

散逸ソリトンの爆発現象

筑波大学・システム情報系 内山 祐介

Yusuke Uchiyama

Faculty of Engineering, Information and Systems, University of Tsukuba

Abstract

空間 1 次元系の 5 次の非線形項を有する複素 Ginzburg-Landau 方程式の時空間ダイナミクスに現れる、散逸ソリトンの爆発現象の統計的諸性質を調べた。平均場のゆらぎは、2 重井戸型ポテンシャルに対応する確率分布で特徴づけられることが分かった。また、位置-運動量空間中での重心運動は非正規型の確率分布に従うことを確認した。これらの統計則を記述すると期待される確率微分方程式を導入し、対応する定常分布を導出した。

1 緒言

複素 Ginzburg-Landau 方程式(CGLE)は非平衡・開放系の Hopf 分岐点回りにおける散逸場の時空間パターン形成を記述する数理モデルの標準形である[1]。超臨界 Hopf 分岐に対応する場合は 3 次の、亜臨界 Hopf 分岐に対応する場合は 5 次の非線形項を最高次の項として持つことが知られている。この数理モデルに関連した様々な時空間パターンが実験および数値計算によって確認されている。特に、5 次の非線形項を持つ場合には非線形光学の分野でモデル方程式として使用され、その解の性質が理論的・応用的観点から精力的に調べられている[2]。

近年、散逸ソリトンの爆発現象と呼ばれる、散逸系の局在波が時間的に不安定化を伴う拍動を示す現象が数値計算により報告され、その性質は従来から知られていた時間的な周期現象であるブリーザー解とは異なるものであるということも示されている。この爆発現象は、定性的には無間次元力学系における安定多様体と不安定多様体が交差するホモクリニック軌道であることが示唆されている一方で[3]、詳細なダイナミクスについては未だ不明な点が多い。

本研究では、散逸ソリトンの爆発現象のダイナミクスを調べるために、いくつかの秩序変数を導入し、それらのゆらぎについて解析する。また、散逸ソリトンの位置-運動量空間における重心運動を疑似確率密度関数の一種である Wigner 分布関数を用いて定義する。これらの運動を解析する道具立てとして、非 Gauss 統計に従う確率微分方程式を導入し、その性質について論じる。

2 散逸ソリトンの統計的性質

CGLE は空間的な広がりを持つ散逸系に逡減摂動法を適用することにより導出される。この方程式は振幅と位相のゆっくりとした時空間変化を記述する。特に、亜臨界 Hopf 分岐に対応する 5 次の非線形項を有する CGLE は複素場 $A(x,t)$ に関して以下のように表される[2]。

$$\partial_t A = \mu A + (\beta_r + i\beta_i)|A|^2 A + (\gamma_r + i\gamma_i)|A|^4 A + (D_r + iD_i)\nabla^2 A \quad (1)$$

ここで、実パラメータ μ , β_r , β_i , γ_r , γ_i , D_r , D_i は元のシステム固有のパラメータから決定される。

式(1)に対して、スペクトル法的一种である擬スペクトル法を用いた数値計算を行った。時間積分スキームには4次の Runge-Kutta 法を採用した。システムサイズを $L=16\pi$ とし、境界条件には周期境界条件を採用した。初期条件には Gauss 型の波束を与え、位相に標準正規乱数を印加した。時間刻みは $\Delta t=0.005$, 空間刻みは $\Delta x=L/256$ とした。パラメータはそれぞれ、 $\mu=-0.213$, $\beta_r=1.0$, $\beta_i=0.8$, $\gamma_r=0.1$, $\gamma_i=-0.6$, $D_r=0.125$, $D_i=0.5$ に固定した。

散逸ソリトンのダイナミクスを調べるために、以下で定義される平均場を導入する。

$$X(t) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \text{Re}[A(x,t)] dx, \quad Y(t) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \text{Im}[A(x,t)] dx. \quad (2)$$

