数理解析研究所講究録
第2078巻 2018年 208-214

座席位置選択モデルにおける近似解について

弘前大学大学院医学研究科　小笠原 悠
Yu Ogasawara
Hirosaki University Graduate School of Medicine

1　はじめに

固定された施設への不確実な需要に対して，いつ，どのように，いくらで，何を売るべきかなどの意思決定を扱う分野はRevenue Management (RM) と呼ばれる [4]. RM において，様々な料金クラスの予約が任意の順番で到着することを仮定したモデルは動的モデルと呼ばれる．一般的な動的モデルではシステムの状態は予約数などで表しており，座席位置は考慮されていなかった．それに対して Ogasawara[1] は一列に並んだ席に対して座席位置を考慮して予約を割り当てる単列席モデルを提案した．しかし，それはシステム側が顧客の位置を最適に割り当てるものであり，顧客の座席に対する選択行動は考慮していなかった．しかし，近年はオンライン予約システムの発展により顧客が予約を行うことと同時に座席を選択することは航空機や新幹線，歌舞伎等のシステムで可能となっている．一方，RM では動的モデルに対して顧客の選択行動を取り入れるというアプローチはここ十年程盛んに研究されており，様々なモデルやアルゴリズムが提案されている [6, 5, 3, 2]. しかし，それらは一般的な動的モデル同様，商品に対する選択行動を中心に取り扱っており，座席位置に対する選択行動は取り扱ってはいなかった．

本研究は Ogasawara[1] によって提案された座席位置を考慮した動的モデルの定式化を利用し，顧客の選択行動，すなわち，座席に対する選択行動を考慮したモデル（座席位置選択モデル）を提案するものである．近似解の算出には RM の顧客行動に基づいたモデルの近似方法である Choice-based Deterministic Linear Programming (CDLP) と分解近似法を座席位置選択モデルに適用した．更に，顧客の選択行動が多項ロジットモデルに従う場合の効率的解探索方法を示す．得られた近似解の評価はモンテカルロシミュレーションによって実施した．

2　定式化

システムは複数の列が並んでいるものとし，それぞれの列は区別しないものとする．また，料金クラスと席は 1 対 1 で紐づいており，各料金クラスの状態とは独立に顧客は各料金クラスに対して予約してくるものとする．料金クラスと席の紐づきの前提と到着の仮定より，各料金クラス毎に問題を考えれば良い．よって以降は料金クラスについては省略することにする．

顧客は 1 人ずつ到着するとし，予約可能期間は $n = 1, \cdots, N$ で十分に離散化されており，時間 n は逆に進むとする．$n = 0$ は予約可能期間の終了を表す．時間 n での顧客の到着率は時間と独立しているものとして，λ で表す．この時，時間 n で顧客は高々1 回しか到着しないものとする．よってここでの N は十分大きい数であることを想定する．顧客 1 人到着することで得られる利益を r とする．また，顧客は全員，リクエストの際に席位置を選択するものとする．

各列を区別せず，隣り合って連続した k 数の空席（以下これをサイズ k のセグメントと呼ぶ）の数によって状態を表す．更にセグメントの左右は区別しないものとし，複数の列の内で最も長い列の持つ席数を m とする．よって複数の列の初期状態は $c = (c_1, \cdots, c_m)^T$ と表すことが出来る．

ここで c_i はサイズ i のセグメントの初期数を表し，T は転置を意味する．状態空間は

$$X=\left\{(x_1,\cdots,x_m)|0\leq x_i\leq\sum_{k=1}^{m}c_k\lfloor\frac{k+1}{i+1}\rfloor,x_i\in\mathbb{Z}^+,i=1,\cdots m\right\}$$

と定義する．ここで，$\mathbb{Z}^+$ は非負の整数の集合を表す．到着する顧客は席を選択する際にどのセグメントのどの位置にするかを決める．顧客に開放する席位置の集合は以下で定義する．

$$\Omega(x)=\left\{(a,b)|x_a>0,b\in\mathbb{Z}^+,0<b\leq\frac{a+1}{2},a=1,\cdots,m\right\},x\in X.$$

顧客に開放することの出来る席位置の集合を選択可能集合と呼ぶこととする．システムは選択可能集合の部分集合 $S\in\Omega(x)$ を毎時間間隔 n の開始時点で決定する．この部分集合を提供集合 S と呼ぶ．時間 n に到着する顧客はそのシステムの決定した提供集合の中から席を選ぶ．システムはこの時間と状態毎に提供集合を決定することでシステムが得られる総利益の最大化を目指す．

