

# Davey-Stewartson 2 方程式の ダーク型線ソリトン相互作用の理論解析

早稲田大学基幹理工学研究科 巢山 大地

Daichi Suyama

School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University

早稲田大学基幹理工学研究科 永原 新

Arata Nagahara

School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University

早稲田大学理工学術院 丸野 健一

Ken-ichi Maruno

Faculty of Science and Engineering, Waseda University

## 概要

水面波の弱非線形モデルの一つである Davey-Stewartson(DS) 方程式は多様な厳密解を持つことが知られている。特に、DS2 方程式と呼ばれる場合にはダーク型線ソリトン解が存在し、それらが相互作用する多ダーク型線ソリトン解も存在することが知られているが、多ダーク型線ソリトン相互作用のより詳しい解析はこれまで殆どなされていない。本稿では、KP ソリトン理論を基礎にした DS2 方程式のダーク型線ソリトン相互作用のより詳しい理論解析について報告する。

## 1 はじめに

2 次元非線形有限水深重力波を記述する Davey-Stewartson(DS) 方程式 [1] は  $N$ -ダーク型線ソリトン解 [2], ランプ解 [3], ドロミオン解 [4] を持つことが知られている。また海洋に現れる rogue wave に似た振る舞いをする有界な有理解 (rogue wave 解) も報告されている [5-7]。DS 方程式の様々な厳密解に対して 1 次元化を行うと非線形 Schrödinger 方程式の厳密解が得られる。DS 方程式は 2 次元有限水深 (表面張力) 重力波やプラズマ中の非線形波動を記述する非線形偏微分方程式であることが知られている [8-11]。

二次元弱非線形浅水波を記述する Kadomtsev-Petviashvili(KP) 方程式をはじめとする 2 次元ソリトン方程式は複雑な相互作用をすることが知られている。Miles が発見した KP 方程式のソリトン共鳴 [12,13] は 2 つのソリトンの相互作用によって振幅の大きなソリトンが新たに生成されるメカニズムであり、浅水波の Mach 反射という現象を説明することから、多くの波動研究者の注目を集め、これまでさまざまな研究がなされてきた [14-20]。特に KP 方程式の線ソリトン相互作用の詳細な解析は Kodama らによってなされ、二次元のソリトンダイナミクスの持つ数理的構造が明らかになってきた [21-34]。例えば以下のようなことが分かっている：

- KP2 方程式の解である  $\tau$  関数は、相互作用のパターンを決定する「 $A$  行列」と、ソリトンの角度や振幅を決定する「パラメーター  $k$ 」によって決定される。
- ソリトンのグラフは卓越する領域の移り変わりに着目することで置換と対応付けることができ、与えられた置換から  $A$  行列を構成できる。
- $A$  行列とパラメーター  $k$  の情報を集約した chord 図と呼ばれるものが存在し、与えられた chord 図か

らソリトンのグラフが描ける.

- ソリトンのグラフから chord 図を構成することができ,  $\tau$  関数を構成することができる.
- Le-diagram やネットワークのような組み合わせ論的手法を用いて詳細な解析ができる.

DS 方程式においても同様の解析ができると期待されるが, そのような解析は十分にはなされていない. DS 方程式は KP 方程式より多様な厳密解を持つため, より複雑な相互作用の解析ができると考えられる. 永原らは DS2 方程式のダーク型線ソリトン解に対する数値計算スキームを開発し, 広田の方法と数値計算を用いて DS2 ソリトンの相互作用の角度依存性を調べた [35]. しかし, KP 方程式に対して行われたような理論解析は未完成である.

本稿では  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 1$  とした defocusing DS2 方程式の線ソリトン相互作用について, 組み合わせ論的手法を用いた解析によって DS2 ソリトンのグラフから  $\tau$  関数が決定できることを報告する.

## 2 Davey-Stewartson 方程式

Davey-Stewartson 方程式は (1), (2) 式によって表される空間 2 次元の非線形偏微分方程式である [1]:

$$iu_t + u_{xx} - \sigma_1 u_{yy} + 2\sigma_2 |u|^2 u + 4uQ = 0, \quad (1)$$

$$Q_{xx} + \sigma_1 Q_{yy} + \sigma_2 (|u|^2)_{xx} = 0. \quad (2)$$

ただし  $\sigma_1 = \pm 1$ ,  $\sigma_2 = \pm 1$  であり, 特に  $\sigma_1 = -1$  のとき Davey-Stewartson 1(DS1) 方程式,  $\sigma_1 = +1$  のとき Davey-Stewartson 2(DS2) 方程式と呼ばれる. また  $\sigma_2 = -1$  のとき focusing に対応し,  $\sigma_2 = +1$  のとき defocusing に対応する [4].

広田の方法を用いて厳密解を求める. DS 方程式に

$$u = \rho_0 \frac{g(x, y, t)}{f(x, y, t)} e^{i(kx+ly-\omega t+\xi^{(0)})}, \quad u^* = \rho_0 \frac{g^*(x, y, t)}{f(x, y, t)} e^{-i(kx+ly-\omega t+\xi^{(0)})}, \quad Q = (\log f(x, y, t))_{xx} \quad (3)$$

を代入すると双線形形式

$$(iD_t + D_x^2 - \sigma_1 D_y^2 + 2ikD_x - 2i\sigma_1 l D_y) g \cdot f = 0, \quad (4)$$

$$(-iD_t + D_x^2 - \sigma_1 D_y^2 - 2ikD_x + 2i\sigma_1 l D_y) g^* \cdot f = 0, \quad (5)$$

$$(D_x^2 + \sigma_1 D_y^2 + \omega - k^2 + \sigma_1 l^2) f \cdot f + 2\sigma_2 \rho_0^2 |g|^2 = 0 \quad (6)$$

