

水深が変化する水域を伝播する内部波の数値解析 Numerical Simulation for Internal Waves Propagating over Topography

鹿児島大学学術研究院・理工学域 柿沼 太郎 (Taro Kakinuma)^{*}
鹿児島大学大学院・理工学研究科 越智 直人 (Naoto Ochi)^{*}
東北大学・災害科学国際研究所 山下 啓 (Kei Yamashita)^{**}
神戸大学大学院・工学研究科 中山 恵介 (Keisuke Nakayama)^{***}

^{*} Graduate School of Science and Engineering, Kagoshima University

^{**} International Research Institute of Disaster Science, Tohoku University

^{***} Graduate School of Engineering, Kobe University

1. 序 論

外洋を伝播していた内部波が、水深の急変する陸棚斜面を通過し、陸棚上に到達する場合のあ
ることが知られている (Ostrovsky & Stepanyants, 1989) . Grimshaw ら (2004) は、外洋より陸棚に入
射する内部孤立波を対象として、KdV 理論を拡張した 3 次の非線形項を有する EKdV 方程式 (Lee
& Beardsley, 1974) を適用した数値解析を行ない、非線形内部波の変形に関して調べた。

ところで、海洋を 2 層流体と仮定した場合、外洋の内部波には、深水域を対象とした Benjamin-
Ono (BO) 方程式 (Benjamin, 1967; Ono, 1975) , または、Choi & Camassa (1999) による Deeper
version の適用性が高い。ここで、後者の Deeper version の導出において、 h_1 及び h_2 をそれぞれ上層
及び下層の静水時の層厚として、 $O(h_1) \ll O(h_2)$ を仮定している。他方、陸棚上の内部波には、浅
水域を対象とした KdV 方程式、または、Choi & Camassa (1999) により $O(h_1) = O(h_2)$ を仮定して導
出された Shallower version の適用性が高い。従って、こうした摂動法に基づく鉛直積分型波動方程
式系を用いて、深水域や、浅水域を伝播する内部波を解析する場合には、各水域に対して異なる
方程式系を適用する必要がある。

他方、変分原理に基づいて導かれた柿沼 (2001) の波動方程式系は、導出の際に、波の非線形
性及び分散性に対して仮定が課されていない。そのため、本方程式系を基礎方程式系とする数値
モデルは、後述する速度ポテンシャルの展開項数を十分多くとれば、浅水域と深水域の両者、そ
して、それらの遷移領域に対する適用性が高くなり (山下ら, 2016) , 深水域と浅水域の両者を含
む水域を伝播する非線形内部波を一つのモデルによって解析することが可能になると考えられる。
そこで、本研究では、非線形波動方程式系 (柿沼, 2001) を基礎方程式系とする Nakayama &
Kakinuma (2010) の数値モデルを内部波の伝播問題に適用した数値解析を行ない、深水域である外
洋と、浅水域である陸棚上の両者を含む水域を伝播する内部孤立波の挙動を調べる。

2. 基礎方程式系

非粘性・非圧縮性の、2 層流体の非回転運動を対象とする。そして、第 1 層及び第 2 層をそれぞ

れ上層及び下層とし、各層の流体が互いに混合しないと仮定する。鉛直方向の座標を z とし、第 i 層 ($i = 1$ or 2) の速度ポテンシャル ϕ_i を次式のように N_i 個のべき関数の重み付き級数に展開する。

$$\phi_i(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{\alpha_i=0}^{N_i-1} [f_{i,\alpha_i}(\mathbf{x}, t) \cdot z^{\alpha_i}] \quad (1)$$

変分法 (柿沼, 2001) を適用し、次式に示す非線形表面波・内部波方程式系が得られる。

[第1層]

$$\zeta^{\alpha_1} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \eta^{\alpha_1} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1 + 1} \nabla \left[(\zeta^{\alpha_1 + \beta_1 + 1} - \eta^{\alpha_1 + \beta_1 + 1}) \nabla f_{1,\beta_1} \right] - \frac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha_1 + \beta_1 - 1} (\zeta^{\alpha_1 + \beta_1 - 1} - \eta^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}) f_{1,\beta_1} = 0 \quad (2)$$

