

複数同時侵入のあるネットワーク阻止ゲーム

防衛大学校 宝崎 隆祐

Ryusuke Hohzaki

Department of Computer Science,
National Defense Academy

1 はじめに

ネットワーク上において侵入者と守備側が対峙するモデルはネットワーク阻止モデルと呼ばれ、多くの社会的な問題解決に利用されている [1]. オペレーションズ・リサーチを普及させたモース、キンボールの有名な著書 *Methods of Operations Research*[2] の中には、格子と見なした海峡における潜水艦と対潜航空機との間の通峡阻止問題がゲーム理論によりすでに議論されていて、これがネットワーク阻止モデル、あるいはネットワーク阻止ゲームの原型と見られる. その後、グラフ・ネットワーク理論の拡張問題として、ノード、アークの除去やフローの増減を扱った Wollmer[3] の研究をはじめ、密輸ルートへの撲滅を扱った Thomas and Nisgav[4] の研究、Assimakopoulos[5] による感染症の拡大阻止問題、Kodialam and Lakshman[6] による通信ネットワークの防護、Salmeronら [7] による電力網やその他のインフラネットの防衛問題、Churchら [8] による一般的な施設防護問題、Bellら [9] や Perea and Puerto[10] による道路網や鉄道網といった公共輸送網の防護・設計問題など、様々な問題が取り扱われている.

侵入者と守備側の衝突による損耗に焦点をあてたネットワーク阻止ゲームを損耗ゲームと呼んで議論したのが Hohzaki and Chiba [11] である. その後、プレイの途中で侵入者と守備側で非対称な情報収集のある2段階のゲームが Hohzaki and Sunaga [12] によって議論された. これらの研究では、プレイヤーが拠出した資源量に比例した損耗が生じた単純な損耗モデルが仮定されていたが、資源量の2乗に比例する損耗を考え勢力集中効果のある損耗モデルを組み込んだ損耗ゲームが Hohzaki and Higashio[13] によって議論された. さらに、侵入者・守備側の取得情報の内容や自らの情報が相手に暴露されたという認識の有無等を網羅的に議論した研究が Hohzaki and Tanaka[14] によってなされた.

ただし、これらの研究ではネットワークへの侵入は1カ所から行われるとされており、様々なネットワークでの悪意のある侵入者の侵入行為を考え、複数地点からの侵入可能性へとモデルを拡張することは現実適用性の改善にとって必要である. この報告書では、複数地点からの侵入のある損耗ゲームを議論し、様々なネットワーク防護のための合理的戦略を考察する.

2 複数出発ノードと複数目的ノードをもつ交戦ゲーム

ここでは、複数出発ノード、複数目的ノードをもち、最終ノードに到達した侵入者の総残存量を競う2人ゼロ和ゲームを論じる. モデルの前提は次のとおりである.

- A1. ノード集合 N と有向アーク集合 A からなる閉路を持たないネットワーク $G(N, A)$ を空間とする.
- A2. 侵入者及び守備側の2人のプレイヤーが存在する. 侵入者は複数ノード群 $S \subseteq N$ の各出発ノード $s \in S$ から初期量 R_s で侵入を開始し、目的ノード群 T のいずれかへ到達しようとするが、分かれて移動することも許す. 一方、守備側は初期量 B_0 を分割してアークに配置し、侵入者に損耗を強いることで侵入者の通過を阻止しようとする.

- A3. 損耗はアーク上で侵入者、守備側が出会った際に発生する。アーク $e \in \mathbf{A}$ に流入した侵入量 x と守備量 y との衝突の結果として、侵入勢力の残存量は次式 $f_e(x, y)$ で与えられる。

$$f_e(x, y) = \max\{0, x - \gamma_e y\} \quad (1)$$

式 (1) の係数 γ_e は、アーク e における侵入者に対する防衛側の強さを表すパラメータであり、これを**戦力交換比**と呼ぶ。

- A4. 両プレイヤーの興味は、目的ノードに到達する侵入者の最終残存量であり、侵入者をそれを最大にしようとし、守備側はできるだけ小さくすることを目的とする。

前提 A3 の (1) 式は、交戦モデルとして有名なランチェスターの 1 次則モデル [15] と呼ばれる。

3 共通アークでの損耗と戦略の定義

ここでは、侵入者が分かれて複数のアークを通過した場合の残存量に関する知見を述べる。

予備定理 2 (Hozaki and Chiba [11]) ある出発ノードから目的ノードまでのパスを構成するアークを $\{e_1, e_2, \dots\}$ とする。このパス上を時間差を置いて侵入量 x_1, \dots, x_n が通過する場合、アーク e_l を k 番目の侵入が通過し終わった直後に観測できる残存総量 z_k^l は、次式で与えられる。

$$z_k^l = \max \left\{ 0, \sum_{i=1}^k x_i - \sum_{j=1}^l \gamma_{e_j} y_{e_j} \right\} \quad (2)$$

