

Global structure of steady states for a nonlocal Allen-Cahn equation *

電気通信大学大学院・情報理工学研究科 久藤 衡介 (Kousuke Kuto) †
Graduate School of Informatics and Engineering
The University of Electro-Communications

1 非局所項を伴う Allen-Cahn 方程式の Neumann 問題

次のような非局所項を伴う非線形常微分方程式

$$-du'' = (1 - u^2) \left(u - \frac{\mu}{2} \int_{-1}^1 u \, dx \right), \quad x \in I := (-1, 1) \quad (1.1a)$$

を Neumann 境界条件

$$u'(-1) = u'(1) = 0 \quad (1.1b)$$

の下で考える。境界値問題 (1.1a)-(1.1b) のすべての非定数解は、単調増加の条件

$$u'(x) > 0, \quad x \in I \quad (1.1c)$$

をみたす解の尺度変換とそれらの折り返しを繋げることで構成出来る。本稿では、積分項の大きさ $\mu \geq 0$ を任意に固定して、 $d > 0$ をパラメーターとする (1.1) の解集合

$$S(\mu) := \{ (u, d) \in E \times \mathbb{R}_+ \mid (u, d) \text{ は (1.1) の解} \} \quad (E := C^1(\bar{I}))$$

の大域分岐構造を考える。とくに積分項のない $\mu = 0$ のケースでは (1.1) は 1 次元定常 Allen-Cahn 方程式

$$\begin{cases} -dv'' = (1 - v^2)v, & v' > 0, \quad x \in I, \\ v'(-1) = v'(1) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

* 森 竜樹 氏 (阪大基礎工), 辻川 亨 氏 (宮崎大工), 四ツ谷 晶二 氏 (龍谷大理工) との共同研究に基づく。本研究は科研費 (課題番号:15K04948) の助成を受けたものである。

† e-mail address: k-kuto@uec.ac.jp,

に帰着される。これは、Chafee-Infante 問題 [1] としても有名で、解集合 $S(0)$ の大域分岐構造は次の定理で知られている (例えば Chafee-Infante [1], Schaaf [9] 参照):

定理 1.1 ([1, 9]). 解集合 $S(0)$ は自明解 $v = 0$ の枝から $d = 4/\pi^2$ で分岐して、 $0 < d < 4/\pi^2$ でパラメーター表示される曲線

$$S(0) = \{(v(\cdot, d), d) \mid 0 < d < 4/\pi^2\} \quad (1.3)$$

を形成する。さらに、

$$v(-x, d) = -v(x, d), \quad x \in \bar{I}, \quad 0 < d < 4/\pi^2 \quad (1.4)$$

をみताす。

定理 1.1 の (1.4) より、 $\mu = 0$ のときの (1.1) (すなわち (1.2)) の解 $v(x, d)$ は奇関数であって、 $\int_{-1}^1 v(x, d) dx = 0$ をみたすから、任意の μ に対して (1.1) の解でもある。すなわち、 $S(0) \subset S(\mu)$ が任意の $\mu > 0$ に対して成り立つ。おのずと、 $S(0) \subsetneq S(\mu)$ なのか $S(0) = S(\mu)$ なのかという疑問が生じる。換言すると、非局所項が本質的に働く奇関数でない解が存在するかという問題である。

この問題を考察した著者たちの最近の一連の論文 [4, 5] では、 $\mu = 1$ のときに限り $S(0) = S(1)$ であって、それ以外の $\mu > 0$ では $S(0) \subsetneq S(\mu)$ であることが示されている。より詳しく、 $S(\mu)$ の構造は $\mu = 1$ を閾値として変化し、 $0 < \mu < 1$ のケースでは、 $S(0)$ 上に u の対称性を壊す 2 次分岐点が現れ、そこから分岐した非対称解の枝は境界遷移層をもつ特異極限に向かう (定理 2.1 および図 1 参照)。一方で $\mu > 1$ のケースでは、 $S(0)$ 上に 2 次分岐点は存在せず、定数解と内部遷移層をもつ特異極限を繋ぐ分岐曲線が 3 本現れる (定理 2.2 および図 2 参照)。