次に顧客が行う選択を定義する．顧客が提供集合 $S\subset\Omega(x)$ を与えられた時に決定する位置を $(a,b)\in S$ とした時，その確率を $P_{(a,b)}(S)$ と表す．顧客が何も選択しない確率は $P_0(S)$ と表し，$P_0(S)=1-\sum_{(a,b)\in S}P_{(a,b)}(S)$ とする．次に，顧客が (a,b) を選択した時にセグメントの変化を考える．顧客が (a,b) を選択した時，すなわち，サイズ a のセグメントの位置 b を選択した時は $e_{b-1}+e_{a-b}-e_a$ と状態は変化し，セグメントが分割されていく．ここで，$e_i,i=1,\cdots,m$ は要素 i が 1 を取る単位ベクトルとし，e_0 の時は零ベクトルを取るものとする．この (a,b) が顧客に選択された時に消費される状態をベクトル $A_{(a,b)}$ で表す．この $A_{(a,b)}$ を列ベクトルとしてまとめて行列 $A=(A_{(a,b)})_{(a,b)\in\Omega}$ と定義する．ここで，

$$\Omega=\left\{(a,b)|a=1,\cdots,m,b\in\mathbb{Z}^+,0<b\leq\frac{a+1}{2}\right\}$$

とする．これは可能な全ての提供集合の集合を意味する．動的計画法を用いると，時間 n に状態 x が与えられた時，n から 0 を通してシステムが得られる最大期待利益 $U_n(x)$ は以下で示される．

$$U_n(x)=\max_{S\subseteq\Omega(x)}\left\{\lambda\sum_{(a,b)\in S}P_{(a,b)}(S)(r-\Delta_{(a,b)}U_{n-1}(x))\right\}+U_{n-1}(x),$$
$$n=1,\cdots,N,x\in X \qquad (2.1)$$

ここで，$\Delta_{(a,b)}U_n(x)=U_n(x)-U_n(x+A_{(a,b)})$ とし，境界条件として $U_0(x)=0,U_{N+1}(x)=0,x\in X$ と $U_n(0)=0$, $U_n(x)=0,x\notin X,n=1,\cdots,N$ を与える．

3　座席位置選択モデルにおける近似法

3.1　Choice-based Deterministic Linear Programming (CDLP) の適用

容量と需要を連続化し，到着率を決定的な定数として扱う．選択集合を S としたときに期待される利益を $R(S)$ とすると，

$$R(S)=\sum_{(a,b)\in S}rP_{(a,b)}(S),S\subseteq\Omega(x),x\in X$$

と表すことが出来る．また，$P(S)$ を $P_{(a,b)}(S)$ を Ω に対して配置させた縦ベクトル，すなわち $P(S)=(P_{(a,b)}(S))_{(a,b)\in\Omega}$ とし，選択集合を S としたときに変化する期待容量を $Q(S)$ とする．このとき $Q(S)$ は $Q(S)=(Q_1(S),\cdots,Q_m(S))$ となり，$Q_i(S)$ は選択集合 S が与えられた時に大きさ i のセグメントの期待変化量を表す．ここで，初期状態 c に対して以下の仮定を置く．

仮定 1. $n=N$ から $n=0$ を通した初期状態 c からの状態推移先に状態 $x^+=(x_i)_{i=1,\cdots,m}, x_i>0, i=1,\cdots,m$ が存在する.

$t(S)$ を選択集合 S を選んでいる時間区間の総数と置く. $t(S)$ は連続を許すとする. CDLP によって 1 から N までで得られる最大期待利益 U^{CDLP} は以下で表すことが出来る.

$$
\begin{aligned}
U^{CDLP} = \max \sum_{S\subseteq\Omega} \lambda R(S)t(S) \qquad (3.1)\\
\text{s.t. } 0 \le c + \sum_{S\subseteq\Omega} \lambda Q(S)t(S)\\
\sum_{S\subseteq\Omega} t(S) \le N\\
t(S) \ge 0, \forall S \subseteq \Omega.
\end{aligned}
$$

(3.1) に対する双対問題は以下になる.

$$
\begin{aligned}
&\min\ \pi^T c + N\sigma && (3.2)\\
&\text{s.t. } -\lambda\pi^T Q(S) + \sigma \ge \lambda R(S), \forall S \subseteq \Omega\\
&\quad \pi \ge 0, \sigma \ge 0
\end{aligned}
$$

π,σ は, それぞれ問題 (3.1) の制約式の第 1 式と 2 式に対応する双対変数を表している. ここで得られた U^{CDLP} に対しては以下の命題が成り立つ.