平均場の時系列を図1に示す。図1において、実部と虚部それぞれの平均場において、周期的な振動と間欠的な運動を確認することができる。これは、散逸ソリトンの爆発現象はブリーザーのような周期的なダイナミクスと状態が不安定化するダイナミクスで特徴づけられることを表している。この時系列に対応する確率分布を図2に示す。図2において、実部と虚部それぞれの平均場の確率分布は中央部が下に凸の形状を持ち、べき乗の広い裾野を持つことが確認できる。これは、図1において確認された周期的な振動は2重井戸型のポテンシャルの中で生じていることに対応する。すなわち、散逸ソリトンの振動はカオス的な不安定性を有することを示唆している。また、確率分布の両端に現れるべき乗の広い裾野は間欠的な運動によるものである。このような現象は他の非線形・非平衡系においても頻繁に観測されている。

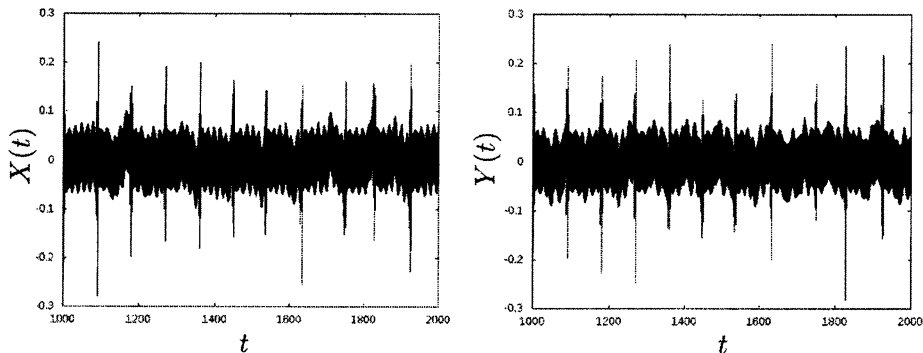


図1 平均場の時系列

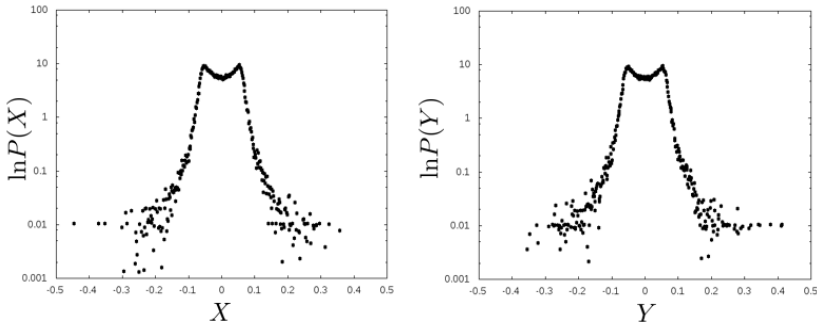


図2 平均場の時系列に対応する確率分布

次に散逸ソリトンの位置-運動量空間でのダイナミクスを調べるため、Wigner 分布関数を導入する[4]. これは、複素場 $A(x,t)$ から以下の式で定義される Wigner 変換により得られる.

$$W(x, p, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^*(x - y/2, t) A(x + y/2, t) e^{ipy} dy \quad (3)$$

ここで、 x と p はそれぞれ位置と運動量の座標である. 定義より、Wigner 分布関数は実関数であるが負の値も取り得る. 図3にある時刻における Wigner 分布関数を示す. この図においても負の値をとることが確認できる. また、位置と運動量の空間において波束が非対称な形状をしていることも確認できる. これは保存系における非線形波動の Wigner 分布関数には見られない特徴である. この非対称性は散逸の効果有位相のダイナミクスに影響を及ぼすことに起因していると考えられる.

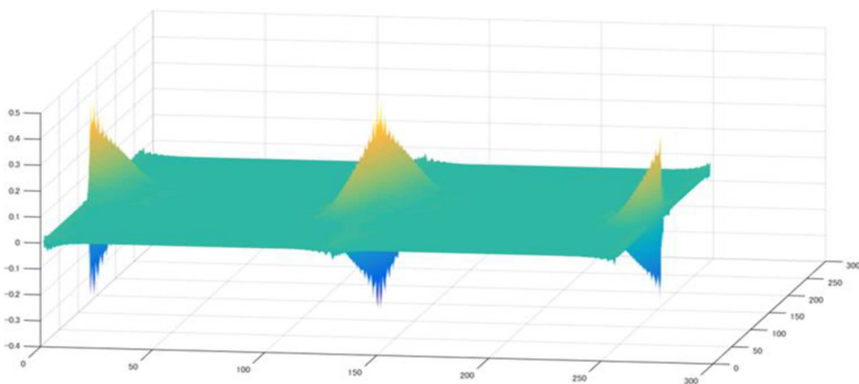


図3 散逸ソリトンの Wigner 分布関数

位置-運動量空間における重心運動を定義するため、Wigner 分布関数から以下の式で定義される確率密度関数を求める。

$$P(x, p, t) = \left(\int |W(x, p, t)|^2 dx dp \right)^{-1} |W(x, p, t)|^2 \quad (4)$$