本稿の目的は、上記の結果を紹介するとともに、とくに $0 < \mu < 1$ のケースの 2 次分岐点の発見について、[4] に掲載した証明とは趣の異なるアプローチを提示することである。

[4] では、(1.1) を境界値問題

$$\begin{cases} -du'' = (1 - u^2)(u - \sigma), & u' > 0, \quad x \in I, \\ u'(-1) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

と積分方程式

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 u dx = \frac{\sigma}{\mu} \quad (1.6)$$

に分解して考えている。具体的には、(1.5) の解を (d, σ) でパラメーター表示してから、(1.6) に対応する積分写像 $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 u dx - \frac{\sigma}{\mu}$ の零等高線を切り出す方法で、 $S(\mu)$ の大域分

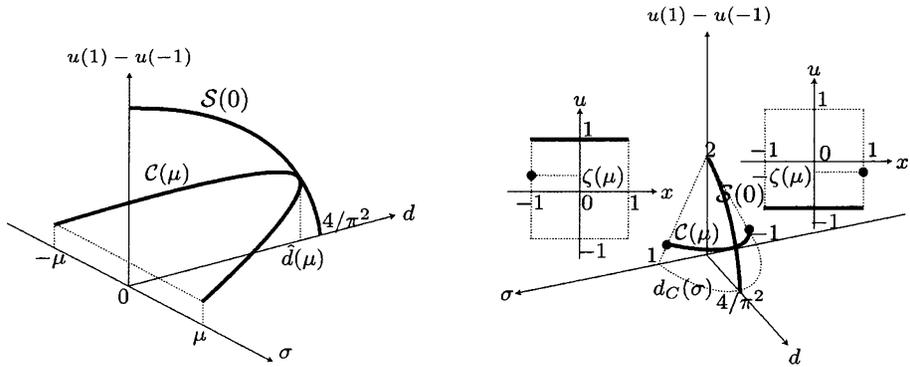


図1 $S(\mu) = S(0) \cup C(\mu)$ の分岐図式 ($0 < \mu < 1$)

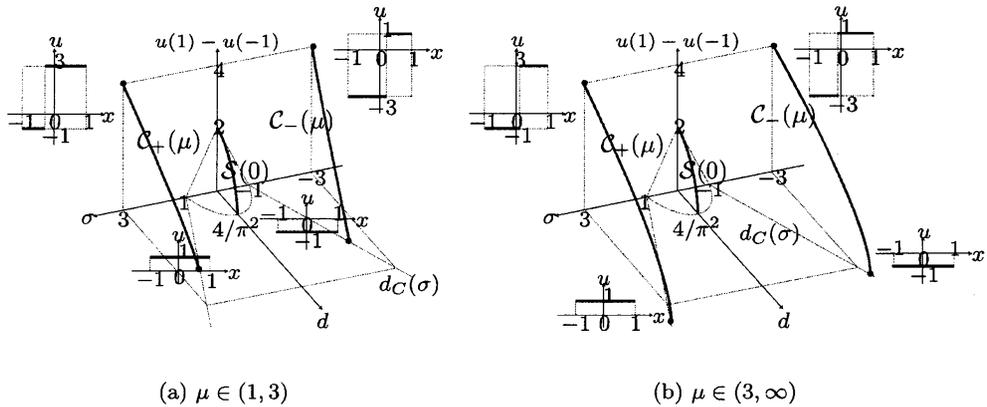


図2 $S(\mu) = S(0) \cup C(\mu)$ の分岐図式 ($\mu \in (1, 3)$ と $\mu \in (3, \infty)$ の場合)