を得る [3, 36]. ここで  $f$  は実関数,  $g$  は複素関数,  $g^*$  は  $g$  の複素共役であり,  $k, l, \omega, \rho_0, \xi^{(0)}$  は実定数である. また  $D_x^m$  は広田の  $D$ -オペレーターと呼ばれ, 次式で定義される:

$$D_x^m D_t^n f \cdot g = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^n f(x, t) g(x', t') \Big|_{x'=x, t'=t}. \quad (7)$$

**1-soliton solution** [2]:

$$u = \rho_0 \frac{g}{f} e^{i(kx+ly-\omega t+\xi^{(0)})}, \quad Q = (\log f)_{xx},$$

$$f = e^{\theta_1} + a e^{\theta_2}, \quad g = e^{\theta_1 - i\psi_1} + a e^{\theta_2 - i\psi_2}, \quad a > 0,$$

$$\theta_j = -x \sin \psi_j + y \cos \psi_j - t \sin 2\psi_j, \quad \omega = k^2 - \sigma_1 l^2 - 2\sigma_2 \rho_0^2, \quad j = 1, 2,$$

$$-\pi < \psi_1 < \psi_2 \leq \pi.$$

このとき  $u$  の包絡  $|u|^2$  と  $Q$  を計算すると,

$$|u|^2 = \rho_0^2 - \rho_0^2 \sin^2 \frac{\psi_2 - \psi_1}{2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1 + \log a) \right], \quad (8)$$

$$Q = \frac{(\sin \psi_2 - \sin \psi_1)^2}{4} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1 + \log a) \right], \quad (9)$$

$$\theta_2 - \theta_1 = (-\sin \psi_1 + \sin \psi_2) \left[ x + \frac{\cos \psi_1 - \cos \psi_2}{-\sin \psi_1 + \sin \psi_2} y + \frac{-\sin 2\psi_1 + \sin 2\psi_2}{-\sin \psi_1 + \sin \psi_2} t \right] \quad (10)$$

となるから,  $|u|^2$  はダーク型の線ソリトンである. ここで  $|u|^2$  の最大の深さは  $\rho_0^2 - \rho_0^2 \sin^2 \frac{\psi_2 - \psi_1}{2}$ ,  $Q$  の振幅は  $\frac{(\sin \psi_2 - \sin \psi_1)^2}{4}$  で与えられる. また, 線ソリトンの傾きはいずれも  $\tan \Psi = \frac{\cos \psi_1 - \cos \psi_2}{-\sin \psi_1 + \sin \psi_2}$  で与えられ, 角度  $\Psi$  は  $y$  軸の正の部分から反時計回りを正の方向として測るものとする. 以降, 計算の簡略化のため  $\rho_0 = 1$ ,  $k = l = \xi^{(0)} = 0$  とする.

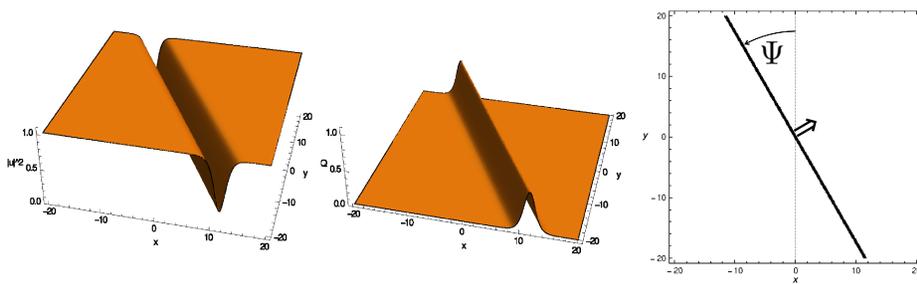


図 1: 1-ソリトン解.  $\rho_0 = 1$ ,  $k = l = \xi^{(0)} = 0$ ,  $a = 1$ ,  $t = 0$ ,  $(\psi_1, \psi_2) = (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$

### $N$ -soliton solution :

$N$ -soliton 解は以下の Wronskian で与えられる [36–38] :

$$u = \frac{\tau(\frac{1-N}{2}+1)}{\tau(\frac{1-N}{2})} e^{2it}, \quad Q = (\log \tau(\frac{1-N}{2}))_{xx}, \quad \tau^{(s)} = \begin{vmatrix} f_1^{(s)} & \cdots & f_N^{(s)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(s+N-1)} & \cdots & f_N^{(s+N-1)} \end{vmatrix},$$

$$f_i^{(s)}(x, y, t) = \sum_{j=1}^M a_{ij} E_j^{(s)}(x, y, t), \quad E_j^{(s)}(x, y, t) = e^{\theta_j - is\psi_j},$$

$$\theta_j = -x \sin \psi_j + y \cos \psi_j - t \sin 2\psi_j, \quad j = 1, 2, \\ -\pi < \psi_1 < \cdots < \psi_M \leq \pi.$$

このとき  $\tau^{(s)}$  は, (11) 式のように定数成分からなる  $N \times M$  行列  $A$  と指数関数項の成分からなる  $M \times N$  行列  $E^{(s)}$  の積の行列式に分解できる :

$$\tau^{(s)} = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\theta_1 - is\psi_1} & \cdots & e^{\theta_1 - i(s+N-1)\psi_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\theta_M - is\psi_M} & \cdots & e^{\theta_M - i(s+N-1)\psi_M} \end{pmatrix} \right| = |A E^{(s)}|. \quad (11)$$

以降, (11) 式における  $N \times M$  行列  $A$  を「 $A$  行列」,  $\psi_1, \dots, \psi_M$  を「パラメーター  $\psi$ 」と呼ぶことにする. 詳細は後述するが,  $u$  と  $Q$  を決定している  $\tau^{(s)}$  は  $A$  行列とパラメーター  $\psi$  によって特徴付けられていることが分かる.

