

不安定波動系におけるダイナミック安定化

愛媛大学理学部 飯塚剛

Takeshi Iizuka

Faculty of Science, Ehime University

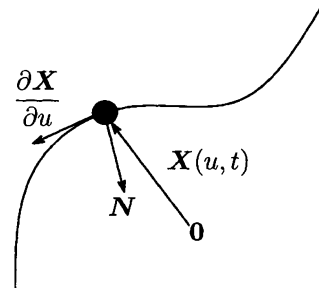
1 序文

ダイナミック安定化とは、力学系に適切な振動を与えると新たに安定化状態が生じる現象を言う。代表的な例はカピッツアの振り子であり、支点を高速振動させた単振り子の倒立状態が安定化する現象である [1,2]。マクロな力学系以外にも Bose-Einstein condensate の安定化 [3] やレーザーによる粒子トラップの問題 [4] にも適用されている。またロボットデバイスの応用とも関連がある [5]。ダイナミック安定化の加振動は主に調和振動を考えるが、最近では任意の周期的加振に関する研究がある [6]。また、量子力学的な研究も多々あり、連成カピッツア振り子の安定性解析 [7] などがある。

カピッツアの振り子は、言い換えると上下振動する円に拘束された質点の運動と言える。拘束曲線が円でないときはどうなるであろうか。次節では、高速に振動する任意の曲線に拘束された質点の運動を、ダイナミック安定化の立場から解析する。この解析は、曲面の問題にも容易に拡張ができる。第3節では振動する任意の曲面に拘束された質点を解析する。応用として、球面振り子のダイナミック安定化を調べる。第4節では球面振り子を連成させて、連続近似をとった場合の安定性を解析する。これはいわば、不安定な波動系に対するダイナミック安定化といえる。最終節では本論文のまとめを行う。

2 振動曲線に拘束された質点

本節では、高速に振動する曲線に拘束された質点の運動を解析する。まず、より一般的に動く空間曲線 $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, t)$ を考えよう。 \mathbf{X} は3次元空間における位置を表し、 u は曲線上のパラメータ(長さである必要はない)を示す。曲線に拘束された質点の運動を $u = u(t)$ として、拘束力以外の外力を \mathbf{f} とする。保存力のときは $\mathbf{f} = -\nabla U(\mathbf{X})$ とする。図のように曲線の接線ベクトルは $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}$ であり、曲線から受ける抗力を \mathbf{N} とする。 $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \perp \mathbf{N}$ であることに注意しよう。ここで質点の運動方程式は以下のように与えられる。



$$m \frac{d^2 \mathbf{X}(u(t), t)}{dt^2} = \mathbf{f} + \mathbf{N}, \quad (1)$$

$$\therefore m \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \ddot{u}(t) + \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial u^2} (\dot{u}(t))^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial u \partial t} \dot{u}(t) + \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} \right) = \mathbf{f} + \mathbf{N}. \quad (2)$$

ここで $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}$ を内積すると抗力は消去されて

$$m \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \ddot{u} + \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial u^2} \dot{u}^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial u \partial t} \dot{u} + \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \cdot \mathbf{f} = -\frac{dU(\mathbf{X}(u, t))}{du}, \quad (3)$$

となる。2番目の等号は外力がポテンシャル力の場合に対するものである。(3)は $u(t)$ に対する運動方程式となっている。

次に曲線が高速微小震動する場合を考える。つまり $\mathbf{X}(u, t)$ はある基準曲線 $\mathbf{X} = \mathbf{x}(u)$ の周りを振動するが、その振幅が十分小さく、さらにその振動周期が十分短いものと仮定する。具体的には微小パラメータ ε を用いて

$$\mathbf{X}(u, t) = \mathbf{x}(u) + \varepsilon \mathbf{y}(u, \tau), \quad \tau \equiv \varepsilon^{-1} t, \quad \mathbf{y}(u, \tau + T) = \mathbf{y}(u, \tau), \quad (4)$$

を仮定する。ただし振動の部分を示す $\mathbf{y}(u, \tau)$ については、その1周期分の平均値は消えるものとする。つまり周期を T として、

$$\langle \mathbf{y} \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \mathbf{y}(u, \tau') d\tau' = \mathbf{0}, \quad (5)$$

を仮定する。上記の平均値が消える性質を「DC成分がない」と呼ぶ。このとき質点の運動 $u(t)$ に対して摂動展開

$$u(\tau, t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(\tau, t) + \varepsilon^2 u_2(\tau, t) + \dots, \quad (6)$$