$$\zeta^{\beta_1} \frac{\partial f_{1,\beta_1}}{\partial t} + \frac{1}{2} \zeta^{\beta_1 + \gamma_1} \nabla f_{1,\beta_1} \nabla f_{1,\gamma_1} + \frac{1}{2} \beta_1 \gamma_1 \zeta^{\beta_1 + \gamma_1 - 2} f_{1,\beta_1} f_{1,\gamma_1} + g \zeta = 0 \quad (3)$$

$$\eta^{\beta_1} \frac{\partial f_{1,\beta_1}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta^{\beta_1 + \gamma_1} \nabla f_{1,\beta_1} \nabla f_{1,\gamma_1} + \frac{1}{2} \beta_1 \gamma_1 \eta^{\beta_1 + \gamma_1 - 2} f_{1,\beta_1} f_{1,\gamma_1} + g \eta + \frac{p}{\rho_1} = 0 \quad (4)$$

[第2層]

$$\eta^{\alpha_2} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{\alpha_2 + \beta_2 + 1} \nabla \left[(\eta^{\alpha_2 + \beta_2 + 1} - b^{\alpha_2 + \beta_2 + 1}) \nabla f_{2,\beta_2} \right] - \frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_2 + \beta_2 - 1} (\eta^{\alpha_2 + \beta_2 - 1} - b^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}) f_{2,\beta_2} = 0 \quad (5)$$

$$\eta^{\beta_2} \frac{\partial f_{2,\beta_2}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta^{\beta_2 + \gamma_2} \nabla f_{2,\beta_2} \nabla f_{2,\gamma_2} + \frac{1}{2} \beta_2 \gamma_2 \eta^{\beta_2 + \gamma_2 - 2} f_{2,\beta_2} f_{2,\gamma_2} + g \eta + \frac{1}{\rho_2} [p + (\rho_2 - \rho_1) g h_1] = 0 \quad (6)$$

ここで、 ζ 、 η 、 b 、 p 、 h_1 及び ρ_i は、それぞれ、水面変動、界面変動、底面位置、界面における圧力、静水時の上層厚及び第 i 層の流体の密度である。このうち、密度 ρ_i は、各層内で一様であり、かつ、時間に関して一定であるとしている。そして、 g は、重力加速度であり、 9.8 m/s^2 とする。また、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は、水平方向の微分演算子である。なお、添え字 α_i 、 β_i 及び γ_i に対して、積の総和規約を採用しており、例えば、式(2)の左辺第1項の α_1 は、 ζ のべきである。

式(4)及び(6)より、界面における圧力 p を消去して次式を得る。

$$\begin{aligned} & \eta^{\beta_2} \frac{\partial f_{2,\beta_2}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta^{\beta_2 + \gamma_2} \nabla f_{2,\beta_2} \nabla f_{2,\gamma_2} + \frac{1}{2} \beta_2 \gamma_2 \eta^{\beta_2 + \gamma_2 - 2} f_{2,\beta_2} f_{2,\gamma_2} + \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) g (\eta + h_1) \\ & - \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\eta^{\beta_1} \frac{\partial f_{1,\beta_1}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta^{\beta_1 + \gamma_1} \nabla f_{1,\beta_1} \nabla f_{1,\gamma_1} + \frac{1}{2} \beta_1 \gamma_1 \eta^{\beta_1 + \gamma_1 - 2} f_{1,\beta_1} f_{1,\gamma_1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

本研究では、2層流体の最上面を固定水平板として $\zeta = 0$ とし、表面波を考えない。また、式(1)で表わされる速度ポテンシャルの展開項数は、山下ら (2016) の計算結果の精度を参考にして、上層及び下層で、それぞれ、 $N_1 = 3$ 及び $N_2 = 5$ とする。

以上の基礎方程式系を Nakayama & Kakinuma (2010) の陰的差分法を適用して時間発展を解く。

3. 計算条件及び Critical Level

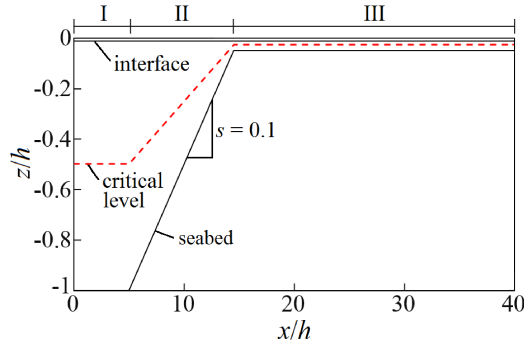


図-1 Case 1の計算対象領域（領域 Iにおける静水時の下層厚と上層厚の比は、 $h_2/h_1=99.0$ である。破線は、critical levelを示す。ここで、Case 1-Aの場合を示しており、領域 IIIにおいて $h_2/h_1=4.0$ である。）