また, Binet-Cauchy の公式

$$|A B| = \sum_{1 \leq m_1 < \dots < m_N \leq M} |A(m_1, \dots, m_N)| |B(m_1, \dots, m_N)|,$$

$A(m_1, \dots, m_N)$ :  $N \times M$  行列  $A$  の第  $m_1, \dots, m_N$  列を抜き出した小行列,  
 $B(m_1, \dots, m_N)$ :  $M \times N$  行列  $B$  の第  $m_1, \dots, m_N$  行を抜き出した小行列

を用いて (11) 式の右辺を展開すると,

$$\tau^{(s)} = \sum_{1 \leq m_1 < \dots < m_N \leq M} |A(m_1, \dots, m_N)| |E^{(s)}(m_1, \dots, m_N)| \quad (12)$$

となり, さらに  $|E^{(s)}(m_1, \dots, m_N)|$  は

$$|E^{(s)}(m_1, \dots, m_N)| = (-2i)^{\frac{N(N-1)}{2}} \left( \prod_{j=1}^N e^{-i\psi_{m_j}} \right)^{s + \frac{N-1}{2}} \left( \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} \sin \frac{\psi_{m_\beta} - \psi_{m_\alpha}}{2} \right) \prod_{j=1}^N E_{m_j} \quad (13)$$

と展開できる. ここで  $-\pi < \psi_1 < \dots < \psi_M \leq \pi$  より  $\sin \frac{\psi_{m_\beta} - \psi_{m_\alpha}}{2} > 0$  である. 例として  $N = 2, M = 4$  の場合を考えると  $u = \frac{\tau^{(\frac{1}{2})}}{\tau^{(-\frac{1}{2})}} e^{2it}$  であり, このとき  $\tau^{(s)}$  は以下のように表される:

$$\begin{aligned} \tau^{(s)} &= \sum_{1 \leq m_1 < m_2 \leq 4} |A(m_1, m_2)| |E^{(s)}(m_1, m_2)| \\ &= |A(1, 2)| |E^{(s)}(1, 2)| + |A(1, 3)| |E^{(s)}(1, 3)| + |A(1, 4)| |E^{(s)}(1, 4)| \\ &\quad + |A(2, 3)| |E^{(s)}(2, 3)| + |A(2, 4)| |E^{(s)}(2, 4)| + |A(3, 4)| |E^{(s)}(3, 4)| \\ &= (-2i) \left[ |A(1, 2)| \sin \frac{\psi_2 - \psi_1}{2} e^{\theta_1 + \theta_2 - i(s + \frac{1}{2})(\psi_1 + \psi_2)} + |A(1, 3)| \sin \frac{\psi_3 - \psi_1}{2} e^{\theta_1 + \theta_3 - i(s + \frac{1}{2})(\psi_1 + \psi_3)} \right. \\ &\quad + |A(1, 4)| \sin \frac{\psi_4 - \psi_1}{2} e^{\theta_1 + \theta_4 - i(s + \frac{1}{2})(\psi_1 + \psi_4)} + |A(2, 3)| \sin \frac{\psi_3 - \psi_2}{2} e^{\theta_2 + \theta_3 - i(s + \frac{1}{2})(\psi_2 + \psi_3)} \\ &\quad \left. + |A(2, 4)| \sin \frac{\psi_4 - \psi_2}{2} e^{\theta_2 + \theta_4 - i(s + \frac{1}{2})(\psi_2 + \psi_4)} + |A(3, 4)| \sin \frac{\psi_4 - \psi_3}{2} e^{\theta_3 + \theta_4 - i(s + \frac{1}{2})(\psi_3 + \psi_4)} \right]. \end{aligned}$$

### 3 A 行列

$\tau^{(s)}$  において  $A$  行列がどのような役割を持つか説明する. まず  $A$  行列のサイズ  $N \times M$  とグラスマン多様体  $\text{Gr}(N, M)$  の次元  $N, M$  の対応について簡単に述べる.

**定義 1** (グラスマン多様体). あるベクトル空間  $V$  が与えられたとき,  $V$  の  $N$  次元線型部分ベクトル空間全体の集合をグラスマン多様体  $\text{Gr}(N, V)$  という. 特に  $V = \mathbb{R}^M$  または  $\mathbb{C}^M$  ( $M$  は  $N$  より大きい正の整数) のとき  $\text{Gr}(N, V)$  を  $\text{Gr}(N, M)$  と書く.

例えば  $V = \mathbb{R}^M$  の場合を考えると, 定義より  $\text{Gr}(N, M)$  上の点  $\xi$  は

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix}, \quad \xi_i = \sum_{j=1}^M a_{ij} e_j \in \mathbb{R}^M, \quad e_j: \text{基底ベクトル (横ベクトル)} \quad (14)$$

と表される. したがってサイズが  $N \times M$  の  $A$  行列は  $\text{Gr}(N, M)$  上の点になっていることが分かる. 以降, 用語の簡単のため「 $\text{Gr}(N, M)$  のソリトン」といった場合, 「その  $A$  行列のサイズが  $N \times M$  である」という意味で用いることとする.