この確率密度関数に対して位置と運動量の重心座標を以下のように導入する。

$$\bar{x}(t) = \int x P(x, p, t) dx dp, \quad \bar{p}(t) = \int p P(x, p, t) dx dp. \quad (5)$$

重心運動の時系列を図 4 に示す。図より、非定常な不規則運動を示すことが確認できる。トレンド成分を除去するために、時系列の差分をとる。これを示したものが図 5 である。この図において非定常なトレンド成分が除去され、間欠的な運動が支配的であることが確認できる。これらに対応する確率分布を図 6 に示す。差分時系列が示唆する通り、確率分布は左右対称なべき乗の裾野を持つことが確認できる。

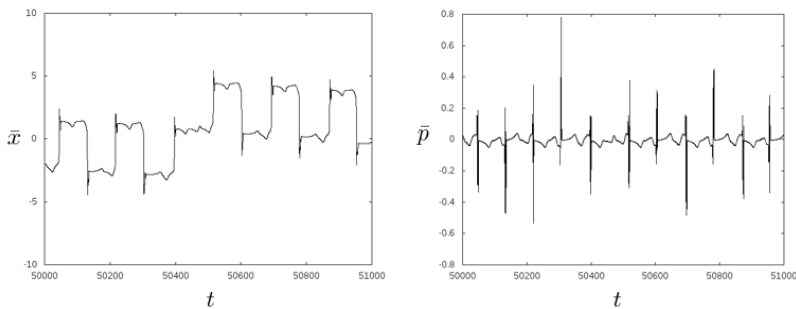


図 4 重心運動の時系列

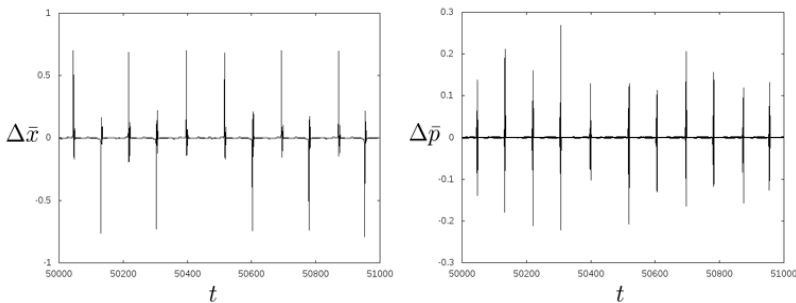


図 5 重心運動の差分時系列

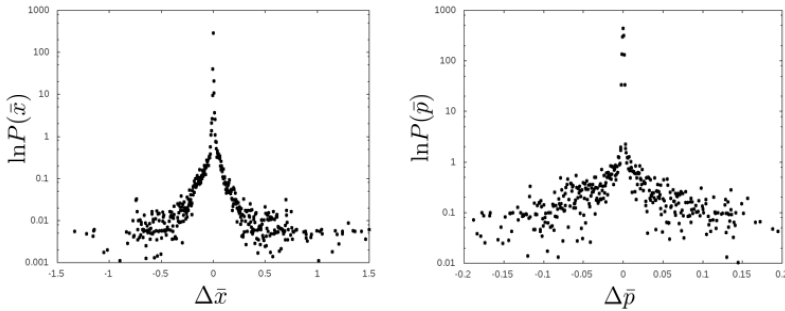


図6 重心運動の差分時系列に対応する確率分布

3 確率モデル

2 重井戸型ポテンシャルの中で運動する、ランダムな外力を受ける振動子は以下の確率微分方程式でモデル化される[5].

