)^3 \frac{d^3 \tilde{x}}{d\tilde{\phi}^3} + \dots. \end{cases} \quad (23)$$

水面 $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(y = \eta)$ では $y = \eta$ であることと, (23) の逐次近似を利用して, $d\tilde{x}/d\tilde{\phi}$ は次のように展開できる.

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{\phi}} = \frac{\eta + h}{\tilde{\psi}_0(\eta)} + \frac{1}{6} \{ \tilde{\psi}_0(\eta) \}^2 \frac{d^2}{d\tilde{\phi}^2} \left(\frac{\eta + h}{\tilde{\psi}_0(\eta)} \right) + \dots, \quad (24)$$

ここで,

$$\tilde{\psi}_0(\eta) = \tilde{\psi}(y = \eta) - \tilde{\psi}(y = -h) = \Psi_1 - \frac{1}{2}\omega(\eta + h)^2. \quad (25)$$

これらと,

$$\tilde{u} - i\tilde{v} = \left(\frac{dz}{d\tilde{f}} \right)^{-1} = \frac{x_{\tilde{\phi}} - iy_{\tilde{\phi}}}{x_{\tilde{\phi}}^2 + y_{\tilde{\phi}}^2}, \quad (26)$$

を用いて水面の境界条件 (17) を変形し, 長波に対して $\tilde{\phi}$ 方向の微分 $\Psi_1 \partial / \partial \tilde{\phi}$ が小さいという仮定のもとで高次の項を無視すると, 次のような近似方程式を導出できる.

$$\left(\Psi_1 \frac{d\eta}{d\tilde{\phi}} \right)^2 = \left(\frac{\eta + h}{\tilde{\psi}_0^*(\eta)} \right)^2 R(\eta) (\eta_C - \eta)(\eta - \eta_B), \quad (27)$$

ここで, $R(\eta) = 3Q_1(\eta)/Q_2(\eta)$ は (19) により与えられ, $\tilde{\psi}_0^*(\eta) = \tilde{\psi}_0(\eta)/\Psi_1$. (27) を解くことにより $\eta = \eta(\tilde{\phi})$ が得られるが, 物理平面における波形を求めるためには水面における水平方向の座標 $x = x(\tilde{\phi}, \tilde{\psi} = \tilde{\psi}(y = \eta(\tilde{\phi}))) = x(\tilde{\phi})$ が必要である. 水面における $x = x(\tilde{\phi})$ は, (23) の第 1 式と (24) より得られる次式を用いて求めることができる.

$$\Psi_1 \frac{dx}{d\tilde{\phi}} = \frac{\eta + h}{\tilde{\psi}_0^*(\eta)} - \frac{1}{3} \{ \tilde{\psi}_0^*(\eta) \}^2 \Psi_1^2 \frac{d^2}{d\tilde{\phi}^2} \left(\frac{\eta + h}{\tilde{\psi}_0^*(\eta)} \right). \quad (28)$$

(27) の導出では振幅の大きさに関する仮定はしていないので, (27) を \tilde{f} 平面における強非線形・弱分散性モデルとよぶ. (27) では水面変位 η が x ではなく $\tilde{\phi}$ の関数であることが, (27) と物理平面における強非線形・弱分散性モデル (18) の違いである.

3.3 \tilde{f} 平面における強非線形・弱分散性モデル (27) の数値計算例

\tilde{f} 平面における強非線形・弱分散性モデル (27) を用いて求めた波形の数値計算例を, Fig.5 と Fig.6 に示す. Fig.5 は 波長と水深の比を $\lambda/h = 20$ に固定して, シア一流の渦度の値を変えたときの波形の変化を表している. 渦度の増加とともに波形は大きく変化し, Fig.5(c) のように波面が巻き込む解 (overhanging solutions) が得られる場合があることがわかる. この波形の変化は Euler 方程式の計算結果 (Fig.2) と定性的に一致し, 物理平面 (z 平面) における強非線形・弱分散性モデル (18) ではとらえることができなかった

た現象である。Fig.6 はシア一流の渦度の値を固定 ($\omega^* = \omega/\sqrt{g/\lambda} = 1$) して、波長と水深の比 λ/h を変えたときの波形の変化を表している。波長の増加とともに波面の巻き込みが小さくなる傾向は Euler 方程式の計算結果 (Fig.3) と定性的に合っている。

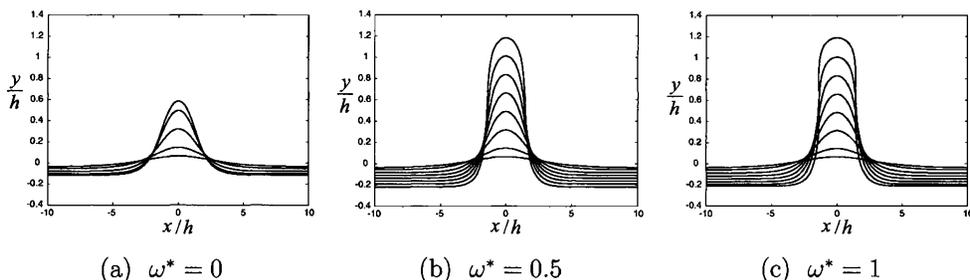


Fig.5 Computed results of wave profile for the full nonlinear and weakly dispersive model (27) in the \tilde{f} -plane.