を導入する。以降 t と τ の、2つの時間スケールで解析を行う。ただし高次の u_1, u_2, \dots は、次式のように \mathbf{y} と同じ周期性を持ち、DC成分がないものとする。

$$u_i(u, \tau + T) = u_i(u, \tau), \quad \langle u_i \rangle = 0, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (7)$$

ここで基準曲線の接線ベクトル $\mathbf{t}(u_0) = \frac{d\mathbf{x}(u_0)}{du_0}$ を導入すると、運動方程式(3)より $O(1)$ まで考慮して

$$m \mathbf{t} \cdot \left\{ \mathbf{t} \left(\varepsilon^{-1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \ddot{u}_0 + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau \partial t} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} \right) + \dot{\mathbf{t}} \left(\dot{u}_0 + \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial u_0 \partial \tau} \left(\dot{u}_0 + \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right) + \left(\varepsilon^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \tau^2} + u_1 \frac{\partial^3 \mathbf{y}}{\partial u_0 \partial \tau^2} \right) \right\} + m \left(\dot{\mathbf{t}} u_1 + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial u_0} \right) \cdot \left(2 \mathbf{t} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \tau^2} \right) = -\frac{dU(\mathbf{x}(u_0))}{du_0}, \quad (8)$$

を得る。ただし \mathbf{t} のドットは u_0 の微分であり、 \mathbf{y} は u_0 と τ の関数 $\mathbf{y}(u_0, \tau)$ としている。(以下同様) また、外力はポテンシャル力とした。ここで $O(\varepsilon^{-1})$ の項を取り出すと

$$m \left(|\mathbf{t}|^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \mathbf{t} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \tau^2} \right) = 0 \quad \therefore u_1 = -\frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{t}|^2}, \quad (9)$$

となる。ただし u_1 にはDC成分がないので τ の積分の際の定数はないものとした。次に(8)の左辺の $O(\varepsilon^0)$ の項を取り出すと、

$$m \mathbf{t} \cdot \left\{ \mathbf{t} \left(\ddot{u}_0 + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau \partial t} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} \right) + \dot{\mathbf{t}} \left(\dot{u}_0 + \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial u_0 \partial \tau} \left(\dot{u}_0 + \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right) + u_1 \frac{\partial^3 \mathbf{y}}{\partial u_0 \partial \tau^2} \right\} + m \left(\dot{\mathbf{t}} u_1 + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial u_0} \right) \cdot \left(2 \mathbf{t} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \tau^2} \right), \quad (10)$$

を得る。上式を τ について 1 周期の平均をすると、DC 成分がない量 (\mathbf{y}, u_1, u_2) やそれらの微分の線形項は消えて

$$mt \cdot \left\{ t\ddot{u}_0 + \dot{t} \left(\dot{u}_0^2 + \left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right)^2 \right\rangle \right) + 2 \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial u_0 \partial \tau} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right\rangle + \left\langle u_1 \frac{\partial^3 \mathbf{y}}{\partial u_0 \partial \tau^2} \right\rangle \right\} \\ + m \left\langle \left(t u_1 + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial u_0} \right) \cdot \left(2t \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \tau^2} \right) \right\rangle, \quad (11)$$

となる。さらに DC 成分がない量の周期性と平均化の際の部分積分を考慮して τ の 2 階微分を全て 1 階微分に直し $\partial \mathbf{y}(u_0, \tau) / \partial \tau = \mathbf{y}_\tau$ と書くと (11) は

$$mt \cdot \left\{ t\ddot{u}_0 + \dot{t} \left(\dot{u}_0^2 - \left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right)^2 \right\rangle \right) - \left\langle \frac{\partial \mathbf{y}_\tau}{\partial u_0} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right\rangle \right\} - m \left\langle \left(\dot{t} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{y}_\tau}{\partial u_0} \right) \cdot \mathbf{y}_\tau \right\rangle \quad (12)$$

となる。さらに (9) より $\partial u_1 / \partial \tau = -(\mathbf{t} \cdot \mathbf{y}_\tau) / |\mathbf{t}|^2$ なので (12) の平均操作が含まれる部分は

$$m \left\{ -\frac{\dot{t} \cdot \dot{t}}{|\mathbf{t}|^4} \langle (\mathbf{t} \cdot \mathbf{y}_\tau)^2 \rangle + \frac{1}{|\mathbf{t}|^2} \left\langle \left(\mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}_\tau}{\partial u_0} \right) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{y}_\tau) \right\rangle + \frac{1}{|\mathbf{t}|^2} \langle (\dot{t} \cdot \mathbf{y}_\tau) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{y}_\tau) \rangle - \left\langle \mathbf{y}_\tau \cdot \frac{\partial \mathbf{y}_\tau}{\partial u_0} \right\rangle \right\} \quad (13)$$