予備定理 2 は、侵入者の移動途中での全滅や守備量の全滅などを特に意識することなく、全体の侵入量と全体の損耗予想量から最終的な残存量の計算が可能であることを示している。

以上の知見を基に、侵入者、守備側両プレイヤーの戦略を定義し、支払関数の表現式を導こう。まず、守備側の配備計画を $\mathbf{y} = \{y_e, e \in \mathbf{A}\}$ で表す。 y_e はアーク e に配備する守備量である。侵入者戦略を表すためには、次の予備定理が役立つ。

予備定理 3 (Hozaki and Chiba [11]) あるノードから侵入する侵入者が複数のパス群へ分かれて移動する分派戦略は、1つのパスでの全体移動戦略の混合戦略に弱く支配される。

予備定理 3 から、侵入者の純粋戦略は、各々の出発ノード s から T のいずれかのノードまでの 1 本のパスを選択して全体移動することである。同時に、この定理は、出発ノードの異なる侵入者がどこかで会合した場合には、それ以降同じ移動経路をとるべきであるとの知見ももたらす。いま、出発ノード s から T のいずれかの目的ノードまで到達するパス集合を Ω_s で表すと、侵入者の純粋戦略は直積 $\Omega = \prod_{s \in S} \Omega_s$ の 1 つの要素 $l = (l_1, l_2, \dots) \in \Omega$ を選択することである。 $l_s \in \Omega_s$ は出発ノード s からの 1 本の移動パスである。ここで上述の知見に基づき、この直積 Ω を、その要素の中で一度同じノードで会合したパスは以後も同じ経路をとるパスの組だけを集めた集合と見なす。このようなパス群を、**会合帯同条件**を満たすパス群と呼称しよう。したがって、共通のノードをもつパス群は図 1 のように複数の出発ノードを葉とするツリーの形状をもち、そのような幾つかの排反なパス群で純粋戦略 l が構成される。

1 つのパス組 $l \in \Omega$ が与えられたとして、 l のノード及びアークから成るグラフを G_l とし、そのいずれかのパスが到達する目的ノードの集合を T_l で表そう。 2 つの到達ノード $t, t' \in T_l$ が異なれば、それぞれを根とするグラフは非連結である。 G_l はすべての出発ノード S を含むが、必ずしもすべての目的ノード T を含むとは限らない。ある到達ノード $t \in T_l$ に到る l から成る連結グ

ラフは、 t を根とするツリー構造をもつ。根 t と葉以外のノードとして、2つ以上のパスが会合する度数3以上のノードとパスの経由地点のような度数2のノードをもつ。前者を会合ノードと呼び、後者を経由ノードと呼ぶ。葉は必ず出発ノードであるが、出発ノードは会合ノードにも経由ノードにもなり得る。図1のグラフは、根 t 、葉 s_1, s_2, s_3 、会合ノード a, b 及び経由ノードとなっている出発ノード s_4 をもっており、出発ノードでない経由ノードは省略して描かれている。このように、 G_l から出発ノードでない経由ノードを削除したグラフを \widehat{G}_l と書き、 \widehat{G}_l におけるノードを \widehat{N}_l とする。ある $t \in T_l$ に到るツリーを、 t を一番右に描き、会合ノードに集まるパスをその左側に描く。すなわち、出発ノードから目的ノード t までの向きのある移動パスを常に右向きに描くものとする。任意のノード $k \in \widehat{N}_l$ の右に描かれ次の隣接ノード $k' \in \widehat{N}_l$ に至る区間はパスの会合はなく、元のグラフ G_l において幾つかのアーキを侵入者が移動するパスの一部であり、この区間の G_l のアーキ集合を M_k^l とし、ノード k の左に隣接した \widehat{N}_l のノード集合を \widehat{L}_k^l とする。 k が葉であれば $\widehat{L}_k^l = \emptyset$ であり、根であれば $M_k^l = \emptyset$ である。

