

Föppl-von Kármá 方程式に従う波動乱流の非線形強度依存性

同大理工	高岡 正憲 (Masanori Takaoka),
	Faculty of Science and Engineering, Doshisha University
京大工	横山 直人 (Naoto Yokoyama),
	Faculty of Engineering, Kyoto University

1 はじめに

我々は、Föppl-von Kármá 方程式の数値シミュレーションを通じて、弾性薄板の波動乱流の研究を 10 年近くやってきた。数理解析研究所の「乱流」に関する研究集会では幾度か講演してきたが、この「波動」の研究会では初めてなので、これまでの弾性波動乱流のレビューを兼ねながら、それらの研究結果から新たに湧いてきた疑問点について報告したい。

我々が弾性波動乱流の研究を始めるきっかけとなったのは、Düring らによる先駆的な論文 [1] で、非常に興味深いサブタイトル “Can one hear a Kolmogorov spectrum?” がつけられていた。シンバルやサンダーシートの音は耳にすることはあったが、こういう視点を持ち合わせていなかった。研究を始めた 2010 年ころはエネルギースペクトルですらコンセンサスの得られていない混沌とした状況であった。Düring らは、弱乱流理論の定常解として $\mathcal{E}(k) \propto k[\log(k_*/k)]^{1/3}$ を得て、直接数値計算によってその存在を確認した [1]。ところが、鉄板による実験のエネルギースペクトルは、 $\mathcal{E}(k) \propto k^{-1/5}$ という冪指数の正負すら異なるものであった [2-4]。さらに、Nazarenko は弱乱流理論と次元解析を用いて、エネルギーカスケードに対しては $\mathcal{E}(k) \propto k^{-1}$ 、アクションカスケードに対しては $\mathcal{E}(k) \propto k^{-1/3}$ が存在しうることを示した [5]。

2 エネルギースペクトルの統一的理解

2.1 定式化と複素表現

薄い弾性板を伝播する波動は、変位の勾配が小さく、厚み方向の応力分布が無視できるとき、Föppl-von Kármán (FvK) 方程式で記述される [6, 7]。弾性薄板の面外 (横) 変位を ζ 、運動量を p 、Airy の応力関数を χ として、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{p}{\rho}, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{Yh^2}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 \zeta + \{\zeta, \chi\}, \tag{1b}$$

$$\Delta^2 \chi = -\frac{Y}{2} \{\zeta, \zeta\} \tag{1c}$$

で与えられる。ここで $\{f, g\} = \partial^2 f / \partial x^2 \partial^2 g / \partial y^2 + \partial^2 f / \partial y^2 \partial^2 g / \partial x^2 - 2\partial^2 f / \partial x \partial y \partial^2 g / \partial x \partial y$ と Δ は、それぞれ Monge-Ampère 演算子と Laplace 演算子であり、 ρ 、 Y 、 ν 、 h は、それぞれ密度、Young 率、Poisson 比、板厚である。また、式 (1b) の第 1 項と第 2 項は、それぞれ曲げ応力と面内応力に由来する項である。

定式化の前に、波動乱流のオーソドックスな理論的アプローチについて簡単に纏めておく。Zakharov [8] が 1968 年に、水面波の基礎方程式を、非粘性、非圧縮、非回転の仮定のもとで、正準方程式として記述できることを示して以来、保存系の波動乱流に対して Hamiltonian を用いた定式化が行われてきた。

一組の正準変数 $(Q(x, t), P(x, t))$ に対して、適当なスケール (λ) 変換と回転変換を行った複素変数

$$a(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\lambda Q(x, t) + i \frac{P(x, t)}{\lambda} \right) \quad (2)$$

を導入すると、1つの正準方程式に纏めることができる。(波動)乱流ではスペクトルやカスケードのようにスケールに分けて考えるので、Fourier 空間を導入する。正準変数 $a(x, t)$ の Fourier 級数 a_k を導入すると、系の Hamiltonian を \mathcal{H} として正準方程式は

$$i \frac{da_k}{dt} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a_k^*} \quad (3)$$

と書ける。波動現象の多くは非線形性が弱いので、系の Hamiltonian を a_k の冪展開として表す： $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 + \dots$ 。ここで、 $\mathcal{H}_2 = \sum_k \omega_k |a_k|^2$ で ω_k は線形分散関係より定まる振動数であり、 \mathcal{H}_m ($m \geq 3$) は a の m 次の量であり、 m 波相互作用を表す。また、 a_k は、線形 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2$ のときの解であり、複素振幅や要素波と呼ばれる。

弱乱流理論では、時間発展方程式に上記の Hamiltonian の冪展開を代入したときに現れる完結問題を、弱非線形性を仮定し乱雑位相近似を用いることで回避して、アクションについての閉じた運動論的方程式を得る。アクションスペクトル n_k は、アンサンブル平均で自己相関のみが存在することを意味し、 $\langle a_k a_{k'}^* \rangle = n_k \delta_{kk'}$ で定義される。

弾性薄板の波動では、 $a_k = (\rho \omega_k \zeta_k + i p_k) / \sqrt{2 \rho \omega_k}$ と $\omega_k = \sqrt{Y h^2 / (12(1 - \nu^2) \rho)} k^2$ を導入すると、FvK 方程式 (1) は、波数間相互作用が 4 波相互作用であることにより $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_4$ と書くことが出来、正準方程式 (3) の形で表される。ここで、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_4 = & \sum_{k_1+k_2+k_3=0} F_{k_2 k_3}^{k k_1} a_k a_{k_1} a_{k_2}^* a_{k_3}^* + \sum_{k-k_1-k_2-k_3=0} \left(G_{k_1 k_2 k_3}^k a_k a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_3}^* + \text{c.c.} \right) \\ & + \sum_{k+k_1+k_2+k_3=0} \left(H_{k k_1 k_2 k_3} a_k a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} + \text{c.c.} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