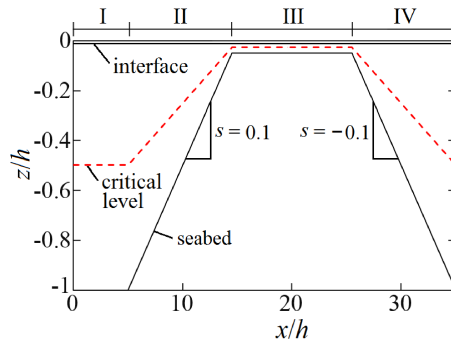


図-2 Case 2の計算対象領域（深水域 Iにおいて、 $h_2/h_1=99.0$ である。破線は、critical levelを示す。ここで、Case 2-Aの場合を示しており、領域 IIIにおいて $h_2/h_1=4.0$ である。）

上・下層の密度比を $\rho_2/\rho_1 = 0.98$ とする。図-1 及び図-2 に、計算対象領域の例を示す。ここで、領域 I 及び III は、それぞれ、深水域及び浅水域であり、また、領域 II 及び IV は、一様勾配斜面域である。領域 I における全水深を h とし、領域 I において、静水時の上層厚及び下層厚をそれぞれ $h_1 = 0.01h$ 及び $h_2 = 0.99h$ とする。また、領域 II 及び IV の斜面勾配は、それぞれ、陸棚斜面の勾配と同程度の $s = 0.1$ 及び -0.1 とする。図-2 の地形の場合、内部波は、浅水域を通過後、徐々に深くなる水域を進行する。

本研究で対象とした各場合の、浅水域 III における層厚比 h_2/h_1 を表-1 に記す。図-1 及び図-2 には、ともに浅水域 III における静水時の層厚比が $h_2/h_1 = 4.0$ の場合を示しており、各場合をそれぞれ Case 1-A 及び Case 2-A のように呼ぶこととする。

また、図-1 及び図-2 において、破線は、次式で表わされる critical level z_c （船越・及川, 1989）の位置を示す。

$$z_c = b / \left(1 + \sqrt{\rho_2 / \rho_1} \right) \quad (8)$$

表-1 各場合の領域 III における静水時の下層厚 h_2 と上層厚 h_1 の比

Case	領域 III における h_2/h_1
1-O, 2-O	8.0
1-A, 2-A	4.0
1-B, 2-B	1.0
1-C, 2-C	0.5
1-D, 2-D	0.4

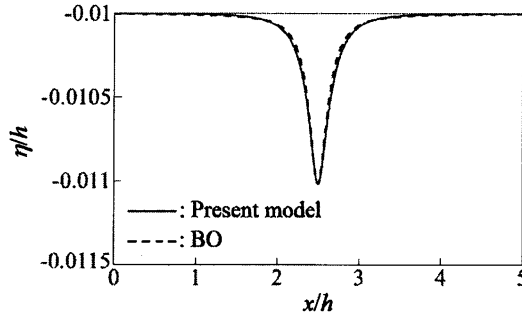


図-3 領域 I で与える内部孤立波の界面形 (実線: 本方程式系の数値解, 破線: BO 方程式の解)

深水域 I では, 界面位置が **critical level** の上方に位置し, 下に凸の内部孤立波が安定する. また, Case 1-O, 2-O, 1-A 及び 2-A では, 他の領域においても, 界面位置が **critical level** の上方に位置し, 下に凸の内部孤立波が安定する. 一方, Case 1-C, 2-C, 1-D 及び 2-D の浅水域 III では, 界面位置が **critical level** より下方に位置し, 上に凸の内部孤立波が安定する. そして, Case 1-B 及び 2-B の領域 III では, $h_1 = h_2$ であり, 内部孤立波が存在しない.