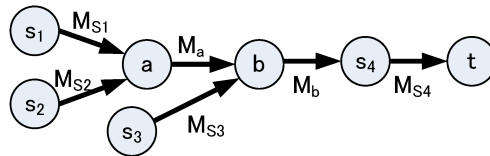


図1：会合帯同条件を満たすパスのツリー構造

ここで、1つのパス組 $l \in \Omega$ から作られ、目的ノード $t \in T_l$ に至るグラフにおいて、守備側の配備 \mathbf{y} があった場合の最終的な侵入者の総残存量がどう表されるか考えよう。葉となるノード s は出発ノードであり、この s を出発する侵入者数は R_s である。ここで任意のノード $t \neq k \in \widehat{N}_l$ 及びその上のアーキ集合 M_k^l を移動後の侵入者の残存量を μ_k^l で表し、この表現式を求めよう。

まず予備定理2から、出発ノード $s \in S$ に関する残存量 μ_s^l は

$$\mu_s^l = \max\{0, R_s + \sum_{k \in \widehat{L}_s^l} \mu_k^l - \sum_{e \in M_s^l} \gamma_e y_e\} \quad (3)$$

で求められ、出発ノードでない任意の会合ノード $d \in \widehat{N}_l$ から M_d^l 通過直後の残存量は

$$\mu_d^l = \max\{0, \sum_{k \in \widehat{L}_d^l} \mu_k^l - \sum_{e \in M_d^l} \gamma_e y_e\} \quad (4)$$

で表される。最終的に到着ノード t まで生き残る残存総量は次式となる。

$$v_t^l = \sum_{k \in \widehat{L}_t^l} \mu_k^l \quad (5)$$

個々の $t \in T_l$ の残存量の和が、パス組 l を用いた移動の結果得られる侵入者の総残存量であり、次式で書ける。

$$R(l, \mathbf{y}) = \sum_{t \in T_l} v_t^l \quad (6)$$

ここで、侵入者の混合戦略を、移動パス戦略 l を確率 $\pi(l)$ でとる混合戦略 $\pi \equiv \{\pi(l), l \in \Omega\}$ で表すと、 π と配備計画 \mathbf{y} による侵入者の期待残存量は次式で与えられる。

$$R(\pi, \mathbf{y}) = \sum_{l \in \Omega} \pi(l) R(l, \mathbf{y}) \quad (7)$$

ここで、侵入者の混合戦略 π と守備側の守備計画 \mathbf{y} の実行可能領域 Π, Ψ を確認しておこう。

$$\Pi = \left\{ \left\{ \pi(\mathbf{l}), \mathbf{l} \in \Omega \right\} \mid \sum_{\mathbf{l} \in \Omega} \pi(\mathbf{l}) = 1, \pi(\mathbf{l}) \geq 0, \mathbf{l} \in \Omega \right\} \quad (8)$$

$$\Psi = \left\{ \{y_e, e \in \mathbf{A}\} \mid \sum_{e \in \mathbf{A}} y_e \leq B_0, y_e \geq 0, e \in \mathbf{A} \right\} \quad (9)$$

4 同時手番ゲームの均衡解の導出

ここでは、期待支払 (7) 式をもつ one-shot ゲームを解きその均衡解を求める。まず、期待支払 $R(\pi, \mathbf{y})$ に対するミニマックス最適化問題を解く。まず、 π の実行可能性条件 (8) から、

$$\min_{\mathbf{y} \in \Psi} \max_{\pi \in \Pi} R(\pi, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y} \in \Psi} \max_{\mathbf{l} \in \Omega} R(\mathbf{l}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y} \in \Psi} \{ \xi \mid \xi \geq R(\mathbf{l}, \mathbf{y}), \mathbf{l} \in \Omega \} \quad (10)$$

と変形できるが、 $R(\mathbf{l}, \mathbf{y})$ の式に (3)~(6) による式展開を用いることができる。ただし、式 (3) 及び (4) を次のような 2 組の不等式で置き換える。

$$\mu_s^l \geq R_s + \sum_{k \in \widehat{\mathbf{L}}_s^l} \mu_k^l - \sum_{e \in M_s^l} \gamma_e y_e, \quad \mu_s^l \geq 0 \quad (s \in \mathbf{S}) \quad (11)$$

$$\mu_d^l \geq \sum_{k \in \widehat{\mathbf{L}}_d^l} \mu_k^l - \sum_{e \in M_d^l} \gamma_e y_e, \quad \mu_d^l \geq 0 \quad (d \in \widehat{\mathbf{N}}_l, d \notin \mathbf{S}, d \notin \mathbf{T}_l) \quad (12)$$