命題 1. $U_T(c) \le U^{CDLP}$

(3.1) に対して列生成法を適用させた場合の副問題は以下になる.

$$\max_S \lambda(R(S) + \pi^T Q(S)) - \sigma \qquad (3.3)$$

3.2 分解近似法

分解近似法は CDLP によって得られた双対解である π, すなわち, セグメントに対する限界価値を使用し, セグメント i について (2.1) を分解して解く. その際 i 以外のセグメントは π によって見積もる. すなわち,

$$U_n(x) \approx \hat{U}_n^i(x_i) + \sum_{l\ne i} \pi_l x_l \qquad (3.4)$$

とする. (3.4) より,

$$
\begin{aligned}
\Delta_{(a,b)}U_n(x) &= U_n(x) - U_n(x + A_{(a,b)})\\
&\approx \hat{U}_n^i(x_i) - \hat{U}_n^i(x_i + e_i^T A_{(a,b)}) - (\eta^T - \eta_i e_i^T)A_{(a,b)} \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

が得られる. (3.4) と (3.5) を使用すると (2.1) より

$$\hat{U}_n^i(x_i) = \max_{S\in\overline{S}_i(x_i)} \left\{ \lambda \sum_{(a,b)\in S} P_{(a,b)}(S)(r + (\eta^T - \eta_i e_i^T)A_{(a,b)} - \Delta_{(a,b)}\hat{U}_{n-1}^i(x_i)) \right\} + \hat{U}_{n-1}^i(x_i) \qquad (3.6)$$

が得られる．ここで $\overline{S}_j(x_j) = \{S | S \subseteq \Omega(x), x_i = x_j, x \in X\}$ とする．次に最適な提供集合を求める．ここではヒューリスティックなパラメータとして $0 \leq \beta \leq 1$ を導入し，

$$\Delta U_n^i(x) = U_n(x) - U_n(x - \boldsymbol{e}_i) \approx \Delta \overline{U}_n^i(x) := \beta \Delta \hat{U}_n^i(x_i) + (1-\beta)\pi_i \tag{3.7}$$

を計算する．ここで，$\Delta \hat{U}_n^i(x_i) = \hat{U}_n^i(x_i) - \hat{U}_n^i(x_i - 1)$ とし，$\Delta \hat{U}_n^i(0) = 0$ とする．この $\Delta U_n^i(x)$ を用いて，各時間と状態に対して

$$\max_{S \subseteq \Omega(x)} \left\{ \lambda \sum_{(a,b) \in S} P_{(a,b)}(S)(r - \Delta \overline{U}_{n-1}^T(x) A_{(a,b)}) \right\} \tag{3.8}$$

を求める．ここで，$\Delta \overline{U}_t^T(x) = (\Delta \overline{U}_n^1(x), \cdots, \Delta \overline{U}_n^m(x))$ とする．これにより各時間と状態に対する最適な提供集合が決まる．

4 顧客行動への MNL モデルの適用

決定空間の大きさの問題は顧客の選択行動が多項ロジット (MNL) モデル [7] に従う仮定の下では Gallego et al.[5] や Liu and van Ryzin[3] と同様に解消できることを示す．顧客の座席選択行動が多項ロジットモデルに従うということは，各位置に対して顧客は好み（ウェイト）を持っており，その好みに応じて顧客は位置を選択していることを意味する．ここでは簡単に，全ての顧客は全ての位置を選択する対象として考える．ここで位置 (a,b) が利用可能であることを表すバイナリベクトルを

$$y_{(a,b)} = \begin{cases} 1 & (a,b) \text{ が提供されている} \\ 0 & (a,b) \text{ が提供されていない} \end{cases}$$

で定義し，$y = (y_{(a,b)})_{(a,b) \in \Omega}$ と置く．この y を利用した場合の顧客の選択は

$$P_{(a,b)}(y) = \frac{v_{(a,b)} y_{(a,b)}}{\sum_{(\alpha,\beta) \in \Omega} v_{(\alpha,\beta)} y_{(\alpha,\beta)} + v_0} \tag{4.1}$$

で表される．ここで，$v_{(a,b)}$ は顧客の位置 (a,b) に対する選好を表し，v_0 は何も買わないことに対する選好を表す．

$$Y(x) = \left\{ (y_{(a,b)})_{(a,b) \in \Omega} | y_{(a,b)} \in \{0, 1_{\Omega(x)}(a,b)\} \right\}, x \in X \tag{4.2}$$