岐構造を得ている。その際、(1.5) の解表示や (1.6) に対応する積分写像の解析に、楕円関数の諸公式を多く使っている。

そこで本稿では、Krasnoselskii の分岐定理 ([3], [6, 第 I 部, 定理 6.8]) を用いて、 $S(0)$ 上に 2 次分岐点を見つける。ここで紹介する証明は、2 次分岐点の発見のみにこだわるので、獲得する分岐枝の情報は [4] で得られた結果より乏しい。ただ、本稿の証明は、(1.5) と (1.6) への分解はせずに、従来の分岐理論の枠組みで (1.1) を解析しており、必要となる楕円関数の技巧は [4] の証明より少なくすむ。

2 大域分岐構造

本節では、筆者たちの最近の論文 [4, 5] で得られた (1.1) の解の大域分岐構造を紹介する。最初に $0 < \mu < 1$ のケースでは、奇関数の意味で対称な解の枝 $S(0)$ ((1.3) 参照) 上のある関数から奇関数でない解の枝が分岐することが示された (図 1 参照) :

定理 2.1 ([4, 5]). 任意の $0 < \mu < 1$ に対して、一意な $0 < \hat{d}(\mu) < 4/\pi^2$ が存在して、(1.1) の奇関数でない解が $(u, d) = (v(\cdot, \hat{d}(\mu)), \hat{d}(\mu)) \in S(0)$ から分岐する。さらに、奇関数でない解の成す分岐曲線は $\sigma = \frac{\mu}{2} \int_{-1}^1 u \, dx$ によって次のようにパラメータ表示される :

$$C(\mu) = \{(u(\cdot, \sigma; \mu), d(\sigma; \mu)) \mid -\mu < \sigma < \mu\}.$$

このとき、 $S(\mu) = S(0) \cup C(\mu)$ であって、 $C(\mu)$ は次の性質をみたす :

- (i) $(u(\cdot, 0; \mu), d(0; \mu)) = (v(\cdot, \hat{d}(\mu)), \hat{d}(\mu))$,
- (ii) $d(\sigma; \mu)$ は σ に関して偶対称: $d(-\sigma; \mu) = d(\sigma; \mu)$ ($-\mu < \sigma < \mu$) であって、

$$\lim_{\sigma \uparrow \mu} d(\sigma; \mu) = 0,$$

- (iii) $u(x, -\sigma; \mu) = -u(-x, \sigma; \mu)$ ($(x, \sigma) \in \bar{I} \times (-\mu, \mu)$) であって、

$$\lim_{\sigma \uparrow \mu} u(x, \sigma; \mu) = \begin{cases} \zeta(\mu)(< 1) & (x = -1), \\ 1 & (-1 < x \leq 1), \end{cases}$$

- (iv) 2次分岐点 $\hat{d}(\mu)$ は $0 < \mu < 1$ に関して単調増加であって、

$$\lim_{\mu \downarrow 0} \hat{d}(\mu) = 0, \quad \lim_{\mu \uparrow 1} \hat{d}(\mu) = 4/\pi^2.$$

一方で $\mu > 1$ のケースでは、 $S(0)$ 上に2次分岐点は存在せず、定数解と内部遷移層をもつ特異極限を繋ぐ分岐曲線が3本現れることが示された (図 2 参照) :

定理 2.2 ([5]). (1.1) において $\mu > 1$ とする。このとき、 $d = 8(\mu - 1)/\pi^2$ で $u = \pm 1$ のそれぞれから解が分岐する。分岐した解が形成する曲線 $C_{\pm}(\mu)(E \times \mathbb{R}_+)$ はそれぞれ $d \downarrow 0$ で異なる内部遷移層をもつ特異極限に繋がっている。さらに、 $S(\mu)$ は3曲線 $S(0)$, $C_{\pm}(\mu)$ の交わらない和で表される :