この場合の弱乱流理論におけるアクションスペクトルの時間発展を記述する運動論的方程式は、

$$\begin{aligned} \partial_t n_k = & \sum_{k_1+k_2+k_3=k} U_{k_1 k_2 k_3}^k n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} \left(\frac{1}{n_k} - \frac{1}{n_{k_1}} - \frac{1}{n_{k_2}} - \frac{1}{n_{k_3}} \right) \delta_{\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3}}^{\omega_k} \\ & + \sum_{-k_1+k_2+k_3=k} V_{k_2 k_3}^{k k_1} n_k n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} \left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_{k_1}} - \frac{1}{n_{k_2}} - \frac{1}{n_{k_3}} \right) \delta_{\omega_{k_2} + \omega_{k_3}}^{\omega_k + \omega_{k_1}} \\ & + \sum_{-k_1-k_2+k_3=k} W_{k_3}^{k k_1 k_2} n_k n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} \left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_{k_1}} + \frac{1}{n_{k_2}} - \frac{1}{n_{k_3}} \right) \delta_{\omega_{k_3}}^{\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2}} \end{aligned} \quad (5)$$

と表され、非線形相互作用が 4 波共鳴相互作用によることを示している。

多くの 4 波共鳴相互作用の波動乱流系とは異なり、この運動論的方程式 (5) には $1 \leftrightarrow 3$ 型と $3 \leftrightarrow 1$ 型 (右辺第 2 と第 3 項) の 4 波共鳴相互作用が存在する。これにより運動論的方程式 (5) の保存量は、線形エネルギー $\sum_k \omega_k n_k = \sum_k \omega_k |a_k|^2 = \sum_k \left(\frac{1}{2\rho} |p_k|^2 + \frac{\rho \omega_k^2}{2} |\zeta_k|^2 \right)$ のみであり、アクション $\sum_k n_k$ は保存しないことに注意する。

非平衡統計的定常状態を作るために、外力 \mathcal{F} と散逸 \mathcal{D} を加えた次式：

$$\frac{da_k}{dt} = -i \omega_k a_k + \mathcal{N}_k + \mathcal{F}_k - \mathcal{D}_k \quad (6)$$

の直接数値シミュレーションを行う。ここで、 $\mathcal{N}_k = -i \delta \mathcal{H}_4 / \delta a_k^*$ は非線形項の簡略表現である。 \mathcal{F}_k は低波数領域 $|k| \leq 8\pi$ で $|a_k| = \text{const.}$ とし、 \mathcal{D}_k は高波数領域で有効となるように $\mathcal{D}_k = \Gamma |k|^4 a_k$ とした。非線形項の畳み込みには 4/2 法によるエイリアス除去を行う擬スペクトル法、時間発展には 4 次精度 Runge-Kutta 法を用いた。

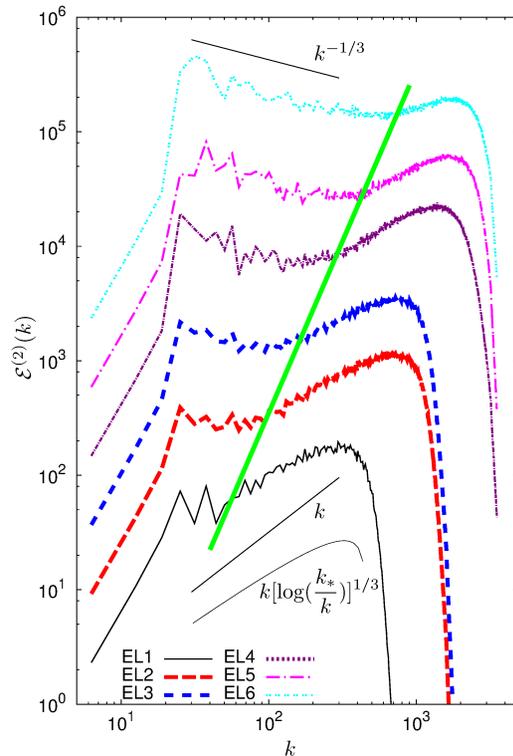


図 1: 外力の大きさを変えたときのエネルギースペクトルの変化。Ref. [9] より改変。

2.2 エネルギーレベルとエネルギースペクトル

我々は、外力の大きさを系統的に変えることにより、図 1 のようなエネルギースペクトルを得た [9]。高波数領域において系は弱乱流 (弱非線形) であり、運動論的方程式の定常解 $\mathcal{E} \propto k[\log(k_*/k)]^{1/3}$ が得られ、低波数領域において系は強乱流 (強非線形) であり、エネルギースペクトル $\mathcal{E} \propto k^{-1/3}$ が得られた。このエネルギースペクトルは、Nazarenko[5] の予想したアクションカスケードに対するエネルギースペクトルと同じ冪指数を持つが、その導出は弱乱流を仮定しているうえに、運動論的方程式 (5) においてアクションが保存量でないことから、別の機構によるものと考えられる。我々の論文 [9] の結果は、§ 1 に記述したエネルギースペクトルの多様性が、エネルギーレベルの違いということによって統一的に理解できることを示唆している。実験の論文 [4] の Fig.2(a) を、この視点から見ると我々の理解と合致している。