次に、 $A$  行列に行基本変形を行うことを考える。行基本変形を行うことは左から  $N \times N$  の正則行列  $C$  をかけることと等価であり、このとき  $\tau^{(s)}$  は  $\det C$  倍されるが  $u$  や  $Q$  ではそれが分母分子で約分される。つまり  $A$  行列に行基本変形を行ってもソリトン解は不変である。このことから、 $A$  行列を RREF(Reduced Row Echelon Form) まで行基本変形することで  $A$  行列の分類が可能である。例として  $N = 2, M = 4$  の場合を考える。このとき「 $A$  行列の全ての小行列式が 0 または正である」という条件 TNN(Totally Non-Negative) を満たすような  $A$  行列は以下の 7 種類存在することが知られている [24] :

$\tau$ 関数の指数関数項	$A$ 行列 ( $a, b, c, d$ は正定数)	
6 項	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -c & -d \\ 0 & 1 & a & b \end{pmatrix}, ad - bc > 0$	
5 項	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 1 & a & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -c & -d \\ 0 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -c & -d \\ 0 & 1 & a & b \end{pmatrix}, ad - bc = 0$
4 項	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$

ここで TNN を考える理由は、 $A$  行列が TNN を満たさないと  $\tau^{(s)}$  がゼロ点を持ち、その点においてソリトン解が発散するため (非物理的な解となってしまうため) である。またこれらの  $A$  行列に対応するソリトンのグラフはそれぞれ図 2, 3, 4 のようになる。パラメーターはいずれも  $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = (-\frac{7}{12}\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ ,  $t = 5$  である。図 2 では相互作用部分が凹むような相互作用が見られる (P-type)。続いて図 3 では相互作用部分が盛り上がるような相互作用が見られ (O-type), 図 4 では相互作用部分に穴が空くような相互作用が見られる (T-type)。このように、 $A$  行列はソリトン相互作用のパターンを決定している。

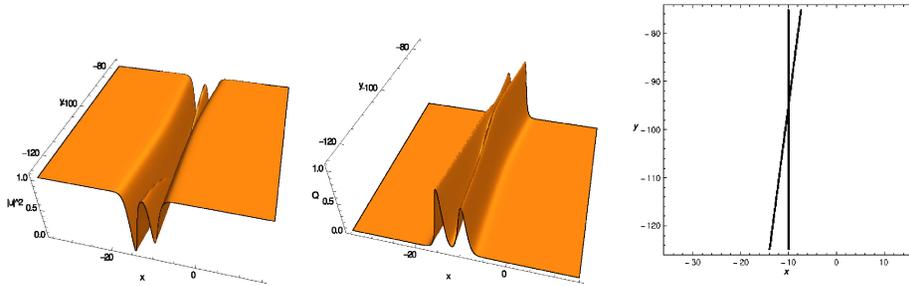


図 2:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  (P-type)

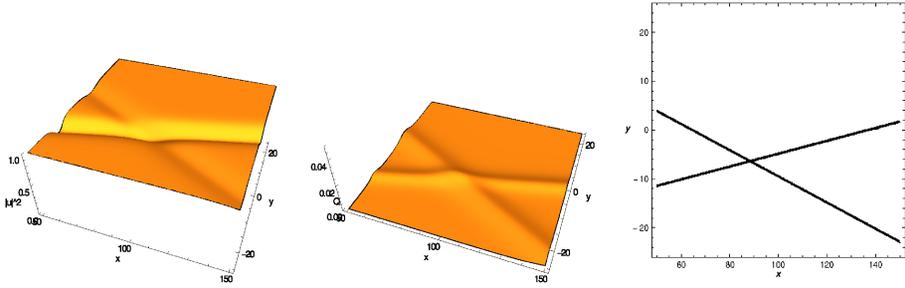


図 3:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  (O-type)

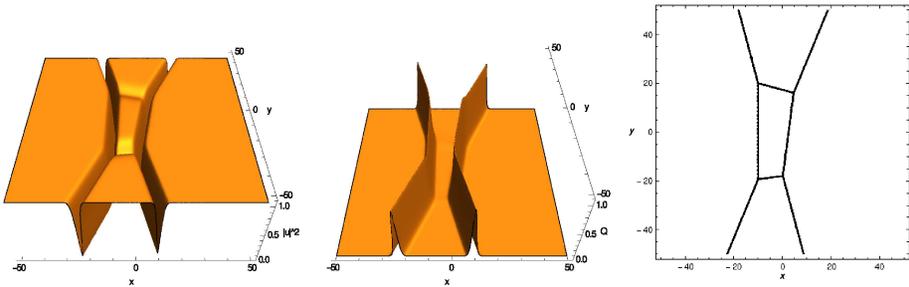


図 4:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  (T-type)

### 4 パラメーター $\psi$ と三角形分割

$\tau^{(s)}$  においてパラメーター  $\psi$  がどのような役割を持つか説明する. (8), (9) 式よりパラメーター  $\psi$  はソリトンの角度や振幅を決定している. また  $[i, j]$ -ソリトンの峰は  $\theta_i = \theta_j$  なる場所に現れるため,  $x$ - $y$  平面でソリトンの峰を表す直線は

$$(-\sin \psi_i + \sin \psi_j)x + (\cos \psi_i - \cos \psi_j)y + (-\sin 2\psi_i + \sin 2\psi_j)t = 0 \tag{15}$$

であり, 法線ベクトルとして  $(-\sin \psi_i + \sin \psi_j, \cos \psi_i - \cos \psi_j)$  を持つ. したがって  $[i, j]$ -ソリトンは単位円上の点  $(-\sin \psi_i, \cos \psi_i)$ ,  $(-\sin \psi_j, \cos \psi_j)$  を結ぶ線分に直交する. 例えば Gr(1,3), Gr(1,4) のソリトンは図 5, 6, 7 のようになる.