となる。ここで

$$\frac{d}{du_0} \frac{1}{|\mathbf{t}(u_0)|^2} = -\frac{2\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{t}}}{|\mathbf{t}|^4} \quad (14)$$

に注意すると (13) は

$$\frac{d}{du_0} \left\{ \frac{m}{2} \left\langle \frac{1}{|\mathbf{t}|^2} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{y}_\tau)^2 - |\mathbf{y}_\tau|^2 \right\rangle \right\} \quad (15)$$

と書くことができる。この平均操作の対象となる量は

$$\left(\frac{\mathbf{t}}{|\mathbf{t}|} \cdot \mathbf{y}_\tau \right)^2 - |\mathbf{y}_\tau|^2 = -|(\mathbf{y}_\tau)_\perp|^2, \quad (16)$$

となる。ただし $(\mathbf{y}_\tau)_\perp$ は曲線の振動速度 \mathbf{y}_τ の曲線に垂直な成分を表している。つまり運動方程式 (8) を平均化すると

$$mt \cdot (t\ddot{u}_0 + \dot{t} \dot{u}_0^2) = -\frac{d}{du_0} \left\{ U(\mathbf{x}(u_0)) - \left\langle \frac{m}{2} |(\mathbf{y}_\tau)_\perp|^2 \right\rangle \right\} \quad (17)$$

となる。ただし (15) を右辺に移項した。この運動は静止基準曲線 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_0)$ に拘束された質点が、有効ポテンシャル

$$U_{\text{eff}}(u_0) = U(\mathbf{x}(u_0)) + \frac{m}{2} \left\langle \left(\frac{\mathbf{t}}{|\mathbf{t}|} \cdot \mathbf{y}_\tau \right)^2 - |\mathbf{y}_\tau|^2 \right\rangle = U(\mathbf{x}(u_0)) - \frac{m}{2} \langle |(\mathbf{y}_\tau)_\perp|^2 \rangle$$

の下で運動しているものとみなせる。

運動方程式 (3) は、ラグランジアン

$$\begin{aligned} L(u, \dot{u}, t) &= \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{X}(u, t)}{dt} \right)^2 - U(\mathbf{X}(u, t)) = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right)^2 - U(\mathbf{X}(u, t)) \\ &= \frac{m}{2} \left(\left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \right|^2 \dot{u}^2 + 2 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \dot{u} + \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right|^2 \right) - U(\mathbf{X}(u, t)) \end{aligned}$$

に対するラグランジュの運動方程式 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = \frac{\partial L}{\partial u}$ から導出が可能である。高速微小振動に対する同様の摂動展開の $O(\varepsilon^{-1})$ の議論より、(9) を直ちに求めることができる。ここで上記のラグランジアンについて摂動展開を行う。 $O(1)$ の項のみを残すことを考慮し

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \simeq \mathbf{t}, \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \simeq \mathbf{y}_\tau, \quad \dot{u} \simeq \dot{u}_0 + \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = \dot{u}_0 - \frac{(\mathbf{t} \cdot \mathbf{y}_\tau)}{|\mathbf{t}|^2}, \quad U(\mathbf{X}(u, t)) \simeq U(\mathbf{x}(u_0)), \quad (18)$$

とすると、ラグランジアン $L(u, \dot{u}, t)$ は近似的に

$$\frac{m}{2} \left\{ |\mathbf{t}|^2 \dot{u}_0^2 - 2\dot{u}_0 (\mathbf{t} \cdot \mathbf{y}_\tau) + \left(\frac{(\mathbf{t} \cdot \mathbf{y}_\tau)}{|\mathbf{t}|} \right)^2 + 2\mathbf{t} \cdot \mathbf{y}_\tau \left(\dot{u}_0 - \frac{(\mathbf{t} \cdot \mathbf{y}_\tau)}{|\mathbf{t}|^2} \right) + |\mathbf{y}_\tau|^2 \right\} - U(\mathbf{x}(u_0)), \quad (19)$$