図-1 及び図-2 の地形の場合とも, 側方境界には, 完全反射の境界条件を課す. また, 計算格子間隔及び計算時間間隔をそれぞれ $\Delta x/h = 0.01$ 及び $C_{i0}\Delta t/\Delta x = 0.01$ とする. ここで, C_{i0} は, 領域 I における線形内部浅水波の位相速度である. 線形内部浅水波の位相速度 C_0 は, 次式で表わされる.

$$C_{i,0} = \sqrt{(\rho_2 - \rho_1)gh_1h_2 / (\rho_2h_1 + \rho_1h_2)} \quad (9)$$

図-3 に, 領域 I で与える入射波の空間波形を示す. これは, 内部孤立波の数値解を求めるための手法 (山下ら, 2016) を適用して得られた, 本方程式系に対する内部孤立波の数値解である. ここで, 波高上層厚比は, $|\eta|/h_1 = 0.1$ である. 図中には, BO 方程式の内部孤立波解も描かれているが, 本数値解と BO 解は, ほぼ一致している.

4. 深水域から浅水域に伝播する内部孤立波

まず, 図-1 に示した地形上を深水域から浅水域に伝播する内部孤立波を対象とする. 図-4 に, Case 1-O における内部波の界面形の時間変化を示す. 図-4 において, 斜面上では, 波形が殆ど変

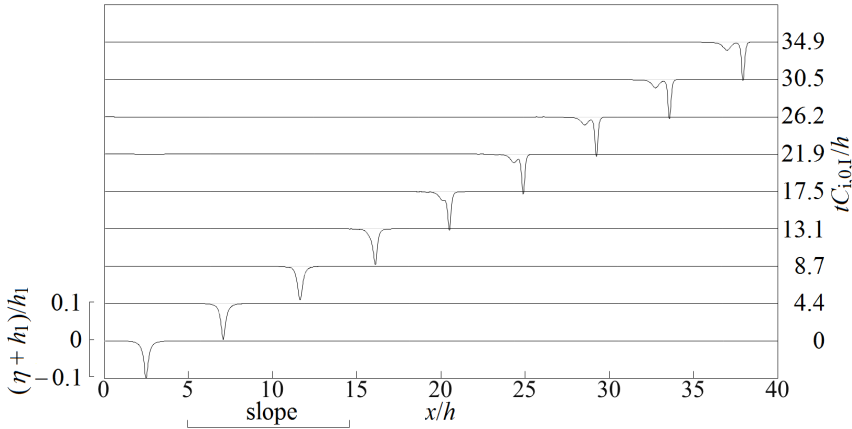


図-4 Case 1-Oにおける界面形の時間変化（領域Ⅲにおいて、 $h_2/h_1=8.0$ である。）

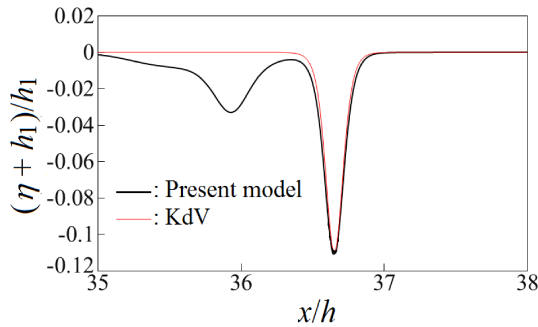


図-5 Case 1-Aにおける時刻 $t_{Ci,01}/h=34.9$ の界面形（領域Ⅲにおいて、 $h_2/h_1=4.0$ である。）

化していない。そして、斜面を通過した内部波は、浅水域を伝播する際に、下に凸の二つの波に分裂している。

図-5 に、山下ら (2014) による、本モデルの数値解析解と、KdV 方程式による同一波高の孤立波解との比較を示す。ここで、Case 1-A の領域Ⅲにおける時刻 $t_{Ci,01}/h = 34.9$ の界面形を示している。本モデルによる第 1 波の界面形は、KdV 方程式による同一波高の孤立波解と、殆ど一致している。

図-6 に、Case 1-B の領域Ⅲにおける時刻 $t_{Ci,01}/h = 30.5$ の内部波の界面形を示す。この場合、浅水域において安定した内部孤立波が存在せず、減衰する正弦波に類似した内部波が分裂波として生じている。

また、図-7 に、Case 1-D における内部波の界面形の時間変化を示す。この場合、領域Ⅱと領域Ⅲの斜面勾配急変部で発生した反射波が確認される。そして、領域Ⅲにおいて、分裂が顕著に生じ、波群が形成されている。この波群の全長は、時間の経過に伴い伸長している。図-8 に、山下ら (2014) による、Case 1-C の領域Ⅲにおける時刻 $t_{Ci,01}/h = 34.9$ の界面形の比較を示す。これより、