$$S(\mu) = C_{-}(\mu) \sqcup S(0) \sqcup C_{+}(\mu).$$

定理 2.1, 2.2 の証明では, 非局所問題 (1.1) を 2 つのパラメーター (d, σ) を伴う境界値問題 (1.5) と積分方程式 (1.6) に分解し, まずは (1.5) の解を $\phi(x, d, \sigma)$ とパラメータ表示している. 次に (1.6) に対応する積分写像 $\Phi(d, \sigma) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \phi(x, d, \sigma) dx - \frac{\sigma}{\mu}$ の零等高線を切り出している. 定理 2.1 の $S(0)$ 上の 2 次分岐点は, $S(0)$ に対応する Φ の零等高線に交叉するような零等高線を構成することで得られている. その際, Morse の補題に基づいて, $S(0)$ に対応する Φ の零等高線上に Φ の非退化な停留点を探すが, (1.2) の解の楕円関数表示と楕円関数に関連する諸公式 [11] が有効である. さらに, [7] で既得の双安定型方程式の解に対する楕円積分による表示式と陰関数定理を組合わせて, 分岐枝を追跡し上記の大域構造を得ている.

3 2 次分岐点の存在に関する別証明

本節では, $0 < \mu < 1$ のケースに絞って (1.1) を考え, $S(0)$ 上の 2 次分岐点を [4] に掲載した証明とは異なる方法で得る. 2 次分岐点の存在だけを示すのであれば, [4] より簡単な証明が可能だという提言が目的であって, この方法だけでは定理 2.1 のような 2 次分岐点の一意性や分岐枝の大域的な挙動は得られない. なお, 本節で紹介する証明では, 境界値問題 (1.5) と積分方程式 (1.6) への分解を経ずに, 非局所問題 (1.1) そのものを分岐理論の枠組みで扱う.

非局所項の大きさ μ を $0 < \mu < 1$ に任意に固定して, (1.1) の解集合 $S(\mu)$ を考える. まずは, (1.1) の解の振幅と分岐パラメーター d の存在範囲に対するアプリオリ評価を得ておく:

補題 3.1. 任意の $0 < \mu < 1$ に対して, $(u(\cdot, d), d) \in S(\mu)$ ならば,

$$-1 < u(-1) (= \min_{x \in \bar{I}} u) < u(1) (= \max_{x \in \bar{I}} u) < 1 \quad (3.1)$$

かつ

$$0 < d < \frac{\pi^2}{4} \quad (3.2)$$

が成り立つ.

Proof. (3.1) に関しては最大値の評価のみ示す (最小値の評価も同様に出来る). 任意の $(u(\cdot, d), d) \in S(\mu)$ をとる (以下では $u = u(\cdot, d)$ と表す). (1.1c) より $u(1) = \max_{x \in \bar{I}} u$ である. このとき $u''(1) \leq 0$ だから, (1.1a) に $x = 1$ を代入すると,