とし，$1_{\Omega(x)}(a,b)$ は指示関数とする．この時以下の命題が成り立つ．

命題 2. 問題

$$\max_{y \in \{0,1\}^{|\Omega|}} \frac{\sum_{(a,b) \in \Omega} \xi_{(a,b)} v_{(a,b)} y_{(a,b)}}{\sum_{(a,b) \in \Omega} v_{(a,b)} y_{(a,b)} + v_0} \tag{4.3}$$

を考える．この時 $\xi_{(a,b)}, (a,b) \in \Omega$ を降順に並べ，その i 番目の値を $\xi_{[i]}$ とする．すなわち，

$$\xi_{[1]} \geq \cdots \geq \xi_{[i]} \geq \cdots \geq \xi_{[|\Omega|]}$$

とする．この時，

$$y^*_{(a,b)} = \begin{cases} 1 & \xi_{(a,b)} \geq \xi_{[k^*]}, \\ 0 & \xi_{(a,b)} < \xi_{[k^*]} \end{cases}$$

を満たす k^* が存在する．

命題 3. 状態 $x \in X$ が与えられたとき，問題

$$\max_{y \in Y(x)} \frac{\sum_{(a,b)\in\Omega} \xi_{(a,b)} v_{(a,b)} y_{(a,b)}}{\sum_{(a,b)\in\Omega} v_{(a,b)} y_{(a,b)} + v_0} \tag{4.4}$$

を考える．この時 $\xi_{(a,b)}, (a,b) \in \Omega(x)$ を降順に並べ，その i 番目の値を $\xi_{[i]}$ とする．すなわち，

$$\xi_{[1]} \geq \cdots \geq \xi_{[i]} \geq \cdots \geq \xi_{[|\Omega(x)|]}$$

とする．この時，

$$y^*_{(a,b)} = \begin{cases} 1 & \xi_{(a,b)} \geq \xi_{[k^*]}, 1_{\Omega(x)}(a,b) = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

を満たす k^* が存在する．

これらの命題により，MNL モデルを適用した場合の (3.1), (3.3), (3.8) の解の探索を効率的に行うことが可能となる．

5 数値例

数値例を用いてこれまで示した計算手法を適用した場合に得られる利益を見る．入力データは $N = 100, \lambda = 0.3, r = 10, c = (0,0,k,k), k = 4,5,6,7$ とした．顧客の座席の選択行動は MNL モデルに従うとした．その際の位置に対する選好は $v_{(1,1)} = 0.5, v_{(2,1)} = 1.5, v_{(3,1)} = 2.0, v_{(3,2)} = 3.0, v_{(4,1)} = 2.5, v_{(4,2)} = 3.5, v_0 = 1,2,3,4$ とした．ここで v_0 は不購入への選好を表す．数値例によって比較する手法を以下に示す．

DP: DP は (2.1) を用いて得られた提供集合を使用する．

CDLP-LX: CDLP で得られた解は既に述べたように，各提供集合に対する割当時間のみであり，その提供集合をどのような t，及び x に対して割り当てればよいのかは未知である．ここでは，CDLP で得られた解で正の割当時間がある提供集合を逆辞書式順で割り当てるものを CDLP-LX と表す．ここでの逆辞書式とは，提供集合を文字列として辞書式に並べた時にその逆から割り当てていくことを示す．例えば，$\{(1,1),(3,1)\}$ と $\{(2,1),(3,1),(3,2)\}$ の二つの提供集合があった場合，この二つの提供集合を文字列と見なすと，逆辞書式では $\{(2,1),(3,1),(3,2)\}$ から選ばれることを意味する．この時，提供集合内での位置は辞書式で並んでいるものとする．

CDLP-RND: CDLP-LX が逆辞書式なのに対して，CDLP-RND はランダムで割当可能時間が余っている提供集合から選ぶものとする．

DCOMP-0, DCOMP-0.5, DCOMP-1: DCOMP-0 は $\beta = 0$ とした分解近似法によって得られた提供集合を使用した方法を表す．同様に DCOMP-0.5 は $\beta = 0.5$，DCOMP-1 は $\beta = 1$ とした方法を示す．