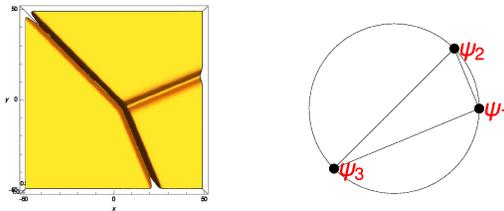


図 5: Gr(1,3) のソリトン.  $(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$ ,  $t = 5$

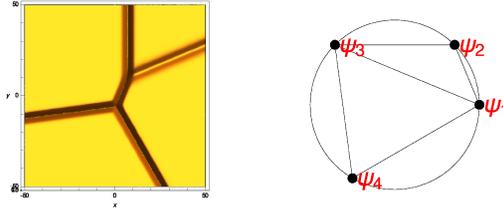


図 6: Gr(1, 4) のソリトン.  $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{6}\pi)$ ,  $t = -5$

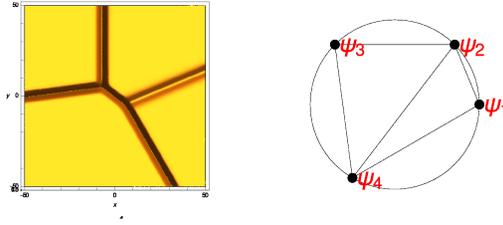


図 7: Gr(1, 4) のソリトン.  $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{6}\pi)$ ,  $t = 5$

このように「どのソリトンが現れるか」と「単位円上の多角形をどのように三角形分割するか」は一対一に対応している。ここでいう「一対一対応する」とは、三角形分割された図形の各辺に直交するソリトンが一つずつ存在し、かつ各ソリトンに対し直交する辺が三角形分割された図形に一つずつ存在するという意味である。これを一般化すると、以下ようになる：

Gr(N, M) のソリトン解に対応する A 行列とパラメーター  $\psi$  に対して、3次元の点の集合

$$\left\{ \Psi_{j_1 \dots j_N} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \mathbf{v}_{j_m}(t) \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_N \leq M \text{ かつ } |A(j_1, \dots, j_N)| \neq 0 \right\} \quad (16)$$

を考える。ただし  $\mathbf{v}_{j_m}(t) = (-\sin \psi_{j_m}, \cos \psi_{j_m}, -t \sin 2\psi_{j_m})$  とする。例えば Gr(1, 4) のソリトンで

$$A = (1, 1, 1, 1), (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{6}\pi\right), t = 5 \quad (17)$$

の場合を考えると  $|A(1)|, |A(2)|, |A(3)|, |A(4)| > 0$  であることから (16) 式の集合は

$$\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4\} \quad (18)$$

となる。この集合の凸包をとると上面は図 8 のようになり、それを  $z \rightarrow \infty$  から見ると図 9 のような三角形分割された図形が得られ、この図形とソリトンのグラフが一対一対応する。

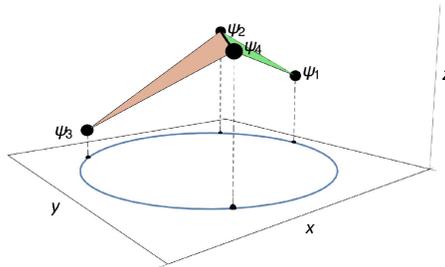


図 8: 凸包の上面

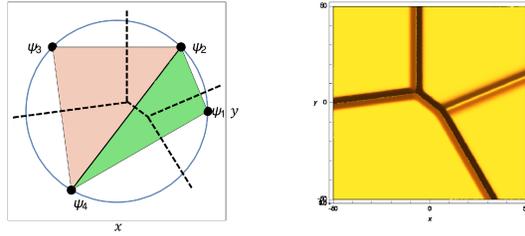


図 9: 凸包の 2 次元射影とソリトンのグラフ ( $|u|^2$ )

## 5 DS2 ソリトンのグラフから $\tau$ 関数を決定する方法

第 1 章で述べたように、KP2 ソリトンではソリトンのグラフから  $\tau$  関数を決定することができた。しかし DS2 ソリトンでは図 10, 11 のように異なる  $\tau$  関数から同じソリトンのグラフが構成できてしまう。

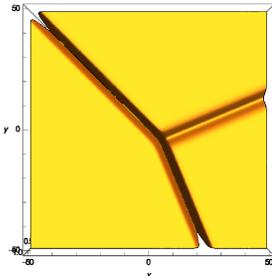


図 10: Gr(1,3) のソリトンのグラフ。

$$(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right), t = 5$$

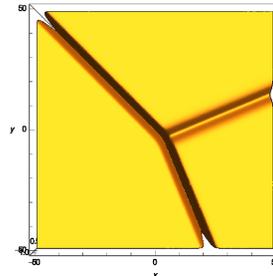


図 11: Gr(2,3) のソリトンのグラフ。

$$(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right), t = -5$$

これはパラメーター  $\psi$  を変えることによりソリトンが回転するためである。このような理由から、今まで DS2 ソリトンのグラフから  $\tau$  関数を決定することは困難だった。この問題を解決するため、まずは Gr(1,3) のソリトンと Gr(2,3) のソリトンのグラフの判別を「ソリトンの進行方向」に着目して行う。