また、等式 (5) 及び (6) をそのまま用いて、(10) 式の制約条件が次のように書ける。

$$v_t^l = \sum_{k \in \widehat{\mathbf{L}}_t^l} \mu_k^l \quad (t \in \mathbf{T}_l), \quad (13)$$

$$\xi \geq \sum_{t \in \mathbf{T}_l} v_t^l \quad (14)$$

以上のような制約条件式をすべての $\mathbf{l} \in \Omega$ に関し作成し、(9) 式にある \mathbf{y} の実行可能性条件を追加して、(10) 式による最小化問題 $\min \xi$ を定式化することにより、守備側の最適配備計画 \mathbf{y}^* を求める線形計画問題が得られる。

この問題がミニマックス値を正しく出すことを言うためには、式 (11), (12) の不等式系で表現された μ の最適値が、最終的に式 (3), (4) を与えることを確認すればよい。それは、(14), (13) 式から、 ξ の最小化は変数 v の個々の最小化によって実現され、変数 v の最小化はさらに変数 μ の最小化により可能となることから理解できる。

(具体例に対する制約条件系) いま 5 つの出発ノード s_1, \dots, s_5 があるとし、パス組 $l = \{l_1, \dots, l_5\}$ の中の 4 本のパス l_1, \dots, l_4 が、4 つのノード s_1, \dots, s_4 から 1 つの目的ノード t に到る図 1 のようなツリーを形成し、これらのパスとは会合しないパス l_5 によって、出発ノード s_5 から目的ノード t に到るアーク群 M_{s_5} のツリーが形成されるものとしよう。 $l = \{l_1, \dots, l_5\}$ についての制約式 $\xi \geq R(\mathbf{l}, \mathbf{y})$ の表現式系は次のようになる。ただし、パス組 l は表示していない。

$$\begin{aligned} \xi &\geq v_t + v_{t'}, \quad v_t = \mu_{s_4}, \quad v_{t'} = \mu_{s_5}, \\ \mu_{s_1} &\geq R_{s_1} - \sum_{e \in M_{s_1}} \gamma_e y_e, \quad \mu_{s_2} \geq R_{s_2} - \sum_{e \in M_{s_2}} \gamma_e y_e, \quad \mu_{s_3} \geq R_{s_3} - \sum_{e \in M_{s_3}} \gamma_e y_e, \\ \mu_a &\geq \mu_{s_1} + \mu_{s_2} - \sum_{e \in M_a} \gamma_e y_e, \quad \mu_b \geq \mu_a + \mu_{s_3} - \sum_{e \in M_b} \gamma_e y_e, \quad \mu_{s_4} \geq R_{s_4} + \mu_b - \sum_{e \in M_{s_4}} \gamma_e y_e, \\ \mu_{s_5} &\geq R_{s_5} - \sum_{e \in M_{s_5}} \gamma_e y_e, \quad \mu_a, \mu_b, \mu_{s_1}, \dots, \mu_{s_5} \geq 0. \end{aligned}$$

\widehat{L}_k^l 及び M_k^l におけるノード k は、パス組 l によって決まる T_l の1つの目的ノード $t \in T_l$ に来るツリーに存在する。これまでの議論から、守備側の最適戦略 \mathbf{y}^* を導出するための定式化は次のようになる。

$$(PB) \quad \min_{\mathbf{y}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}, \xi} \xi$$

$$s.t. \quad \xi \geq \sum_{t \in T_l} v_t^l, \quad l \in \Omega,$$

$$v_t^l = \sum_{k \in \widehat{L}_t^l} \mu_k^l, \quad t \in T_l, l \in \Omega, \quad (15)$$

$$\mu_s^l \geq R_s + \sum_{k \in \widehat{L}_s^l} \mu_k^l - \sum_{e \in M_s^l} \gamma_e y_e, \quad s \in S, l \in \Omega, \quad (16)$$

$$\mu_d^l \geq \sum_{k \in \widehat{L}_d^l} \mu_k^l - \sum_{e \in M_d^l} \gamma_e y_e, \quad d \in \widehat{N}_l, d \notin S, d \notin T_l, l \in \Omega, \quad (17)$$

$$\mu_d^l \geq 0, \quad d \in \widehat{N}_l, d \notin T_l, l \in \Omega, \quad (18)$$