FULL-OPEN: FULL-OPEN は空いている全ての位置を常に解放するという固定された政策を意味する．

	v_0	DP	CDLP LX	CDLP RND	DCOMP 0	DCOMP 0.5	DCOMP 1
(0,0,4,4)	1	113.61	102.12	100.71	85.15	92.52	86.67
	2	113.73	104.01	100.41	97.10	91.34	83.49
	3	111.56	100.08	95.49	95.20	92.73	83.80
	4	109.13	98.93	95.27	97.12	93.70	85.09
(0,0,5,5)	1	110.53	103.54	100.76	97.37	87.40	85.82
	2	108.87	101.55	98.27	95.45	87.41	78.86
	3	106.99	95.35	98.35	93.34	90.38	79.21
	4	105.69	97.26	99.04	96.05	92.03	79.58
(0,0,6,6)	1	106.72	101.15	101.34	96.83	84.37	82.10
	2	105.30	97.65	99.22	93.79	84.18	74.67
	3	104.29	102.58	102.58	99.90	77.06	68.05
	4	103.67	100.41	100.12	99.95	79.88	67.07
(0,0,7,7)	1	103.56	100.93	101.07	95.64	81.53	79.34
	2	103.38	101.65	101.37	99.95	73.86	69.18
	3	102.77	99.39	99.60	99.99	74.28	64.67
	4	102.01	96.87	97.07	99.98	76.86	63.79

これらの手法にて得られた政策をモンテカルロシミュレーションによって評価する．試行回数は 20,000 とした．各入力データ及び手法から得られた利益の平均を表 5 に示す．実質何もコントロールしていない FULL-OPEN と比較して，高い利益を出しているのは CDLP と DP となった．一方で $\beta = 0, 0.5, 1$ のパラメータにおける分解近似法は全てにおいて FULL-OPEN を下回った．この数値例において，もし顧客の不購入の選好が 0 である場合には全ての割当方法で差が生まれないことに注意する．なぜならば，全ての顧客から得られる利益は等しいため，もし不購入が無い場合，すなわち，到着した顧客が必ず席を予約する場合であれば，最適政策は常に顧客を受け入れるという政策になるからである．よってこの結果は，顧客への座席位置の選択肢の提供を制御することで，より高い利益が得られることを示唆している．

6　まとめ

計算においては，顧客が MNL モデルに従う場合には命題 2 及び命題 3 により効率的に計算することが可能になる．しかし，DP に対しては決定空間の探索はこれにより減らすことが出来るが，次元の呪いは解消されない．CDLP は線形計画法を使用するため次元の呪いが解消され，更に決定空間の探索も命題 2 により効率的に解くことが可能となるが，その犠牲として，解の割り当て順序を求めることは出来ない．しかし数値例より，LX と RND の設定において FULL-OPEN よりも高い利益が見込まれる場合が存在することが数値例より示された．更に，CDLP の計算時間は N や c といった問題のスケールを示すパラメータの影響を殆ど受けないことから，本モデルにおいて CDLP は，現実的な規模に使用するには有効な近似法になる可能性がある．分解近似法は次元の呪いは軽減されるが，探索が一部しか効率的にならない上，数値例よりあまりよい効果が期待されないことが示唆された．Liu and van Ryzin[3] や Bront et al.[2] では分解近似法が最も高い利益を出す手法であった結果に対して，本研究の計算結果は対照的なものとなっている．これは，本モデルは他の一般的な RM のモデルと異なり，状態の要素間が互いに密に関係していると

いう特徴が原因になっていると推測される.

参考文献

[1] Yu Ogasawara. "A dynamic model with resources placed on single line in revenue management." *The Journal of the Operations Research Society of Japan*, 60.2 (2017): 91-99.

[2] Bront, Juan Jos Miranda, Isabel Mndez-Daz, and Gustavo Vulcano. "A column generation algorithm for choice-based network revenue management." *Operations Research* 57.3 (2009): 769-784.

[3] Liu, Qian, and Garrett Van Ryzin. "On the choice-based linear programming model for network revenue management." *Manufacturing & Service Operations Management* 10.2 (2008): 288-310.

[4] Talluri, Kalyan and Garrett Van Ryzin. *The theory and practice of revenue management.* Vol. 68. Springer Science & Business Media, 2004.

[5] Gallego, Guillermo and Iyengar, Garud and Phillips, R and Dubey, Abha. "Managing flexible products on a network." *CORC Technical Report TR-2004-01, Department of Industrial Engineering and Operations Research*, Columbia University (2004)

[6] Talluri, Kalyan, and Garrett Van Ryzin. "Revenue management under a general discrete choice model of consumer behavior." *Management Science* 50.1 (2004): 15-33.

[7] Ben-Akiva, Moshe E., and Steven R. Lerman. *Discrete choice analysis: theory and application to travel demand.* Vol. 9. MIT press, 1985.