特筆すべきは、低波数領域と高波数領域とで異なる冪をもつ乱流スペクトルが現れることである。一様等方性乱流において、このように強弱乱流の共存状態がある例は、他には知らない。この強弱乱流スペクトルの境界となる波数 (分離波数) は、線形と非線形の時間スケールが拮抗することから見積もることができる [10]。非線形の時間スケールは $n_k/(dn_k/dt)$ で見積もられることが多いが [11]、定常状態では発散するためこの見積もりは使えない。そこで、線形分散関係に自己相互作用を繰り込んだ非線形分散関係により、非線形の時間スケールを見積もった。その結果を図 1 に直線 (緑色) で描いてある。良い一致をしめすことから、弱乱流理論における線形と非線形時間スケールの分離の重要性がわかる。

3 1 波数表現とエネルギー輸送

3.1 Airy 応力関数と 1 波数表現

弾性波動乱流の系の保存量としてのエネルギーは全 Hamiltonian $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_4$ であるにもかかわらず、Zakharov の先駆的な論文 [8] 以降のオーソドックスなアプローチでは、要素波 a_k の 2 次相関量 $E_k^{(2)} = \omega_k |a_k|^2$ をエネルギースペクトルと見なしている。というのも、 \mathcal{H}_4 の Fourier 表現が a_k の畳み込みになってしまうからである。

元に戻って、 η , p および χ の Fourier 級数を用いると

$$\mathcal{H} = \sum_k \left(\frac{1}{2\rho} |p_k|^2 + \frac{\rho\omega_k^2}{2} |\zeta_k|^2 + \frac{k^4}{2E} |\chi_k|^2 \right) \quad (7)$$

と表され、全エネルギーは、運動エネルギー $K_k = |p_k|^2/(2\rho)$ 、曲げエネルギー $V_{bk} = \rho\omega_k^2 |\zeta_k|^2/2$ 、伸縮エネルギー $V_{sk} = k^4 |\chi_k|^2/(2Y)$ の和で与えられる。線形エネルギーは $E_k^{(2)} = K_k + V_{bk}$ であり、ポテンシャルエネルギーは $V_k = V_{bk} + V_{sk}$ である。Airy 応力関数 χ を用いることで、 \mathcal{H}_4 が 1 波数 k の Fourier 表現の和として書くことができる。

3.2 エネルギー輸送と詳細釣り合い

エネルギー保存則に対応する \mathcal{H} を 1 波数表現の和として書くことが出来たので、波数空間でのエネルギー輸送の厳密な表現を得ることが出来る。エネルギー輸送率 T_k は波数 k でのエネルギーの時間変化率 $T_k = dE_k/dt$ で与えられるので、外力と散逸を無視して、 $T_k = T_{Kk}^{(2)} + T_{Kk}^{(4)} + T_{V_bk} + T_{V_sk}$ と書ける。ここで、 $T_{Kk}^{(2)} = -\frac{\omega_k^2}{2} p_k^* \zeta_k + \text{c.c.}$ 、 $T_{Kk}^{(4)} = \frac{p_k^*}{2\rho} \sum_{k_1+k_2=k} |k_1 \times k_2|^2 \chi_{k_1} \zeta_{k_2} + \text{c.c.}$ 、 $T_{V_bk} = \frac{\omega_k^2}{2} p_k^* \zeta_k + \text{c.c.}$ 、 $T_{V_sk} = -\frac{\chi_k^*}{2\rho} \sum_{k_1+k_2=k} |k_1 \times k_2|^2 \zeta_{k_1} p_{k_2} + \text{c.c.}$ はそれぞれ、 dK_k/dt の 2 次の項である 2 次運動エネルギー輸送、同じく 4 次の項である 4 次運動エネルギー輸送、曲げエネルギー輸送 dV_{bk}/dt 、伸縮エネルギー輸送 dV_{sk}/dt である。

これより $T_{Kk}^{(2)} = -T_{V_bk}$ が成り立つが、これは波数 k の運動エネルギーと曲げエネルギーの交換を表している。非線形相互作用によるエネルギー輸送は、 $T_{Kk}^{(4)}$ と T_{V_sk} によって生じ、厳密にエネルギー保存則 $\sum_k T_k = 0$ が成立している。これまでの弱乱流理論では線形エネルギーのみを考えていたので、非線形エネルギー輸送は $T_{Kk}^{(4)}$ のみとなりエネルギー保存則を満足しない。

さらに 3 成分 ($k + k_1 + k_2 = 0$) 相互作用関数を

$$T_{kk_1k_2} = T_{Kk_1k_2}^{(4)} + T_{V_sk_1k_2} = \frac{|k_1 \times k_2|^2}{2\rho} (p_k \chi_{k_1} \zeta_{k_2} - \chi_k \zeta_{k_1} p_{k_2}) \delta_{k+k_1+k_2,0} + \text{c.c.} \quad (8)$$

と定義すると、エネルギー詳細釣り合い $T_{kk_1k_2} + T_{k_1k_2k} + T_{k_2kk_1} = 0$ が成立する。また、 $T_{Kk_1k_2}^{(4)} + T_{V_sk_2kk_1} = 0$ も成立することから、非線形エネルギー輸送は運動エネルギーと伸縮エネルギーの間で起こり、曲げエネルギーのモードは介在しているだけであることがわかる [12]。

図 2(左) に、直接数値シミュレーションから得られたエネルギー輸送率を示す。外力領域で外力から伸縮エネルギーへエネルギーが注入され、慣性小領域をカスケードして、散逸領域で運動エネルギーを通じて散逸されていることがわかる。図 2(右) に描かれた全エネルギーフラックス $\mathcal{P}(k) \equiv -\int_0^k \mathcal{T}(k') dk' = \int_k^\infty \mathcal{T}(k') dk'$ が正で一定であることから、順方向にエネルギーカスケードしていることが確認される。