$$\sum_{e \in A} y_e \leq B_0, \quad (19)$$

$$y_e \geq 0, \quad e \in A.$$

次に、侵入者の最適混合戦略 π^* の導出のための期待残存量 $R(\pi, \mathbf{y})$ のマックスミニ最適化を行う。最小化問題 $\min_{\mathbf{y}} R(\pi, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y}} \sum_{l \in \Omega} \{\pi(l) w_l | w_l = \sum_{t \in T_l} v_t^l\}$ においては、ミニマックスの議論で行ったように、変数 v_t^l は式 (15) ~ (18) で展開される。その線形計画問題を双対問題に変換するため、等式条件 $w_l = \sum_{t \in T_l} v_t^l$ と式 (15) に対応する双対変数をそれぞれ η_l, ξ_t^l とする。同様に、(16) 式及び (17) 式に同じ双対変数 ρ_s^l, ρ_d^l を対応させる。さらに、(19) 式に対する双対変数 λ を用いる。双対化の結果得られる最大化問題は次式となる。

$$\max_{\eta, \xi, \rho, \lambda} \sum_{l \in \Omega} \sum_{s \in S} R_s \rho_s^l - B_0 \lambda$$

$$s.t. \quad \eta_l = \pi(l), \quad l \in \Omega,$$

$$\xi_t^l = \eta_l, \quad t \in T_l, l \in \Omega,$$

$$\rho_k^l \leq \xi_t^l, \quad k \in \widehat{L}_t^l, t \in T_l, l \in \Omega,$$

$$\rho_{k'}^l \leq \rho_k^l, \quad k' \in \widehat{L}_k^l, k \in \widehat{N}_l, k \notin T_l, l \in \Omega,$$

$$\gamma_e \sum_{\{(l,k) | e \in M_k^l, l \in \Omega\}} \rho_k^l \leq \lambda, \quad e \in A,$$

$$\rho_k^l \geq 0, \quad k \in \widehat{N}_l, k \notin T_l, l \in \Omega,$$

$$\lambda \geq 0.$$

この問題の最適値が $\min_{\mathbf{y}} R(\pi, \mathbf{y})$ を与えるから、さらに変数 π について最大化すれば、 $R(\pi, \mathbf{y})$ のマックスミニ最適化が完了する。最終的に整理した結果を一般的に記述すれば以下の線形計画問題となり、これを解けば侵入者の最適混合戦略 π^* が得られる。

$$(PR) \quad \max_{\pi, \rho, \lambda} \sum_{s \in S} R_s \sum_{l \in \Omega} \rho_s^l - B_0 \lambda \quad (20)$$

$$s.t. \quad \rho_k^l \leq \pi(l), \quad k \in \widehat{L}_t^l, t \in T_l, l \in \Omega, \quad (21)$$

$$\rho_{k'}^l \leq \rho_k^l, \quad k' \in \widehat{L}_k^l, k \in \widehat{N}_l, k \notin T_l, l \in \Omega, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \gamma_e \sum_{\{(l,k)|e \in M_k^l, l \in \Omega\}} \rho_k^l &\leq \lambda, \quad e \in \mathbf{A}, \\ \sum_{l \in \Omega} \pi(l) &= 1, \\ \rho_k^l &\geq 0, \quad k \in \widehat{\mathbf{N}}_l, k \notin \mathbf{T}_l, l \in \Omega. \end{aligned} \quad (23)$$

問題 (P_B) は支払に関係する侵入者残存量が定式化されたものであるから理解し易いが、問題 (P_R) については若干補足説明を要する。

目的関数の第1項にある ρ_s^l は、条件式 (16) の双対変数として定義されたものであるから、等式が成立するときに限って正の値をとる。また、パス組 l の1つのパスに沿って移動中に侵入者が全滅し、条件式 (17) で等式が成立しない場合は $\rho_d^l = 0$ となり、不等式 (22) からノード d に到る出発ノード s に対しても $\rho_s^l = 0$ となるから、(20) 式の第1項を大きくするには、出発ノードから出発した侵入勢力を無事に到着ノードに到着させなければならない。もし、 ρ_s^l が不等式 (21) 及び (22) から許される最大値 $\pi(l)$ をとったとすると、目的関数の第1項は