$$d\mathbf{Z} = -\nabla U(\mathbf{Z})dt + \sqrt{2D}dW \quad (6)$$

ここで、 \mathbf{Z} は X と Y を成分に持つ2成分ベクトルで、 W はそれぞれ独立な正規白色過程 w_x と w_y 成分に持つ2成分の確率ベクトルである。また、 $U(\mathbf{Z})$ は2重井戸型ポテンシャルであり、

$$U(X, Y) = \frac{1}{2}c_X X^2 + \frac{1}{2}c_Y Y^2 + \frac{1}{4}c_X X^4 + \frac{1}{4}c_Y Y^4 \quad (7)$$

で与えられる。式(6)に対応する確率密度関数の時間発展を記述する Fokker-Planck 方程式から定常分布が以下のように求められる。

$$P_s(x, y|\beta) \propto \exp[-\beta U(x, y)] \quad (8)$$

ここで、 β は逆温度と呼ばれるパラメータであり、 D の逆数として与えられる。 β を確率変数とすると、式(8)は β を固定した際の条件付き確率密度関数に相当する。ここで β がガンマ分布、

$$f(\beta) = \frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} \beta^{k-1} e^{-\beta/\theta} \quad (9)$$

に従う確率変数であると仮定すると Bayes の定理よりただちに

$$P_s(x, y) \propto [1 + \theta U(x, y)]^{-k} \quad (10)$$

が得られる。式(10)は2重井戸型ポテンシャルの特長とべき乗の裾野を有するため、平均場のダイナミクスを記述する数理モデルであることが期待される。

散逸ソリトンの重心運動のダイナミクスについては、位置と運動量とが共役な物理量であることを考慮すると Kramers 系で記述できることが期待される。しかし、通常の Kramers 系は定常状態において Maxwell-Boltzmann 統計に従うため、運動量の確率分布は正規分布に従い、べき乗の裾野を持たない。そこで、Kramers 系を拡張した以下の確率モデルを提案する。

$$dX = V dt, \quad (11)$$

$$dV = -[\gamma V + (D_m V^2 + D_a) \nabla U(X)] dt + \sqrt{2D_m} V dW_m + \sqrt{2D_a} dW_a \quad (12)$$

この拡張された Kramers 系は通常の相加性雑音に加え、相乗性雑音によっても駆動されていることが特徴である。実際、式(12)において $D_m \rightarrow 0$ とすると通常の Kramers 系に帰着する。対応する Fokker-Planck 方程式から導出される定常分布は以下の通りである。

$$P_s(x, v) = P_0 \exp[-\gamma U(x)] (v^2 + a^2)^{-\gamma/2 - 1} \quad (13)$$

ここで、 P_0 は規格化因子である。式(13)において、速度の確率密度関数が Maxwell-Boltzmann 統計とは異なるべき乗の分布となっていることが確認できる。また、式(12)および(13)におけるポテンシャル関数は任意に与えられるため、例えば、対数型のポテンシャル関数を与えると位置に関する確率密度関数もべき乗の分布となる。以上より、拡張された Kramers 系により散逸ソリトンの位置-運動量空間における重心運動をモデル化できる可能性があることが分かった。

4 結言

5 次の非線形項を有する CGLE に現れる散逸ソリトンの爆発現象の確率ダイナミクスを調べた。実部と虚部の平均場を導入し、その確率分布が2重井戸型のポテンシャル中での振動現象と間欠的な運動とで特徴づけられることを明らかにした。Wigner 分布関数を導入することで位置-運動量空間における散逸ソリトンの重心運動を調べた。その結果、位置、運動量ともにべき乗の裾野を持つ確率分布に従うことが明らかになった。

これらの特徴を記述することを目的に、2重井戸型ポテンシャルの中を運動する確率的振動子と拡張 Kramers 方程式を導入した。それらによって、定性的には確率密度関数の特長を捉えられることを確認した。自己相関関数や拡散挙動といった、他の統計量を数値計算結果と導入したモデルとで比較していくことが今後の課題である。

参考文献

- [1] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851, 1993.
- [2] J. D. Moores, *Opt. Commun.* **96**, 65, 1993.
- [3] N. Akhmediev and J. M. Soto-Crespo, *Phys. Rev. E* **70**, 036613, 2004.
- [4] E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749, 1932.
- [5] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, Springer, Berlin, 1983.