それぞれのエネルギー輸送率についてエネルギーフラックスを $\mathcal{P}_i(k) \equiv -\int_0^k \mathcal{T}_i(k') dk'$ のように形式的に定義することは可能ではあるが、保存則を満たしていないことに対応して、最小波数と最大波数と同時に 0 となることができず、フラックスとしては不適切である。これまでの弱乱流理論で考えられてきたように線形エネルギーに対するフラックスのみを考えると、図 2(右) の

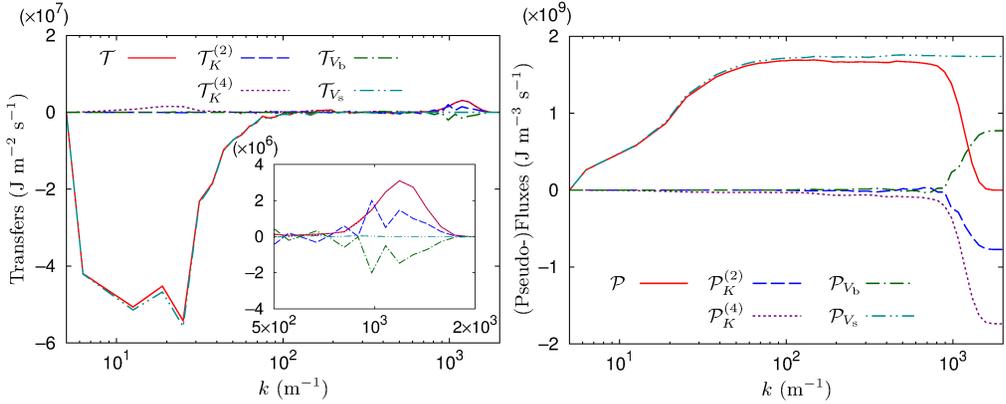


図 2: エネルギー輸送率 (左) とエネルギーフラックス (右). Ref. [12] より.

$\mathcal{P}_K^{(4)}$ のように符号すら全エネルギーフラックスとは異なることがある。これは、弱乱流理論でエネルギー輸送を調べることの限界を示している。

3.3 間欠性とエネルギー輸送

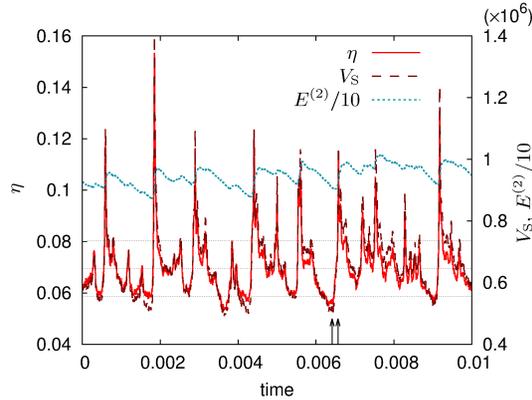


図 3: 非線形性 η 、線形エネルギー $E^{(2)}$ と非線形エネルギー V_s の時間発展. Ref. [13] より.

ここまでは統計的平均量を見てきたが、弾性波動乱流のダイナミクスに視点を移す。系の非線形性 η を非線形エネルギー V_s と線形エネルギー $E^{(2)}$ の比で $\eta = V_s/E^{(2)}$ と定義し、図 3 に、 η 、 $E^{(2)}$ と V_s の時間発展を描いている。非線形性には鋸歯状の強い間欠性が現れていることがわかる。ここでは、 $\eta > \langle \eta \rangle + \sqrt{\langle (\eta - \langle \eta \rangle)^2 \rangle}$ の時を active phase、 $\eta < \langle \eta \rangle - \sqrt{\langle (\eta - \langle \eta \rangle)^2 \rangle}$ の時を moderate phase と呼ぶことにする。

図 4 に、各 phase において平均したエネルギースペクトルとエネルギー輸送を示す。図 3 に現れている強い間欠性が、外力と強乱流領域に対応した中低波数域 ($k \lesssim 400$) に由来することが見て取れる。弱乱流領域に対応した高波数域や、図は省略したが、運動エネルギーや曲げエネルギーのスペクトルは phase による差は殆ど無かった。

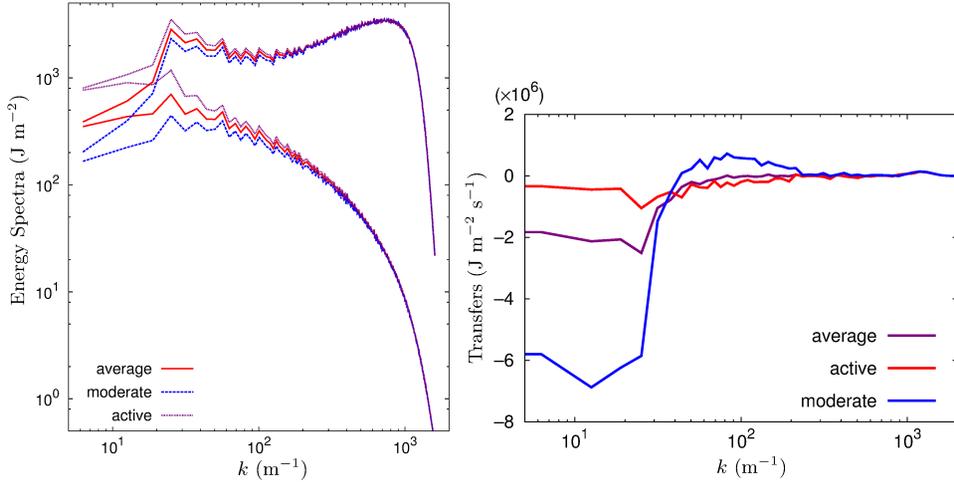


図 4: 各 phase において平均したエネルギースペクトルとエネルギー輸送。Ref. [13] より。

図 4 右より、active phase におけるエネルギー輸送が外力領域で大きく負になり強乱流領域で正となっているのに対し、moderate phase にはどちらの領域においても小さな負の値をとっていることがわかる。Active phase において、外力からエネルギーが供給され強乱流領域に分配されているのである。