$$\sum_{s \in S} R_s \sum_{l \in \Omega} \pi(l) = \sum_{s \in S} R_s$$

となる。結局、目的関数の第1項は侵入勢力の残存に関係する項であり、各出発ノードから出発した侵入者が途中で全滅しない移動とすれば大きくなる項であると言える。

目的関数の第2項の意味について考察しよう。上記の議論から、 ρ_k^l は、ノード k を通過するパスをとる侵入者が全滅せずに目的ノードまで到達した場合に限ってパス選択確率 $\pi(l)$ をとる。したがって、制約式 (23) の左辺は、アーク e における途中全滅の無い侵入者の通過確率に γ_e が掛けられており、この値は、アーク e に単位守備量を配備した場合に実際に生じうる損耗量の期待値（期待損耗率と呼ぶ）を表している。したがって、この制約式は期待損耗率を一定の値 λ 以下にし、守備効率の高いアークを作らないようにすることを意味している。そのことから、この λ と B_0 の積で与えられる目的関数第2項は期待損耗量を表しており、この量を小さくすることで、目的関数 (20) を大きくできる。以上から、問題 (P_R) の目的関数は、侵入者が移動途中のすべてのアークでの守備効率を小さく抑制しつつ、全勢力を目的ノード群まで無事たどり着かせるようにバランスのとれたパス選択の混合戦略を作るよう要請したものとなっている。

ところで、問題 (P_B) と (P_R) は双対の関係にあり、それぞれの最適値、すなわちミニマックス値とマックスミニ値が一致して、両問題の最適解が最適戦略を与えることが証明できるが、双対性の証明については省略する。

5 おわりに

この報告では、侵入者が複数地点から侵入する損耗ゲームを議論した。侵入者の最適侵入経路としては会合帯同条件を満たすパスの組合せだけを考えれば良いことが判明したが、それは同時手番ゲームに限られる。プレイの途中で取得した情報取得により戦略を変更できる場合は、わざと分岐した経路をとることで守備資源の分散配置を誘導できる。情報取得のある多段階損耗ゲームにおける侵入経路に関するこのような合理的で巧みな戦略と、それに対抗する守備資源の合理的な配備計画は興味深く、将来の研究テーマである。

参考文献

- [1] 宝崎隆祐: 社会の安全とネットワーク阻止モデル, オペレーションズ・リサーチ, **60** (5), pp.266–273, 2015.
- [2] P.M. Morse and G.E. Kimball, *Methods of Operations Research*, MIT Press, Cambridge, 1951.
- [3] R.D. Wollmer: Removing arcs from a network, *Operations Research* **12**, pp.934–940, 1964.
- [4] M. Thomas and Y. Nisgav: An infiltration game with time dependent payoff, *Naval Research Logistics Quarterly* **23**, pp.297–302, 1976.
- [5] N. Assimakopoulos: A network interdiction model for hospital infection control, *Computers in Biology and Medicine* **17**, pp.413–422, 1987.
- [6] M. Kodialam and T.V. Lakshman: Detecting network intrusions via sampling: a game theoretical approach, Proceedings of the 22nd Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications (IEEE INFOCOM), **3**, pp.1880–1889, 2003.
- [7] J. Salmeron, R.K. Wood and R. Baldick: Analysis of electric grid security under terrorist threat. *IEEE Transactions on Power Systems* **19**, pp.905–912, 2004.
- [8] R.L. Church, M.P. Scaparra and R.S. Middleton: Identifying critical infrastructure: The median and covering facility interdiction problems, *Annals of the Association of American Geographers* **94**, pp.491–502, 2004.
- [9] M. Bell, U. Kanturska, J. Schmocker and A. Fonzone: Attacker-defender models and road network vulnerability, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, **366**, pp. 1893–1906, 2008.
- [10] F. Perea and J. Puerto: Revisiting a game theoretic framework for the robust railway network design against intentional attacks, *European Journal of Operational Research*, **226**, pp.286–292, 2013.
- [11] R. Hohzaki and T. Chiba: An attrition game on an acyclic network, *Journal of the Operational Research Society*, **66** (6), pp.979–992, 2015.
- [12] R. Hohzaki and K. Sunaga: Attrition game models with asymmetric information on a network. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **59**, pp.195–217, 2016.
- [13] R. Hohzaki and T. Higashio: An attrition game on a network ruled by Lanchester’s square law, *Journal of the Operational Research Society*, **67** (5), pp.691–707, 2016.
- [14] R. Hohzaki and M. Tanaka: Effects of a player’s awareness of information acquisition and ability to change strategy in attrition games, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **60** (3), pp.353–378, 2017.
- [15] F.W. Lanchester: *Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm*, Constable and Company Lt., London, 1916.