となる。これは u_0, \dot{u}_0 の式であるが、 τ に関する 1 周期平均をとったものを $L_{\text{eff}}(u_0, \dot{u}_0)$ とする。このとき \mathbf{y}_τ の 1 次の項は消えて、

$$L_e(u_0, \dot{u}_0) = \frac{m}{2} |\mathbf{t}|^2 \dot{u}_0^2 - \left\{ U(\mathbf{x}(u_0)) + \frac{m}{2} \left\langle \left(\frac{\mathbf{t}}{|\mathbf{t}|} \cdot \mathbf{y}_\tau \right)^2 - |\mathbf{y}_\tau|^2 \right\rangle \right\}, \quad (20)$$

を得る。有効ラグランジアン L_{eff} の第 2 項を有効ポテンシャルとみなすと、運動方程式からのアプローチと同様の結果を得る。

3 振動曲面に拘束された質点

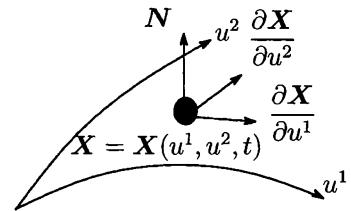
ここでは動く曲面に拘束された質点の運動を考える。曲面の式をパラメータ u^1, u^2 を用いて

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(u^1, u^2, t), \quad (21)$$

とする。曲面に接する 2 つのベクトルは $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i}$ ($i = 1, 2$) である。質点が曲面から受ける垂直抗力 (拘束力) を \mathbf{N} 、質点が受ける外力を \mathbf{f} とすると、運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{X}(u^1(t), u^2(t), t)}{dt^2} = \mathbf{f} + \mathbf{N}, \quad (22)$$

$$\therefore m \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^j} \ddot{u}^j + \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial u^j \partial u^k} \dot{u}^j \dot{u}^k + 2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial u^j \partial t} \dot{u}^j + \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} \right) = \mathbf{f} + \mathbf{N}. \quad (23)$$



となる。 N は $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i}$ に垂直であることを考慮してこれを上式に内積すると、

$$m \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^j} \dot{u}^j + \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial u^j \partial u^k} \dot{u}^j \dot{u}^k + 2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial u^j \partial t} \dot{u}^j + \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i} = \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i}, \quad (24)$$

を得る。特にポテンシャル力の場合は

$$\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i} = -\nabla U(\mathbf{X}) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i} = -\frac{\partial U(\mathbf{X}(u^1, u^2, t))}{\partial u^i}, \quad (25)$$

と書けることに注意。また $G_{ij} \equiv \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^j} = G_{ji}$, $H_i \equiv \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i}$ とすると、

$$\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial u^j \partial u^k} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial G_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial G_{jk}}{\partial u^i} \right), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial u^j \partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial H_i}{\partial u^j} - \frac{\partial H_j}{\partial u^i} \right), \quad (26)$$

を満たすことに注意しよう。次に曲面が微小高速振動しているものとして、

$$\mathbf{X}(u^1, u^2, t) = \mathbf{x}(u^1, u^2) + \varepsilon \mathbf{y}(u^1, u^2, \tau), \quad \mathbf{y}(u^1, u^2, \tau + T) = \mathbf{y}(u^1, u^2, \tau), \quad (27)$$

とする。 $\tau = \varepsilon^{-1}t$ は前節同様、高速運動を示す時間である。 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2)$ は基準曲面を示している。パラメータ u^1, u^2 に対しては次の摂動展開を与える。

$$u^i(t) = u_0^i(t) + \varepsilon u_1^i(\tau, t) + \varepsilon^2 u_2^i(\tau, t) + \dots, \quad \langle u_1^i \rangle = \langle u_2^i \rangle = \dots = 0 \quad (28)$$

前節同様、平均操作 $\langle \cdot \rangle$ は τ の 1 周期分ある。基準曲面に対して、自然標構 \mathbf{r}_i および計量テンソル g_{ij} を

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(u_0^1, u_0^2) \equiv \frac{\partial \mathbf{x}(u_0^1, u_0^2)}{\partial u_0^i}, \quad g_{ij} = g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \equiv \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j, \quad (29)$$

で定義すると、運動方程式 (24) における $O(\varepsilon^{-1})$ の部分を取り出すと

$$m \left(\sum_{j=1}^2 g_{ij} \frac{\partial^2 u_1^j}{\partial \tau^2} + \mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{y}(u_0^1, u_0^2, t)}{\partial \tau^2} \right) = 0, \quad \therefore u_1^j = -\sum_{i=1}^2 g^{ij} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{y}), \quad (30)$$