3.4 実空間構造とエネルギー輸送

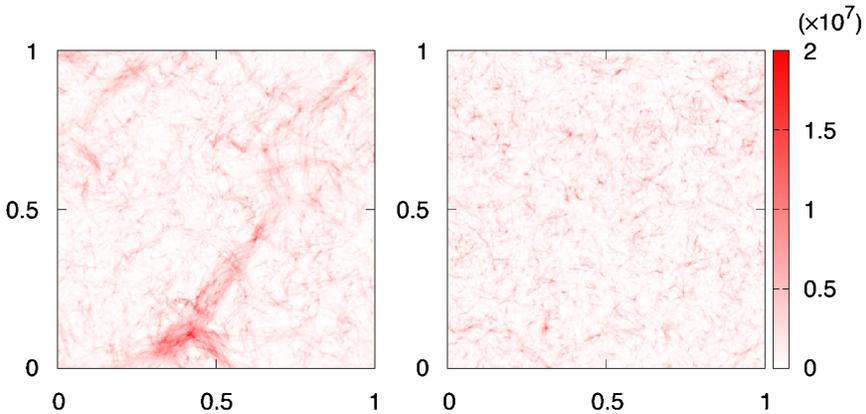


図 5: Active phase (左) と moderate phase (右) における伸縮エネルギー場。Ref. [13] より。

エネルギー輸送と実空間構造との関係を調べてみる。前節 3.3 の結果より、伸縮エネルギー場 \mathcal{L}_S に各 phase の差異が顕著に現れると考えられるので、図 6 にそれらを描いてある。Active phase では強いバンドル構造が現れているのに対し、moderate phase では顕著な構造が見当たらない。このバンドルの細長い構造が、前節 3.3 における、外力から強乱流領域への非局所的なエネルギーの輸送に対応している。

実空間におけるエネルギー輸送についても、節 3.2 で得た Fourier 空間におけるのと同じような表現が得られる。ある有限の領域 A に対して、同様にエネルギー分解をして各エネルギー輸送を定義すると

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} = T_{\mathcal{K}}^{(2)} + T_{\mathcal{K}}^{(4)} = -\frac{Yh^2}{12(1-\sigma^2)\rho} \int_A p \Delta^2 \zeta dA + \frac{1}{\rho} \int_A p \{\zeta, \chi\} dA \quad (9a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}_B}{\partial t} = T_B^{(2)} + T_B^{(D)} = \frac{Yh^2}{12(1-\sigma^2)\rho} \int_A p \Delta^2 \zeta dA + \text{B.V.}(\partial A) \quad (9b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}_S}{\partial t} = T_S^{(4)} + T_S^{(D)} = -\frac{1}{\rho} \int_A \chi \{p, \zeta\} dA + \text{B.V.}(\partial A) \quad (9c)$$

を導くことができる。ここで、 $\text{B.V.}(\partial A)$ は領域 A の境界での値を意味する。これらの実空間におけるエネルギー輸送についても、Fourier 空間における詳細釣り合いに相当する式 $T_{\mathcal{K}}^{(4)} + T_S^{(4)} = \text{B.V.}(\partial A)$ が成り立つ。図は省略するが、これらの表式を使って直接に実空間構造とエネルギー輸送との関係を調べることもでき、論文 [13] でバンドル構造との関係も明らかにした。