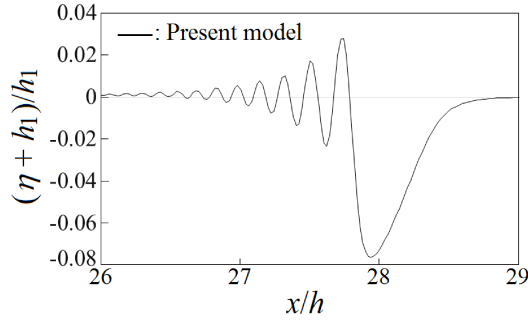


図-6 Case 1-Bにおける時刻 $tC_{10}/h=30.5$ の界面形（領域Ⅲにおいて、 $h_2/h_1=1.0$ である。）

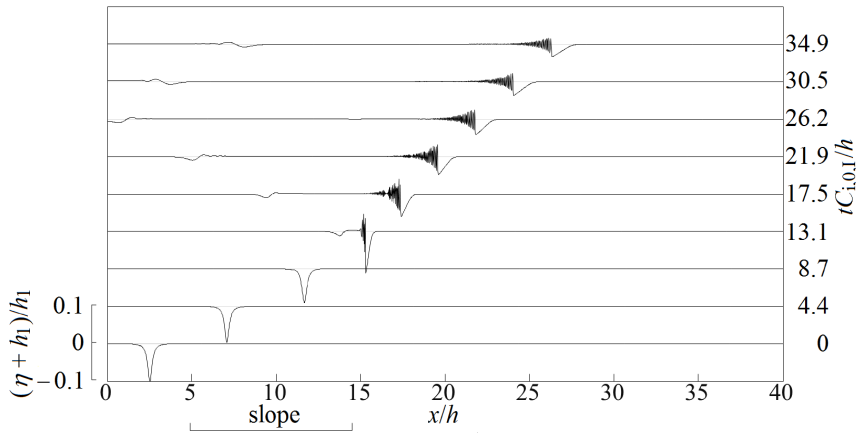


図-7 Case 1-Dにおける界面形の時間変化（領域Ⅲにおいて、 $h_2/h_1=0.4$ である。）

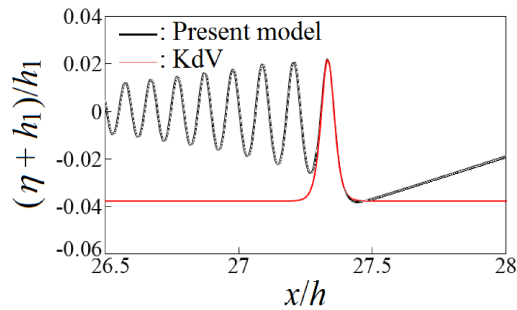


図-8 Case 1-Cにおける時刻 $tC_{10}/h=34.9$ の界面形（領域Ⅲにおいて、 $h_2/h_1=0.5$ である。）

深水域で下に凸の BO 解であった第 1 波が、浅水域で上に凸の KdV 解に変化したことが確認される。こうした、上下が反転する内部孤立波は、浅水域を対象とした KdV 理論に基づく数値解析 (Helfrich ら, 1984) や、現地観測 (Orr & Mignerey, 2003) においても認められている。

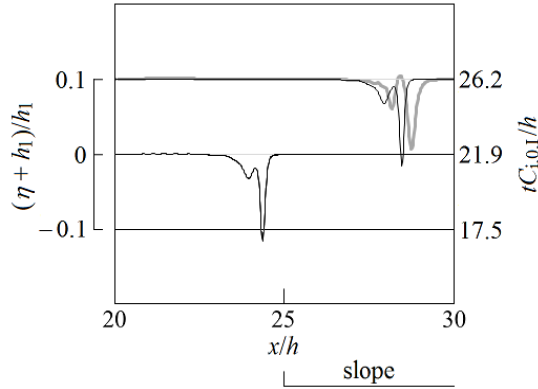


図-9 Case 1-A 及び Case 2-A における界面形の時間変化（黒色線が Case 1-A、また、灰色線が Case 2-A における界面形の時間変化を示す。なお、領域 III において、静水時の層厚比は、 $h_2/h_1=4.0$ である。）