となる。ただし g^{ij} は g_{ij} を行列とみなしたときの逆行列であり、 $\sum_k g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$ (クロネッカーのデルタ) を満たす。ここで τ について 2 回積分を行ったが、 u_1^i の DC 成分はないものと仮定して、積分定数はいずれも 0 とした。

前節では運動方程式の $O(\varepsilon^0)$ の部分の解析を行ったが、曲面の場合は煩雑になるので、ラグランジアンを用いた議論を採用する。そのために、まず質点の運動エネルギーを考える。(27),(28) より速度に対しては

$$\frac{d\mathbf{X}(u^1(t), u^2(t), t)}{dt} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^j} \dot{u}^j + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \sum_{j=1}^2 \mathbf{r}_i \left(\dot{u}_0^j + \frac{\partial u_1^j}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tau} + O(\varepsilon), \quad (31)$$

となる。ただし \mathbf{y} は u_0^1, u_0^2, τ の関数 $\mathbf{y}(u_0^1, u_0^2, \tau)$ である。以下同様とする。従って運動エネルギー K を平均化したものは $O(\varepsilon)$ を無視して

$$\begin{aligned} \langle K \rangle &= \frac{m}{2} \left\langle \left| \sum_{j=1}^2 \mathbf{r}_j \left(\dot{u}_0^j + \frac{\partial u_1^j}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tau} \right|^2 \right\rangle \\ &= \frac{m}{2} \left\{ \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \left(\dot{u}_0^i \dot{u}_0^j + \left\langle \frac{\partial u_1^i}{\partial \tau} \frac{\partial u_1^j}{\partial \tau} \right\rangle \right) + 2 \sum_{j=1}^2 \left\langle \left(\mathbf{r}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tau} \right) \frac{\partial u_1^j}{\partial \tau} \right\rangle + \left\langle \left| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tau} \right|^2 \right\rangle \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

となる。ただし u_1^j, \mathbf{y} に関する線形項は、DC 成分がないため平均化の際、消去されたことに注意しよう。(30) より u_1^1, u_1^2 を消去し、 g_{ij} と g^{ij} が互いに逆行列であることに注意すると

$$\langle K \rangle = \frac{m}{2} \left\{ \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \dot{u}_0^i \dot{u}_0^j + \left\langle |\mathbf{y}_\tau|^2 - \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{y}_\tau) (\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{y}_\tau) \right\rangle \right\}, \quad \mathbf{y}_\tau \equiv \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tau}, \quad (33)$$

となる。ポテンシャルエネルギーに関しては $O(\varepsilon)$ を無視して $U(\mathbf{X}) \simeq U(\mathbf{x}(u^1, u^2))$ とする。これより平均化操作をして得られる有効ラグランジアン $L_{\text{eff}}(u_0^1, u_0^2, \dot{u}_0^1, \dot{u}_0^2)$ は

$$L_{\text{eff}} = \frac{m}{2} \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \dot{u}_0^i \dot{u}_0^j - \left\{ U(\mathbf{x}(u^1, u^2)) - \frac{m}{2} \left\langle |\mathbf{y}_\tau|^2 - \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{y}_\tau) (\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{y}_\tau) \right\rangle \right\}, \quad (34)$$

である。この右辺第2項の $\{ \}$ 内は \dot{u}_0^i に依存しない関数であり、有効ポテンシャルを与える。ここで平均化の対象の部分について考えよう。自然標構 $\mathbf{r}_i (i=1, 2)$ は、基準曲面の接ベクトルを与える。そこで \mathbf{y}_τ の曲面に垂直な成分を $(\mathbf{y}_\tau)_\perp$ として、

$$\mathbf{y}_\tau = (\mathbf{y}_\tau)_\perp + \sum_{i=1}^2 a^i \mathbf{r}_i, \quad (35)$$

とする。このとき直ちに $|\mathbf{y}_\tau|^2 = |(\mathbf{y}_\tau)_\perp|^2 + \sum_{i,j=1}^2 a^i a^j g_{ij}$ がわかる。一方

$$\sum_{k,l=1}^2 g^{kl} (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{y}_\tau) (\mathbf{r}_l \cdot \mathbf{y}_\tau) = \sum_{k,l=1}^2 g^{kl} \left(\sum_{i=1}^2 a^i g_{ik} \right) \left(\sum_{j=1}^2 a^j g_{jl} \right) = \sum_{i,j=1}^2 a^i a^j g_{ij}, \quad (36)$$

となる。つまり平均化の対象の部分は $|(\mathbf{y}_\tau)_\perp|^2$ となり、これは動く曲線の解析と全く同様の結果である。結局有効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(u_0^1, u_0^2)$ は