3.5 弾性波動乱流の全体像

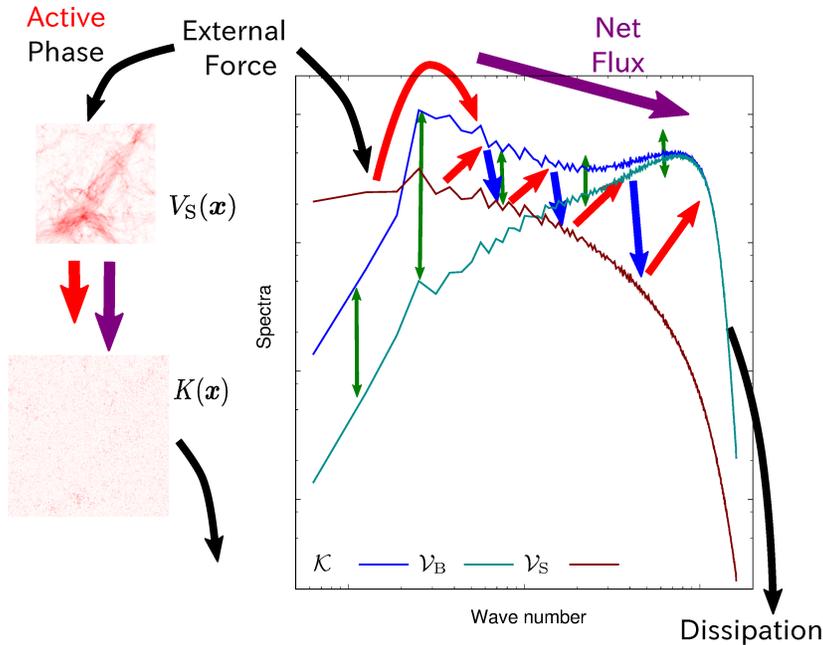


図 6: 弾性波動乱流のエネルギー輸送の概念図。Ref. [13] より。

これまでの結果を総合すると、弾性波動乱流の全体像が見えてくる [13]。外力は、主に active phase にエネルギーを伸縮エネルギーの形で外力領域にエネルギーを与え、実空間におけるバンドル構造を作る。この間欠構造は Fourier 空間で非局所的にエネルギーを強乱流領域に分配する。分配されたエネルギーは慣性領域を運動エネルギーと伸縮エネルギーの間で局所的に交換しながらカスケードする。弱乱流領域では運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの間を弱乱流理論の共鳴相互作用の形でカスケードされる。散逸領域に到達したエネルギーは運動エネルギーから供給される形で消散される。

4 新たな疑問

弾性波動乱流におけるエネルギー輸送の総合的な猫像が得られ、本研究課題に対して一区切りついたと考えていたが、最近出版された論文を読んでいると新たな疑問が出てきた。

Miquel ら [14] は、エネルギーレベルを上げると Dynamical Crumpling と呼ばれる d-cone に類似した構造が横変位 (ζ) 場に現れると報告した。 ζ は線形エネルギー (= 曲げエネルギー) に関係した量であり、我々の見つけた伸縮エネルギー (V_S) 場におけるバンドル構造やエネルギー輸送との関係は不明である。

また、Miquel らの最近の論文 [15] によると、実験のエネルギースペクトルが弱乱流理論の予測する k (右上がり) ではなく右下がりとなるのは、広域的なエネルギー散逸が原因とされている。節 2.2 での我々の理解とは異なるし、実験で報告されてきた波動乱流は慣性領域を持っていないことになる。これに関連して気になることがある。乱流の数値シミュレーションでは統計的平衡状態としながらも慣性領域を大きくするために、波数空間でできるだけ局在化した外力や散逸項が人為的に導入される。本弾性波動乱流の系において、慣性領域の普遍性がどの程度成り立つかは不明である。

更に、Düring らは論文 [16] において、高波数帯外力の数値シミュレーションを行い、アクションの逆カスケードを見出したとしている。同著者らによる先駆的な論文 [1] では、「1 ↔ 3 型の 4 波共鳴相互作用の存在によりアクションは保存量でなくなり、従ってアクションの逆カスケードは期待できない」と書いているにもかかわらずである。

最後に、昨年には Chibbaro と Josserand [17] は、数値シミュレーションにおいて 2 点の構造関数を調べて、小スケールにおける間欠性を報告している。弾性薄板の系の非線形性は大スケールほど大きく、小スケールほど弱乱流理論の近似が良くなるにもかかわらずである。

5 基礎方程式と外力依存性

前節に挙げた新たな疑問を調べる前に、定式化について再考してみた。

5.1 基礎方程式の同等性

我々は、波動乱流のオーソドックスな解析で用いられる複素振幅 a_k をベースとした式 (6) を数値シミュレーションしてきた。式 (1) と式 (3) とは、 (ζ, p) から a への正準変換に対応して、周期境界条件のもとで同等であるが、式 (1) に外力 F と散逸 D を加えた

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{p}{\rho} + F_\zeta + D_\zeta, \quad (10a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{Yh^2}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 \zeta + \{\zeta, \chi\} + F_p + D_p, \quad (10b)$$

と式 (3) に外力と散逸を加えた式 (6) とは必ずしも同等ではない。さらに言えば、式 (3) と式 (6) は (式 (10) も) 共に次式とも必ずしも同等ではない：

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{Yh^2}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 \zeta + \{\zeta, \chi\} + F + D \quad (11)$$

慣性領域は外力に鈍感なはずだから気にしなくても良いという楽観的な考え方もあるが、 $p = \rho \partial \zeta / \partial t$ の関係を壊すのは問題という考え方もある。流体乱流のように慣性領域を外力によらない普遍的なものとして考えられるかが不明である弾性波動乱流においては、数値シミュレーションでの外力の入れ方には慎重でなければならないと思う。

5.2 外力とエネルギースペクトル

線形分散関係や§ 2.2の結果からわかるように、低波数側では非線形の振る舞いが支配的となり、高波数側になるにつれて非線形性が弱くなる。また、§ 4でも書いたように、小スケールに間欠性があると主張する論文や、アクションの逆カスケードがあるとする論文もある。これらのことを数値シミュレーションにより調べる前に、低波数領域や高波数領域に加える外力の慣性領域への影響を明らかにしておく必要があると考えた。