### 5.1 Gr(1,3) と Gr(2,3) のソリトンの進行方向

まず Gr(1,3) の Y 字型ソリトンの進行方向を調べる。状況設定として  $t > 0$  でソリトン 1, 2, 3 がそれぞれ角度  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  の位置に存在する場合を考える。角度はいずれも  $y$  軸正の部分から反時計回りを正の方向として測り、 $-\pi < \phi_1 < \phi_2 < \phi_3 \leq \pi$  とする。このときソリトンのグラフに対応するパラメーター  $(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  が一意に定まり、これらのパラメーターは  $-\pi < \psi_1 < \psi_2 < \psi_3 \leq \pi$  を満たす。

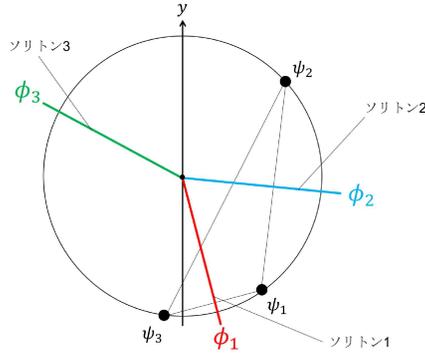


図 12: ある Y 字型ソリトンに対応するパラメーター  $\psi$

図 12 の各ソリトンは (15) 式で表されるため、その進行方向は速度

$$-\frac{-\sin 2\psi_i + \sin 2\psi_j}{-\sin \psi_i + \sin \psi_j}, \quad (i, j = 1, 2, 3 \text{ かつ } i \neq j) \tag{19}$$

の正負によって決定される。1 本のソリトンの進行方向について、各ソリトンの角度を変えながらその符合を調べると図 13 のようになる。この図は着目しているソリトンがどの領域に存在するかで +- (左右) のどちらに進むかを表し、他の 2 本のソリトンのなす角が鋭角か鈍角かによって符合が反転する。

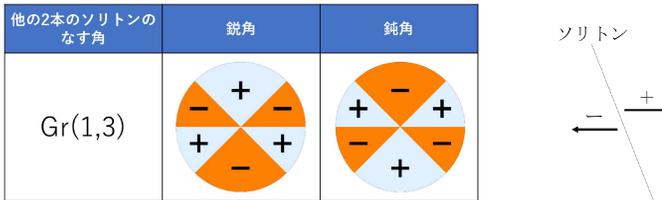


図 13: Gr(1,3) のソリトンの進行方向

これより、Gr(1,3) のソリトンの進行方向は「着目しているソリトンの存在する領域」と「残り 2 本のソリトンのなす角」によって一意に定まることが分かる。同様に Gr(2,3) の Y 字型ソリトンについても進行方向を調べると図 14 のような結果が得られる。



図 14: Gr(2,3) のソリトンの進行方向

図 13, 14 を比較すると、Gr(2,3) のソリトンは Gr(1,3) のソリトンに対して逆方向に進むことが分かる。以上の結果から、ソリトンの進行方向を調べることでグラフから Gr(1,3) と Gr(2,3) のソリトンの判別が可能で

ある。

## 5.2 DS2 ソリトンの chord 図の構成

ソリトンの進行方向を調べることで  $\text{Gr}(1,3)$  と  $\text{Gr}(2,3)$  の判別が可能のため、それぞれのソリトンに対応する chord 図を図 15 に示す手順で構成できる：

1. Y 字型ソリトンの進行方向を調べ、ソリトンが  $\text{Gr}(1,3)$  か  $\text{Gr}(2,3)$  かを判別する。
2.  $\text{Gr}(1,3)$  のソリトンの場合、各ソリトンに直交する辺を持つ三角形を単位円上にプロットする。
3.  $\text{Gr}(2,3)$  のソリトンの場合、各ソリトンに直交する辺を持つ三角形を 180 度回転させた状態で単位円上にプロットする。
4. 頂点の存在する角度を  $-\pi < \psi_1 < \psi_2 < \psi_3 \leq \pi$  となるように定める。
5. 三角形の頂点を  $\text{Gr}(1,3)$  なら時計回りに、 $\text{Gr}(2,3)$  なら反時計回りに辿るよう各辺に矢印をつける。

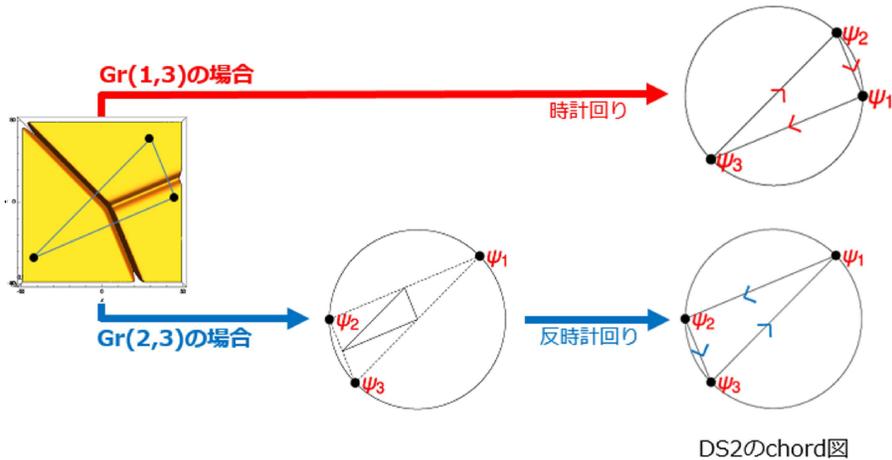


図 15: DS2 方程式のソリトン解に対応する chord 図

この chord 図において、頂点の添字を矢印に沿って辿ることにより置換  $\pi$  が構成でき、そこからソリトン解の  $A$  行列が得られる。図 15 の  $\text{Gr}(1,3)$  の chord 図に対応する置換は  $\pi = (3, 1, 2)$ 、 $\text{Gr}(2,3)$  の chord 図に対応する置換は  $\pi = (2, 3, 1)$  であり、これに対応する  $A$  行列はそれぞれ

$$A = (1, a, b), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad (a, b > 0) \quad (20)$$