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}(u_0^1, u_0^2) &= U(\mathbf{x}(u^1, u^2)) - \frac{m}{2} \left\langle |\mathbf{y}_\tau|^2 - \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{y}_\tau) (\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{y}_\tau) \right\rangle \\ &= U(\mathbf{x}(u^1, u^2)) - \frac{m}{2} \langle |(\mathbf{y}_\tau)_\perp|^2 \rangle, \end{aligned} \quad (37)$$

で与えられる。次に運動方程式を導こう。つまり、ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{u}_0^i} \right) = \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial u_0^i}, \quad (38)$$

を具体的に求める。結果として

$$m \left\{ \sum_{j=1}^2 g_{ij} \dot{u}_0^j + \sum_{j,k=1}^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_0^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_0^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_0^i} \right) \dot{u}_0^j \dot{u}_0^k \right\} = -\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial u_0^i}, \quad (39)$$

を得る。これに g^{il} を乗して i の和をとると

$$m \left(\ddot{u}_0^i + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i \dot{u}_0^j \dot{u}_0^k \right) = -\sum_{i=1}^2 g^{ii} \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial u_0^i}, \quad \Gamma_{jk}^i \equiv \sum_{i=1}^2 \frac{g^{il}}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_0^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_0^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_0^i} \right) \quad (40)$$

と書ける。 Γ_{jk}^i はクリストッフェルの記号である。運動方程式 (40) において、 $U_{\text{eff}} = 0$ としたものは、測地線の方程式であり、静止した基準曲面上を外力がない下で運動する質点を表す式となっている。外力がポテンシャル力でない場合は左辺に含まれる $-\sum_{i=1}^2 g^{ii} \partial U(\mathbf{x}(u_0^1, u_0^2)) / \partial u_0^i$ の部分を (25) より $\sum_{i=1}^2 g^{ii} \mathbf{f} \cdot \mathbf{r}_i$ に置き換えればよい。

4 球面振り子への応用

前節の結果の応用として球面振り子の支点が、高速微小振動を受ける場合を考える。 $u_0^1 = \theta$ = 「下からの振れ角」、 $u_0^2 = \phi$ = 「水平面の回転角」とすると、基準曲面は球面となり、振り子の長さを l とすると、

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = l(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, -\cos \theta), \quad (41)$$

となる。球面 (41) に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = l(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta), \quad \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} = l \sin \theta (-\sin \phi, \cos \phi, 0), \\ g_{11} &= \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = l^2, \quad g_{22} = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = l^2 \sin^2 \theta, \quad g_{12} = g_{21} = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0, \\ g^{11} &= l^{-2}, \quad g^{22} = (l \sin \theta)^{-2}, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \cot \theta, \quad \Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \text{他の } \Gamma_{jk}^i = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

が成立する。有効運動方程式は

$$m \left\{ \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta (\dot{\phi})^2 \right\} = -\frac{1}{l^2} \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \theta}, \quad (43)$$

$$m \left\{ \ddot{\phi} + 2 \cot \theta (\dot{\theta} \dot{\phi}) \right\} = -\frac{1}{l^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \phi}, \quad \therefore \frac{d}{dt} \left\{ m l^2 \sin^2 \theta (\dot{\phi}) \right\} = -\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \phi}, \quad (44)$$

となる。一方加振に対しては $\mathbf{y}(\tau) = (e(\tau), f(\tau), h(\tau))$ とすると有効ポテンシャルは

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}} &= -mgl \cos \theta - \frac{m}{2} \left\langle \left(\mathbf{y}_\tau \cdot \frac{\mathbf{x}}{l} \right)^2 \right\rangle \\ &= -mgl \cos \theta - \frac{m}{2} \left\langle (\dot{e} \sin \theta \cos \phi + \dot{f} \sin \theta \sin \phi - \dot{h} \cos \theta)^2 \right\rangle \\ &= -mgl \cos \theta - \frac{m}{2} \left\{ \frac{2\langle \dot{h}^2 \rangle - \langle \dot{e}^2 \rangle - \langle \dot{f}^2 \rangle}{4} \cos 2\theta - (\langle \dot{e} \dot{h} \rangle \cos \phi + \langle \dot{f} \dot{h} \rangle \sin \phi) \sin 2\theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\langle \dot{e}^2 \rangle - \langle \dot{f}^2 \rangle) \cos 2\phi + 2\langle \dot{e} \dot{f} \rangle \sin 2\phi}{4} (1 - \cos 2\theta) \right\} + \text{定数} \quad (45) \end{aligned}$$