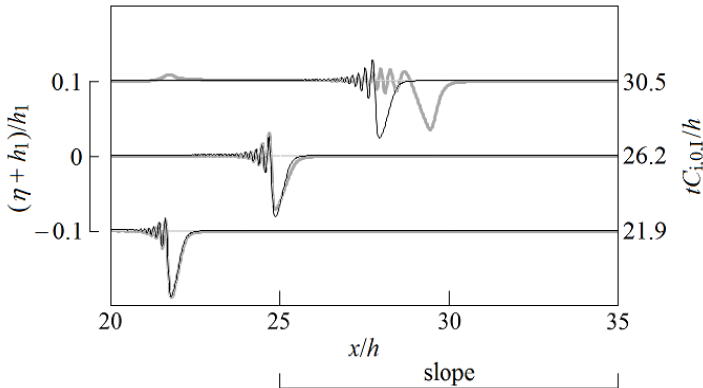


図-10 Case 1-B 及び Case 2-B における界面形の時間変化（黒色線が Case 1-B、また、灰色線が Case 2-B における界面形の時間変化を示す。なお、領域 III において、静水時の層厚比は、 $h_2/h_1=1.0$ である。）

5. 深水域から浅水域に伝播した後に徐々に深くなる水域を伝播する内部孤立波

次に、図-2 に示した地形上を伝播する内部孤立波を対象とする。すなわち、内部波は、深水域から浅水域に伝播した後、徐々に深くなる水域を進行する。

図-9 に、Case 1-A 及び Case 2-A における水面変動を示す。時刻 $tC_{i,0,1}/h = 26.2$ における第 1 波の波高は、領域 III を伝播する Case 1-A の内部波が、徐々に深くなる領域 IV を進行する Case 2-A の内部波より大きい。他方、同時刻における第 2 波の波高は、Case 2-A が Case 1-A より大きい。

また、図-10 に、Case 1-B 及び Case 2-B における水面変動を示す。図-9 の場合と異なり、時刻 $tC_{i,0,1}/h = 30.5$ における第 1 波及び第 2 波の両者の波高が、Case 1-B の内部波が、Case 2-B より大きい。

図-11 に、各地点における界面の最低位置を示す。浅水域においても界面が critical level より高い位置にある Case 1-O 及び Case 1-A では、領域 III における静水時の下層厚が薄い後者の方が、第 1