となる [24, 34]。さらに各頂点に対応する角度が  $\tau$  関数のパラメーター  $\psi$  の値になっている。図 15 の  $\text{Gr}(1,3)$  の場合では  $(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$ 、 $\text{Gr}(2,3)$  の場合では  $(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi)$  である。 $\tau$  関数は  $A$  行列とパラメーター  $\psi$  によって決定されるため、 $\text{Gr}(1,3)$  と  $\text{Gr}(2,3)$  のソリトンのグラフから対応する  $\tau$  関数を決定できる。

## 5.3 DS2 ソリトンのグラフから $\tau$ 関数の決定

上記の議論により構成した  $\text{Gr}(1,3)$  と  $\text{Gr}(2,3)$  のソリトンの chord 図を組み合わせることにより、DS2 ソリトンの任意のグラフから  $\tau$  関数を決定できる。例として次のようなソリトンのグラフが与えられている状況

を考える。

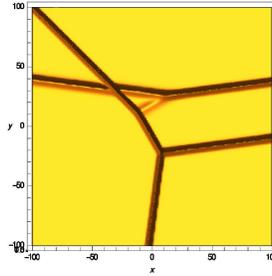


図 16: 与えられたソリトンのグラフ

このグラフに対して次の手順でソリトンの chord 図を構成する：

1. 各ソリトン，および Y 字型ソリトンの交点にラベルをつける。
2. 各 Y 字型ソリトンの進行方向を調べ，各 Y 字型ソリトンに対して局所的な chord 図を構成する。  
(→今回 Y 文字型ソリトン A, C が Gr(1,3) のソリトンで，B が Gr(2,3) のソリトンだったとする。)
3. 各 chord 図を同一の単位円上にプロットする。
4. 漸近ソリトンでないソリトンに対応する辺を消去する。

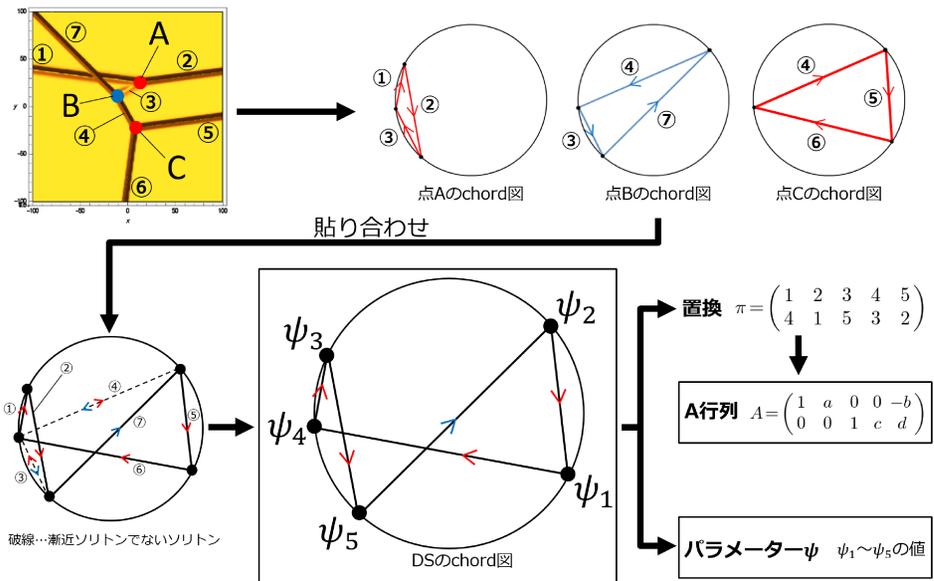


図 17: DS2 ソリトンのグラフから A 行列とパラメーター  $\psi$  を決定するフローチャート

以上の手順から，図 17 のようにソリトン解に対応する置換  $\pi$  (つまり A 行列) とパラメーター  $\psi$  が定まり， $\tau$  関数を決定することができる。また A 行列のサイズから Gr(2,5) のソリトンであることも分かる。

## 6 まとめ

DS2 方程式のダーク型線ソリトンについて, DS2 ソリトンの進行方向に着目することでソリトンのグラフと chord 図の対応を明らかにした. その結果, ソリトンのグラフから chord 図を介して  $\tau$  関数を決定できることが分かった.