となる。定数部分は運動方程式に無関係なので今後省略する。特に直線的な加振の場合は $\mathbf{y}(\tau) = A(\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha) \sin \omega \tau$ とする。 A は振動振幅を表しており、 $\varepsilon^{-1}\omega$ は角振動数である。 α は加振直線の鉛直からの振れ角である。 $\alpha = 0$ の場合は、垂直加振となり、 $\alpha = \pi/2$ が水平加振に相当する。 $\langle \cos^2 \omega \tau \rangle = 1/2$ に注意すると

$$\begin{aligned} \langle \dot{e}^2 \rangle &= \frac{(A\omega)^2}{2} \sin^2 \alpha \cos^2 \beta, & \langle \dot{f}^2 \rangle &= \frac{(A\omega)^2}{2} \sin^2 \alpha \sin^2 \beta, & \langle \dot{h}^2 \rangle &= \frac{(A\omega)^2}{2} \cos^2 \alpha, \\ \langle \dot{e}\dot{f} \rangle &= \frac{(A\omega)^2}{2} \sin^2 \alpha \cos \beta \sin \beta, & \langle \dot{e}\dot{h} \rangle &= \frac{(A\omega)^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta, \\ \langle \dot{f}\dot{h} \rangle &= \frac{(A\omega)^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta, \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}(\theta, \phi) &= -mgl \cos \theta \\ &- \frac{m(A\omega)^2}{2} \frac{1}{8} \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2\alpha \right) \cos 2\theta + \sin^2 \alpha (1 - \cos 2\theta) \cos 2(\phi - \beta) \right. \\ &\quad \left. - 2 \sin 2\alpha \sin 2\theta \cos(\phi - \beta) \right\} \end{aligned} \quad (46)$$

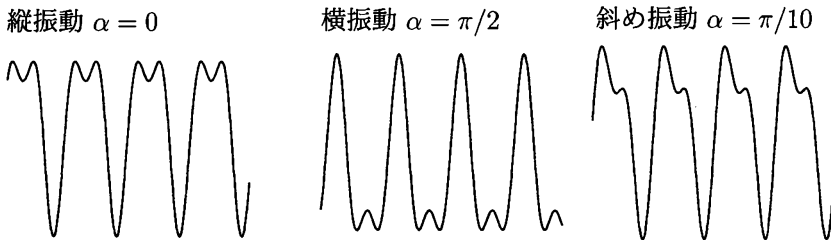
となる。運動方程式は直ちに

$$\begin{aligned} ml^2 \left\{ \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta (\dot{\phi})^2 \right\} &= -\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta \\ -\frac{m(A\omega)^2}{16} \left\{ (1 + 3 \cos 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos 2(\phi - \beta)) \sin 2\theta + 4 \sin 2\alpha \cos 2\theta \cos(\phi - \beta) \right\} \\ \frac{d}{dt} \left\{ ml^2 \sin^2 \theta (\dot{\phi}) \right\} &= -\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \phi}, \\ = \frac{m(A\omega)^2}{16} \left\{ -2 \sin^2 \alpha (1 - \cos 2\theta) \sin 2(\phi - \beta) + 2 \sin 2\alpha \sin 2\theta \sin(\phi - \beta) \right\} \end{aligned} \quad (47)$$

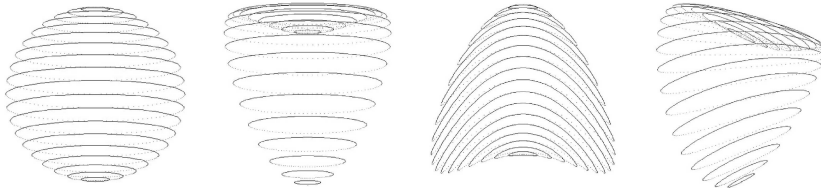
と書ける。特に単振り子の場合は運動が $x-z$ 面に限られているとしてよいので、 $\beta = 0$ とすると有効ポテンシャル (46) は

$$U_{\text{eff}}(\theta) = -mgl \cos \theta - \frac{m(A\omega)^2}{2} \frac{1}{8} \cos 2(\theta + \alpha) \quad (48)$$