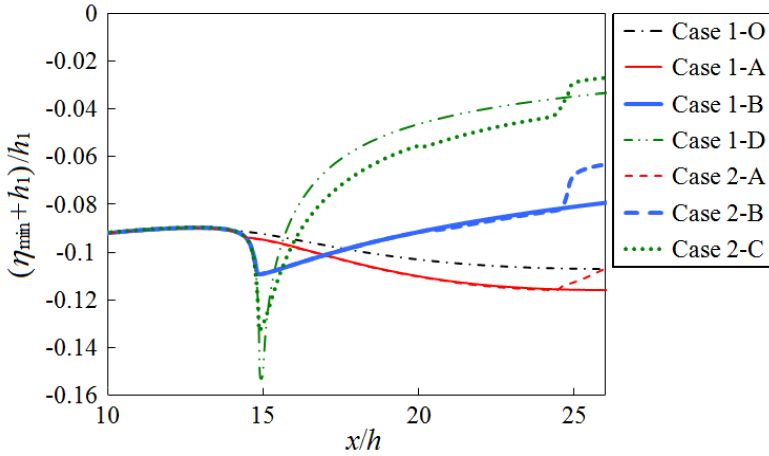


図-11 界面の最低位置の分布

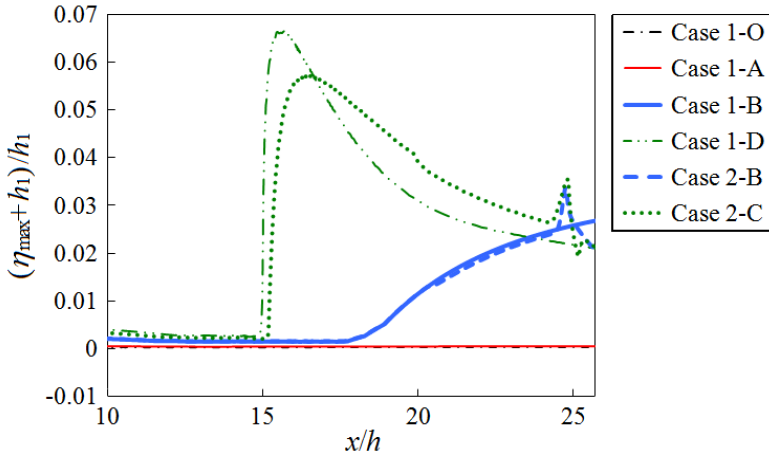


図-12 界面の最高位置の分布

波の谷における界面位置がより低下し、波高が増加している。他方、浅水域において界面が **critical level** より低い位置にある Case 2-C 及び Case 1-D では、領域 III における静水時の下層厚が薄い後者の方が、第 1 波の谷における界面位置が斜面上でより低下するが、その後、逆転して、後者の第 1 波の谷における界面位置が前者より高い位置にある。

一方、図-12 に、各地点における界面の最高位置を示す。浅水域において界面位置が **critical level** より低い位置にある Case 2-C 及び Case 1-D では、内部波が領域 III に進行すると、第 1 波の峰における界面位置は、静水時の下層厚が薄い後者がより上昇するが、その後、逆転して、後者が前者より低い位置にある。

6. 結 論

深水域と浅水域を含む領域を伝播する内部孤立波を対象として、非線形波動方程式系を基礎方程式系とする数値モデルを適用した数値解析を行なった。下に凸である BO 解の内部孤立波が大陸斜面に到達して陸棚上を伝播するとき、陸棚上において静水時の界面位置が critical level より高い位置にある場合、下に凸の KdV 解が、一方、陸棚上において静水時の界面位置が critical level より低い位置にある場合、上に凸の KdV 解が、分裂を経て生じる。また、陸棚上における静水時の界面位置が critical level と一致する場合、内部波は、減衰する正弦波に類似した波形を有する。更に、陸棚上から、より深い水域に内部波が伝播する場合、第 1 波の波高が減少する。

参考文献

- 柿沼太郎: 透水性海浜における内部波の挙動の数値計算, 海岸工学論文集, 第 48 巻, pp. 146-150, 2001.
- 船越満明・及川正行: 成層流体中の非線形波動, ながれ, 第 8 巻, pp. 311-335, 1989.
- 山下 啓・柿沼太郎・木村晃彦: 深水域から浅水域に伝播する内部孤立波の数値解析, 土木学会論文集 B2 (海岸工学), Vol. 70, No. 2, pp. I_11-I_15, 2014.
- 山下 啓・柿沼太郎・中山恵介: 表面孤立波及び内部孤立波の特性, 土木学会論文集 B2 (海岸工学), Vol. 72, No. 1, pp. 27-41, 2016.
- Benjamin, T. B.: Internal waves of permanent form in fluids of great depth, *J. Fluid Mech.*, Vol. 29, pp. 559-592, 1967.
- Choi, W. and R. Camassa: Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system, *J. Fluid Mech.*, Vol. 396, pp. 1-36, 1999.
- Grimshaw, R., E. Pelinovsky, T. Talipova and A. Kurkin: Simulation of the transformation of internal solitary waves on oceanic shelves, *J. Phys. Oceanogr.*, Vol. 34, pp. 2774-2791, 2004.
- Helfrich, K. R., W. K. Melville and J. W. Miles: On interfacial solitary waves over slowly varying topography, *J. Fluid Mech.*, Vol. 149, pp. 305-317, 1984.
- Lee, C.-Y. and R. C. Beardsley: The generation of long nonlinear internal waves in a weakly stratified shear flow, *J. Geophys. Res.*, Vol. 79, No. 3, pp. 453-462, 1974.
- Nakayama, K. and T. Kakinuma: Internal waves in a two-layer system using fully nonlinear internal-wave equations, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 62, pp. 574-590, 2010.
- Ono, H.: Algebraic solitary waves in stratified fluids, *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 39, pp. 1082-1091, 1975.
- Orr, M. H. and P. C. Mignerey: Nonlinear internal waves in the South China Sea: Observation of the conversion of depression internal waves to elevation internal waves, *J. Geophys. Res.*, Vol. 108, No. C3, pp. 9-1-9-16, 2003.
- Ostrovsky, L. A. and Yu. A. Stepanyants: Do internal solitons exist in the ocean?, *Rev. Geophys.*, Vol. 27, pp. 293-310, 1989.