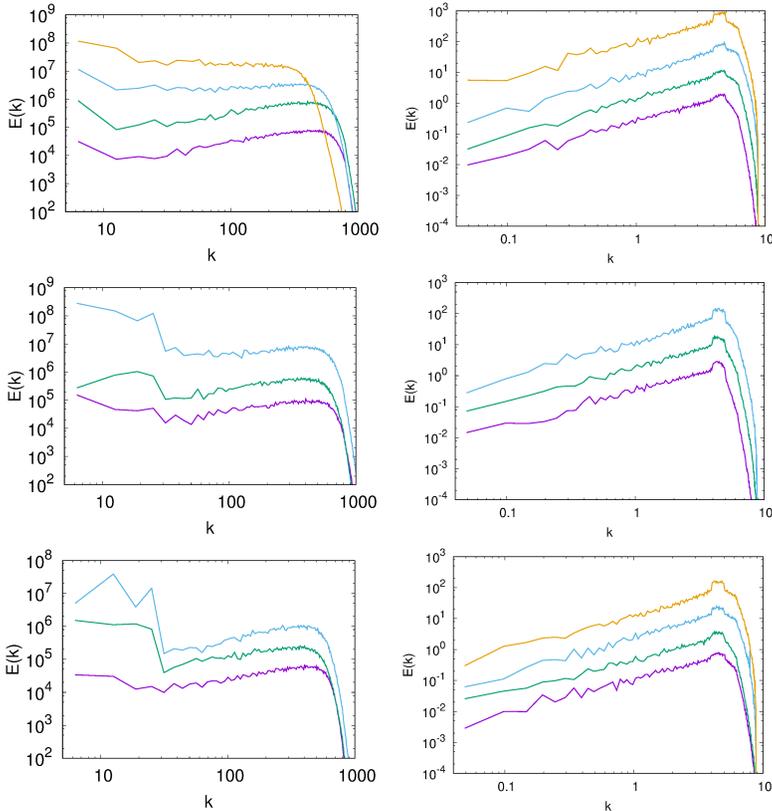


図 7: 線形エネルギースペクトル。

§ 2と3では振幅を一定とする外力を低波数領域に加えた数値シミュレーションの結果を示したが、ここでは、比較のために、対照的かつ他の論文でよく用いられているランダムな加法的外力を用いた結果を示す。§ 2.2から、スペクトルの形状がエネルギーレベルに依存すると予想されるので、外力の大きさをいくつか変えた。また、高波数領域外力では論文 [16] にならない、低波数領域に散逸機構を入れてはいない。

図 7 の上段、中段、下段にはそれぞれ式 (6)、(10)、(11) の形で、左列と右列にはそれぞれ低波数領域または高波数領域に外力を加えたときの、十分に定常とみなせる時刻における線形エネルギースペクトルを描いてある。波動乱流に関する他の論文のエネルギースペクトルは全て線形エネルギースペクトルなので、それらに合わせた。

高波数領域に外力を加えた場合は、エネルギースペクトルの形状が外力に鈍感なのに対して、低波数領域に外力を加えると、中段と下段は似ているが上段はかなり違った傾向を見せ、前者は

外力域から高波数側にエネルギーが殆ど流れていない。§ 3.5 でも書いたように、低波数領域では非局所的な強非線形の相互作用があるのに対し、高波数領域では局所的な共鳴相互作用のみとなっていることを反映していると考えられる。

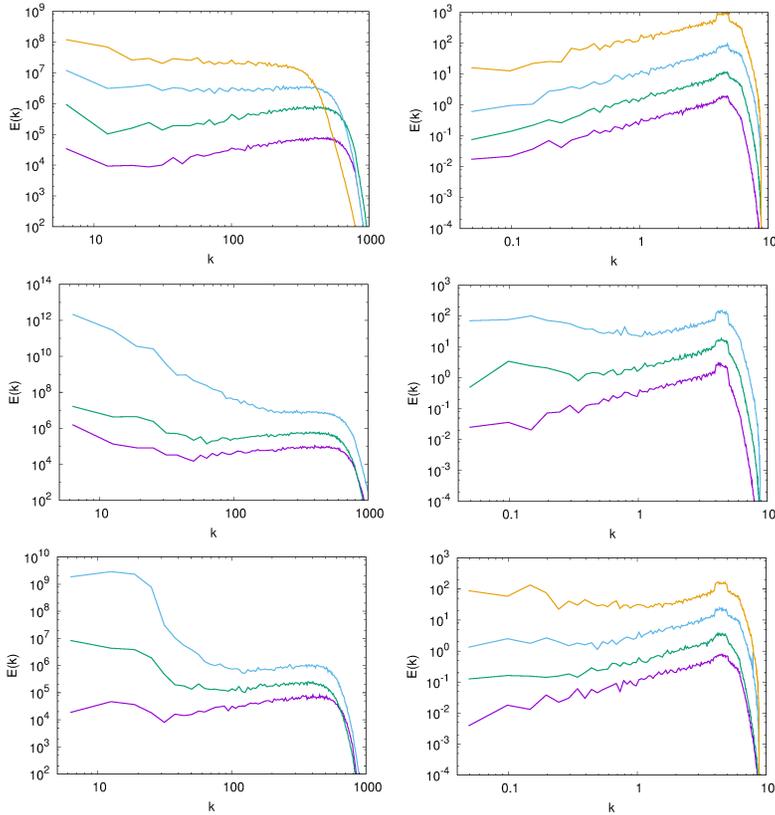


図 8: 非線形部まで含んだ全エネルギースペクトル。

§ 3にも書いたように、この系では非線形部まで含んだ全エネルギースペクトルを定義できるので、図8に図7の線形エネルギースペクトルをこれに置き換えたものを描いてある。非線形部まで含んだ全エネルギースペクトルで見ると、低波数領域外力の場合（左列）は、中段と下段は似ているが上段だけがかなり違った形となっており、外力の入れ方によりエネルギーの高波数側への伝達が大きく異なっていることがわかる。高波数領域外力の場合（右列）でも、線形のエネルギースペクトル（図7右列）では見えなかったが、エネルギーレベルが上がって来ると低波数領域に差異が認められるようになってくる。

6 まとめ

本報告では、弾性波動乱流に関する研究の簡単なレビューをしたのち、§ 3.5に我々の得た弾性波動乱流の全体像を示した。また、最近の研究結果から出て来た新たな疑問について考える準備段階として、低波数領域や高波数領域に加える外力の慣性領域への影響について数値シミュレーションにより調べた。