The vorticity $\Omega_0 = -\omega$ of the linear shear current is changed with the wavelength-to-depth ratio fixed to $\lambda/h = 20$. $\omega^* = \omega/\sqrt{g/\lambda}$.

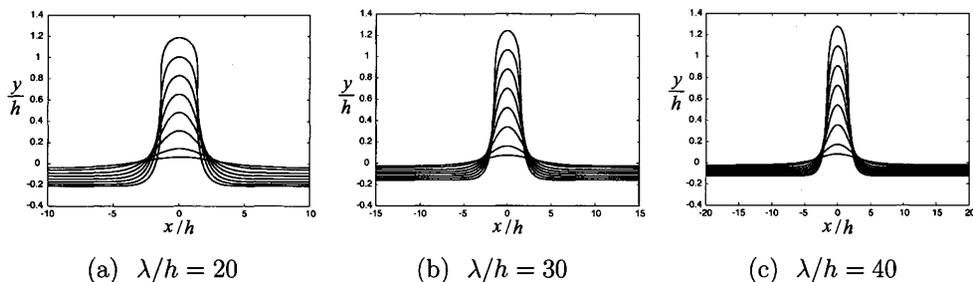


Fig.6 Computed results of wave profile for the full nonlinear and weakly dispersive model (27) in the \tilde{f} -plane.

The wavelength-to-depth ratio λ/h is changed with the vorticity $\Omega_0 = -\omega$ of the linear shear current fixed to $\omega^* = 1$. $\omega^* = \omega/\sqrt{g/\lambda}$.

4 まとめ

本研究では、鉛直方向に速度分布が直線的に変化する流れ（線形シア一流）の水面を、一定速度で波形を変えずに進行する周期的な長波の数学モデルについて考えた。特に、等角写像を用いて流場を写した複素ポテンシャル平面上で、新しいタイプの強非線形・弱非線形モデル (27) を導出した。このモデルは波長が水深と比べて長いことだけを仮定しているため、比較的振幅の大きな波に対しても適用できる。また、水面変位 η を速度ポテ

ンシャル $\tilde{\phi}$ の関数として表しているのです。従来の物理平面で導かれた強非線形・弱非線形モデル (18) より適用範囲が広い。例えば、提案モデルでは Fig.5 のような波面が巻き込む解 (overhanging solutions) が得られる場合があることを数値計算で示した。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 (基盤研究 (B)) JP17H02856 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] Benjamin, T.B. : The solitary wave on a stream with an arbitrary distribution of vorticity, *J. Fluid Mech.*, vol.12, pp.97-116, 1962.
- [2] Choi, W. : Strongly nonlinear long gravity waves in uniform shear flows, *Physical Review E*, vol.68, 026305, 2003.
- [3] Choi, W. : Nonlinear surface waves interacting with a linear shear current, *Mathematics and Computers in Simulation*, vol.80, pp.29-36, 2009.
- [4] Francius, M. and Kharif, C. : Two-dimensional stability of finite-amplitude gravity waves on water of finite depth with constant vorticity, *J. Fluid Mech.*, vol.830, pp.631-659, 2017.
- [5] Freeman, N.C. and Johnson, R.S. : Shallow water waves on shear flows, *J. Fluid Mech.*, vol.42, pp.401-409, 1970.
- [6] Longuet-Higgins, M.S. : Integral properties of periodic gravity waves of finite amplitude, *Proc. R. Soc. Lond. A.*, vol.342, pp.157-174, 1975.
- [7] Okamoto, H. and Shōji, M. : The mathematical theory of permanent progressive water-waves, World Scientific, 2001.
- [8] Okamura, M. and Oikawa, M. : The linear stability of finite amplitude surface waves on a linear shearing flow, *J. Phys. Soc. Japan*, vol.58, pp.2386-2396, 1989.
- [9] Simmen, J.A. and Saffman, P.G. : Steady deep-water waves on a linear shear current, *Studies in Applied Mathematics*, vol.73, pp.35-57, 1985.
- [10] Teles da Silva, A.F. and Peregrine, D.H. : Steep, steady surface waves on water of finite depth with constant vorticity, *J. Fluid Mech.*, vol.195, pp.281-302, 1988.
- [11] Vanden-Broeck, J.-M. : Gravity-capillary free-surface flows, Cambridge University Press, 2010.