となる。簡単場合の有効ポテンシャルの様子を下図に示した。



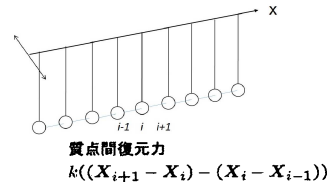
縦振動 $\alpha = 0$ のときは、カップツアの振り子に相当して、倒立状態が安定化安定化していることがわかる。横振動 $\beta = 0$ のときは、逆に下方の安定状態が不安定化して、分岐が起こっている。球面振り子に関する、有効ポテンシャルの概略図を下に示した。



加振なし 鉛直加振 水平加振 斜め加振 ($\alpha = \pi/10$)
単振り子と同様に、倒立状態の安定化が起こっていることがわかる。

5 連成球面振り子へと連続近似

本節では球面振り子が連成したときの、ダイナミック安定化を考える。隣接振り子間に線形的な復元力があるものとし、定数を k とする。 i 番目の振れ角を θ_i, ϕ_i とすると、運動方程式は



$$ml^2(\ddot{\theta}_i - \sin \theta_i \cos \theta_i (\dot{\phi}_i)^2) = -\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \theta_i} + kl^2(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}), \quad (49)$$

$$\frac{d}{dt} \left(ml^2 \sin^2 \theta_i \dot{\phi}_i \right) = -\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \phi_i} + kl^2(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) \sin^2 \theta_i, \quad (50)$$

で与えられる。ここで振り子間距離を a として、連続極限 $(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) \rightarrow a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ (ϕ も同様) をとると

$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 = -\frac{1}{ml^2} \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \theta}, \quad (51)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{1}{ml^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \phi}, \quad (52)$$

を得る。ただし $v = \sqrt{\frac{k}{m}} a$ である。(51),(52) を解くのは一般的には不可能だと思われるが、ここでは簡単な場合を考えてみる。

まず ϕ を定値とし、加振は直線的なものとする

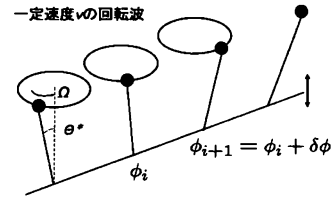
$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{(A\omega)^2}{8l^2} \sin 2(\theta + \alpha), \quad (53)$$

となる。これは一般化されたダブルサインゴールドン方程式であり、キंक解やソリトン解を有することが知られている。次に、 θ が一定の値 θ_0 として、鉛直加振を仮定する。

このとき (51),(52) は

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 = \frac{(A\omega)^2}{2l^2} + \frac{g}{l \cos\theta_0} \equiv \Omega^2, \quad (54)$$

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right) = 0, \quad (55)$$



となり、 $\phi = \Omega(t \pm \frac{x}{v})$ と求まった。これは図のように、倒立状態の振り子の水平回転が速度 v で伝わる波を表している。

6 まとめ

本論文ではダイナミック安定化の理論を、任意の曲線や曲面に拘束された質点の運動に適用した。曲線や曲面が高速微小振動するとき、平均化法によって有効ポテンシャルを導出することができた。このとき、加振による効果はいずれの場合も、 $-\frac{m}{2}\langle |(\mathbf{y}_\tau)_\perp|^2 \rangle$ という形で現れることがわかった。また、ダイナミック安定化を球面振り子に適用して、有効ポテンシャルを具体的に導出した。さらにこれを連成振り子として扱い、連続近似をした波動系に対してもダイナミック安定化が起こることを示し、簡単な解の例を明らかにした。

参考文献

- [1] A. Stephenson, 'On induced stability,' Philosophical Magazine, vol. 17, pp. 765-766, 1909.
- [2] P. L. Kapitza, 'Dynamic stability of a pendulum with an oscillating point of suspension,' Journal of Experimental and Theoretical Physics, vol. 21, pp. 588-597, 1951.
- [3] H. Saito and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. 90, 040403(2003).
- [4] I. Gilary, N. Moiseyev, S. Rahav, and S. Fishman, "Trapping of particles by lasers: the quantum Kapitza pendulum," Journal of Physics A, vol. 36, no. 25, pp. L409-L415, 2003.
- [5] Y. Nakamura, T. Suzuki, and M. Koinuma, "Nonlinear behavior and control of a nonholonomic free-joint manipulator," IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 13, no. 6, pp. 853- 862, 1997.
- [6] B. Ahmad, 'Stabilization of Kapitza oscillator by symmetric periodical forces,' Non-linear Dynamics, vol. 62, no. 3, pp. 499- 506, 2010.
- [7] Roberta Citro et al. 'Dynamical stability of a many-body Kapitza pendulum', Annals of Physics 360 (2015) 694-710.