薄板の弾性波動は、実験、理論、数値シミュレーションの各方面からのアプローチが可能な系であるが、波動乱流系としてはかなり特異な側面も持っている。支配方程式である Föppl-von Kármán 方程式から導かれた弱乱流理論の運動論的方程式は 4 波共鳴相互作用系であるが、非線形項の対称性から $1 \leftrightarrow 3$ 型と $3 \leftrightarrow 1$ 型の共鳴相互作用の項の係数が 0 とならないので、アクションは一般には保存しない。また、等方な系にもかかわらずエネルギースペクトルに 2 種類の冪をもつ乱流状態が共存している。

基礎となるモードを、波動乱流の解析としては標準的な複素振幅 $a_{\mathbf{k}}$ を採用する代わりに、元の物理変数 $(\zeta_{\mathbf{k}}, p_{\mathbf{k}}, \chi_{\mathbf{k}})$ を採用すると、非線形部を含む全エネルギーに対して 1 波数表現が得られる。これにより、エネルギー輸送の厳密な解析表現が得られ、弱乱流理論が破綻をきたす状態であっても、その詳細な解析が可能となる。Fourier 空間および実空間の両面からの解析により、§ 3.5 に示したように、弾性波動乱流におけるエネルギー輸送の全体像を得ることができた。

しかしながら、最近の研究から波動乱流の別の側面が報告されるようになると、§ 4 に書いたような新たな疑問が湧いてくる。これらの疑問に答えようとするとき、その準備段階として、慣性領域の統計的性質の外力に対する依存性を明らかにしておく必要がある。乱流の数値シミュレーションでは外力や散逸を「適当に」加えることが普通である。これは慣性領域が外力や散逸によらず普遍的な振る舞いをすると考えているからである。また、この系で言うと、 a で記述するか (ζ, p) で記述するかはどの正準変数を取るかの問題で同等である。しかし、外力や散逸を加えた場合には必ずしも同等ではない。

それぞれの方程式に低波数領域または高波数領域に外力を加えた場合の数値シミュレーションの結果を § 5.2 に纏めたが、特に低波数領域に外力を加えた場合の線形エネルギースペクトルに顕著な差異が現れた。これは低波数側では非局所的な強乱流状態になっていることの現れである。線形エネルギースペクトルと非線形部を含む全エネルギースペクトルとでも外力依存性が異なることを示している。

今回の準備的な数値シミュレーションの結果によると、これまでの他の系も含む波動乱流の数値シミュレーションにおける外力の加え方についても再考してみる価値があるのかもしれない。また、エネルギースペクトルについても、これまでは全て線形エネルギースペクトルのみが議論されてきたが、エネルギー輸送という非線形現象が重要な役割をする波動乱流において、詳細に検討してみる必要があるように思う。

参考文献

- [1] Düring, G., Josserand, C., and Rica, S., “Weak turbulence for a vibrating plate: Can one hear a Kolmogorov spectrum?” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 97, 2006, pp. 025503.
- [2] Boudaoud, A., Cadot, O., Odille, B., and Touzé, C., “Observation of wave turbulence in vibrating plates,” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 100, 2008, pp. 234504.
- [3] Mordant, N., “Are there waves in elastic wave turbulence?” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 100, 2008, pp. 234505.
- [4] Miquel, B. and Mordant, N., “Nonstationary Wave Turbulence in an Elastic Plate,” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 107, 2011, pp. 034501.
- [5] Nazarenko, S., *Wave Turbulence*, Springer, Heidelberg, 2011.
- [6] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., *Theory of Elasticity*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1986.

- [7] Audoly, B. and Pomeau, Y., *Elasticity and geometry*, Oxford University Press, Oxford, 2010.
- [8] Zakharov, V. E., "Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid," *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, Vol. 9, 1968, pp. 86–94.
- [9] Yokoyama, N. and Takaoka, M., "Weak and Strong Wave Turbulence Spectra for Elastic Thin Plate," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 110, 2013, pp. 105501.
- [10] Yokoyama, N. and Takaoka, M., "Identification of a separation wave number between weak and strong turbulence spectra for a vibrating plate," *Phys. Rev. E*, Vol. 89, 2014, pp. 012909.
- [11] Connaughton, C., Nazarenko, S., and Newell, A. C., "Dimensional analysis and weak turbulence," *Physica D*, Vol. 184, 2003, pp. 86–97.
- [12] Yokoyama, N. and Takaoka, M., "Single-wave-number representation of nonlinear energy spectrum in elastic-wave turbulence of the Föppl–von Kármán equation: Energy decomposition analysis and energy budget," *Phys. Rev. E*, Vol. 90, 2014, pp. 063004.
- [13] Yokoyama, N. and Takaoka, M., "Integrated analysis of energy transfers in elastic-wave turbulence," *Phys. Rev. E*, Vol. 96, 2017, pp. 023106.
- [14] Miquel, B., Alexakis, A., Josserand, C., and Mordant, N., "Transition from Wave Turbulence to Dynamical Crumpling in Vibrated Elastic Plates," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 111, 2013, pp. 054302.
- [15] Miquel, B., Alexakis, A., and Mordant, N., "Role of dissipation in flexural wave turbulence: From experimental spectrum to Kolmogorov-Zakharov spectrum," *Phys. Rev. E*, Vol. 89, 2014, pp. 062925.
- [16] Düring, G., Josserand, C., and Rica, S., "Self-similar formation of an inverse cascade in vibrating elastic plates," *Phys. Rev. E*, Vol. 91, 2015, pp. 052916.
- [17] Chibbaro, S. and Josserand, C., "Elastic wave turbulence and intermittency," *Phys. Rev. E*, Vol. 94, 2016, pp. 011101(R).