## 参考文献

- [1] A. Davey, K. Stewartson, "On three-dimensional packets of surface waves", *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **338** (1974) 101–110.
- [2] D. Anker, N. C. Freeman, "On the soliton solutions of the Davey-Stewartson equation for long waves", *Proc. R. Soc. Lond. A*, **360** (1978) 529–540.
- [3] J. Satsuma, M. J. Ablowitz, "Two-dimensional lumps in nonlinear dispersive systems", *J. Math. Phys.*, **20** (1979) 1496–1503.
- [4] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, "Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering", (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991).
- [5] M. Tajiri, T. Arai, "Growing-and-decaying mode solution to the Davey-Stewartson equation", *Phys. Rev. E*, **60** (1999) 2297.
- [6] Y. Ohta, J. Yang, "Rogue waves in the Davey-Stewartson I equation", *Phys. Rev. E*, **86** (2012) 036604.
- [7] Y. Ohta, J. Yang, "Dynamics of rogue waves in the Davey-Stewartson II equation", *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46** (2013) 105202. APA
- [8] D. J. Benney, G. J. Roskes, "Wave instabilities", *Stud. Appl. Math.*, **48** (1969) 377–385.
- [9] V. D. Djordjevic, L. G. Redekopp, "On two-dimensional packets of capillary-gravity waves", *J. Fluid Mech.*, **79** (1977) 703–714.
- [10] M. J. Ablowitz, H. Segur, "On the evolution of packets of water waves", *J. Fluid Mech.*, **92** (1979) 691–715.
- [11] K. Nishinari, K. Abe, and J. Satsuma, "A New-Type of Soliton Behavior in a Two Dimensional Plasma System", *J. Phys. Soc. Jpn.*, **62** (1993) 2021–2029.
- [12] J. W. Miles, "Obliquely interacting solitary waves", *J. Fluid Mech.*, **79** (1977) 157–169.
- [13] J. W. Miles, "Resonantly interacting solitary waves", *J. Fluid Mech.*, **79** (1977) 171–179.
- [14] M. Funakoshi, "Reflection of obliquely incident solitary waves", *J. Phys. Soc.*, **49** (1980) 2371–2379.
- [15] F. Kako, N. Yajima, "Interaction of ion-acoustic solitons in two-dimensional space", *J. Phys. Soc. Jpn.*, **49** (1980) 2063–2071.
- [16] F. Kako, N. Yajima, "Interaction of ion-acoustic solitons in multi-dimensional space. II", *J. Phys. Soc. Jpn.*, **51** (1982) 311–322.
- [17] M. Tanaka, "Mach reflection of a large-amplitude solitary wave", *J. Fluid Mech.*, **248** (1993) 637–661.
- [18] M. Oikawa, H. Tsuji, "Oblique interactions of weakly nonlinear long waves in dispersive systems", *Fluid Dyn. Res.*, **38** (2006) 868–898.
- [19] W. Li, H. Yeh, and Y. Kodama, "On the Mach reflection of a solitary wave: revisited", *J. Fluid Mech.*, **672** (2011) 326–357.

- [20] Y. Kodama, H. Yeh, “The KP theory and Mach reflection”, *J. Fluid Mech.*, **800** (2016) 766–786.
- [21] G. Biondini, Y. Kodama, “On a family of solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation which also satisfy the Toda lattice hierarchy”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36** (2003) 10519.
- [22] Y. Kodama, “Young diagrams and N-soliton solutions of the KP equation”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37** (2004) 11169–11190.
- [23] G. Biondini, S. Chakravarty, “Soliton solutions of the Kadomtsev-Petviashvili II equation”, *J. Math. Phys.*, **47** (2006) 033514.
- [24] S. Chakravarty, Y. Kodama, “Classification of the line-soliton solutions of KP II”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41** (2008) 275209.
- [25] S. Chakravarty, Y. Kodama, “Soliton solutions of the KP equation and application to shallow water waves”, *Stud. Appl. Math.*, **123** (2009) 83–151.
- [26] Y. Kodama, M. Oikawa, and H. Tsuji, “Soliton solutions of the KP equation with V-shape initial waves”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42** (2009) 312001.
- [27] 及川正行, 辻英一, 児玉裕治, “ソリトン相互作用—実験、理論、数値計算の比較”, 京都大学数理解析研究所講究録, **1645** (2009) 38–50.
- [28] 及川正行, 辻英一, 児玉裕治, 丸野健一, “KP II 方程式のソリトン解とその応用”, 京都大学数理解析研究所講究録, **1700** (2010) 65–84.
- [29] Y. Kodama, “KP solitons in shallow water”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43** (2010) 434004.
- [30] C-Y. Kao, Y. Kodama, “Numerical study of the KP equation for non-periodic waves”, *Math. Comp. Sim.*, **82** (2012) 1185–1218.
- [31] 丸野健一, 児玉裕治, 辻英一, B-F. Feng, “水深の浅い領域における 2 次元ソリトン相互作用: Benney-Luke 方程式と KP 方程式”, 九州大学応用力学研究所研究集会報告, No.23AO-S7 (2012) 19-34.
- [32] S. Chakravarty, Y. Kodama, “Construction of KP solitons from wave patterns”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47** (2013) 025201.
- [33] 及川正行, “KP 方程式のソリトン解”, *ながれ: 日本流体力学会誌*, **32** (2013) 251–265.
- [34] Y. Kodama, “KP Solitons and the Grassmannians: combinatorics and geometry of two-dimensional wave patterns”, (Springer, Singapore, 2017).
- [35] 永原新, 丸野健一, “Davey-Stewartson II 方程式の dark 型線ソリトン相互作用”, 数理解析研究所講究録, **1989** (2009) 94–103.
- [36] N. C. Freeman, “Soliton solutions of non-linear evolution equations”, *IMA J. Appl. Math.*, **32** (1984) 125-145.
- [37] R. Hirota, Y. Ohta, and J. Satsuma, “Wronskian structures of solutions for soliton equations”, *Prog. Theor. Phys. Supp.*, **94** (1988) 59-72.
- [38] 太田泰広, “ソリトン方程式のロンスキアン解”, 京都大学数理解析研究所講究録, **684** (1989) 1–17.