$$(1 - u(1)^2) \left(u(1) - \frac{\mu}{2} \int_{-1}^1 u dx \right) \geq 0.$$

これから $|u(1)| \leq 1$ を示す, 背理法で $|u(1)| > 1$ と仮定すると,

$$0 \geq u(1) - \frac{\mu}{2} \int_{-1}^1 u \, dx > (1 - \mu)u(1)$$

となる. ここで, $0 < \mu < 1$ より $u(1) < 0$ だが, 仮定 $|u(1)| > 1$ と合わせると,

$$u(1) (= \max_{x \in \bar{I}} u) < -1 \quad (3.3)$$

でなくてはならない. 非局所項に目を向けると,

$$\sigma(d) := \frac{\mu}{2} \int_{-1}^1 u(x, d) \, dx < -\mu < 0$$

となる. そこで, $-du'' = (1 - u^2)(u - \sigma)$ を I 上で積分すると, 境界条件 (1.1b) より,

$$\int_{-1}^1 (1 - u^2)(u - \sigma) \, dx = 0. \quad (3.4)$$

ここで $\sigma < -1$ ならば, (3.4) の被積分関数の形状と (3.3) より, $\sigma < u(1) < -1$ となり, (1.1a) で $x = 1$ として, $du''(1) = -(1 - u(1)^2)(u(1) - \sigma) > 0$ となる. これは u が $x = 1$ で最大値をとることに矛盾する. また, $\sigma = -1$ ならば, $(1 - u^2)(u - \sigma) = (1 - u)(u + 1)^2$ は $u < 1$ では常に非負だから, (3.3) および (3.4) より矛盾である. さらに, $-1 < \sigma < 0$ ならば, (3.3) および (3.4) に加え $(1 - u(1)^2)(u(1) - \sigma) = -du''(1) > 0$ であることから, $\sigma < u(1) < 1$ となる. しかしこれは $u(1) < -1$ に矛盾する. したがって, 背理法で $|u(1)| \leq 1$ が示された. 同様に $|u(-1)| \leq 1$ も示せる.

次に $|u(1)| < 1$ を示す. 上で示した $|u(x)| \leq 1$ ($x \in \bar{I}$) と (3.4) より, $-1 < \sigma < 1$ が分かる. ここで仮に, $u(1) = 1$ とすると, u は常微分方程式の初期値問題

$$-du'' = (1 - u^2)(u - \sigma), \quad u(1) = 1, \quad u'(1) = 0$$

の一意解 $u \equiv 1$ に一致しなければならず矛盾である. よって, $u(1) (= \max_{x \in \bar{I}} u) < 1$ である. 同様に $u(-1) (= \min_{x \in \bar{I}} u) > -1$ も示せる.

最後に (3.2) を示す. 任意の $(u(\cdot, d_*), d_*) \in \mathcal{S}(\mu)$ をとると,

$$\begin{cases} -d_* u_{xx}(x, d_*) = (1 - u^2(x, d_*))(u(x, d_*) - \sigma(d_*)), & u_x(x, d_*) > 0, \quad x \in I, \\ u_x(-1, d_*) = u_x(1, d_*) = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

をみます. ここで, 固定された係数 d_* を可変パラメータ $d > 0$ に換えた境界値問題

$$\begin{cases} -dU'' = (1 - U^2)(U - \sigma(d_*)), & U' > 0, \quad x \in I, \\ U'(-1) = U'(1) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

を考える. この問題の非線形項 $f(U, \sigma_*) = (1 - U^2)(U - \sigma(d_*))$ は双安定型とよばれ, 微分方程式のみを考えると3つの定数解 $u = \pm 1, \sigma(d_*)$ をもつ. 既を示した (3.1) より, $-1 < \sigma(d_*) < 1$ であることに注意する. このとき, (3.6) の解が形成する分岐曲線は

$$d = \frac{f_U(\sigma(d_*), \sigma(d_*))}{4} \pi^2 = \frac{1 - \sigma(d_*)^2}{4} \pi^2$$

で真中の定数解 $\sigma(d_*)$ から分岐して,

$$0 < d < \frac{1 - \sigma(d_*)^2}{4} \pi^2$$

の範囲で存在することが知られている (Smoller-Wasserman [10]). ここで (3.6) でとくに $d = d_*$ にしたのが (3.5) だから,

$$0 < d_* < \frac{1 - \sigma(d_*)^2}{4} \pi^2$$

が分かる. さらに $-1 < \sigma(d_*) < 1$ より $0 < d < \pi^2/4$, すなわち, (3.2) が示された. \square

第1節で述べたように, $\mu = 0$ のときの (1.1) (すなわち (1.2)) の解集合 $\mathcal{S}(0) = \{(v(\cdot, d), d) \mid 0 < d < 4/\pi^2\}$ は $\mathcal{S}(\mu)$ の部分集合である. より詳しく, $\mathcal{S}(\mu)$ に含まれる奇関数の集合が $\mathcal{S}(0)$ である. 以下では $\mathcal{S}(0)$ 上に奇関数の意味の対称性を破壊する分岐点が存在し, そこから $\mathcal{S}(\mu)$ の奇関数でない解の枝が分岐することを証明する. そのためには, (1.1) の奇関数な解に対応する $\mathcal{S}(0)$ の要素の陽的な表示式が必要となる:

補題 3.2. $\mathcal{S}(0)$ は次のように $0 < k < 1$ でパラメータ表示される曲線をなす:

$$\mathcal{S}(0) = \{(v(\cdot, d(k)), d(k)) \mid 0 = d(1) < d(k) < d(0) = 4/\pi^2\}.$$

ただし,

$$\begin{cases} v(x, d(k)) = \sqrt{\frac{2}{1+k^2}} k \operatorname{sn}(K(k)x, k), & 0 < k < 1, \\ d(k) = \frac{1}{(1+k^2)K(k)^2} \left(d(0) = \frac{4}{\pi^2} \searrow d(1) = 0 \right) \end{cases} \quad (3.7)$$

であって, $K(k)$ および $\operatorname{sn}(X, k)$ は次で定義される第1種完全楕円積分および Jacobi の楕円関数である:

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad X = \int_0^{\operatorname{sn}(X, k)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Proof. 求積による下記の手法はよく知られている. (1.2) より $(v(\cdot, d), d) \in S(0)$ は $-dv'' = v(1 - v^2)$ をみたすから, 両辺に v' をかけると保存則

$$\frac{d}{dx} \left\{ d \frac{(v')^2}{2} + \frac{v^2}{2} - \frac{v^4}{4} \right\} = 0$$

を得る. まずは $v(1) = \alpha > 0$ をパラメーターに設定して, 保存則で $x = 1$ とすると,

$$dv'(x)^2 = \alpha^2 - v(x)^2 - \frac{1}{2} \{ \alpha^4 - v(x)^4 \} \quad (3.8)$$

が得られる. ここで, $v_x > 0$ より逆関数定理から,

$$\frac{x}{\sqrt{d}} = \int_0^v \frac{ds}{\sqrt{(\alpha^2 - s^2) \left\{ 1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + s^2) \right\}}} \quad (3.9)$$

が分かる. 変数変換 $s = \alpha t$ を施すと,

$$\frac{x}{\sqrt{d}} = \sqrt{\frac{2}{2 - \alpha^2}} \int_0^{v/\alpha} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2) \left\{ 1 - \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2 - \alpha^2}} \right)^2 t^2 \right\}}}$$

と表される. とくに $x = 1$ を代入すると, $v(1) = \alpha$ だから,

$$\frac{1}{\sqrt{d}} = \sqrt{\frac{2}{2 - \alpha^2}} K \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2 - \alpha^2}} \right). \quad (3.10)$$

よって, (3.9) と (3.10) より,

$$K \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2 - \alpha^2}} \right) x = \int_0^{v/\alpha} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2) \left\{ 1 - \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2 - \alpha^2}} \right)^2 t^2 \right\}}}$$

すなわち,

$$\frac{v}{\alpha} = \operatorname{sn} \left(K \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2 - \alpha^2}} \right) x, \frac{\alpha}{\sqrt{2 - \alpha^2}} \right)$$

を得る. そして,

$$k = \frac{\alpha}{\sqrt{2 - \alpha^2}} \quad (3.11)$$

によって, パラメーターを α から k に変えると (3.7) を得る. \square

(1.3) では $0 < d < 4/\pi^2$ をパラメーターとして $S(0)$ を与えていたが、補題 3.2 では、(3.7) によって、母数とよばれる新たなパラメーター $0 < k < 1$ によって $S(0)$ の曲線表示が得られている。ここで、 $d(k)$ は k の単調減少関数なので、 $k \downarrow 0$ が自明解からの分岐点、 $k \uparrow 1$ が特異極限 $d \downarrow 0$ に対応している。さらに、(3.7) の表示式より、

$$\lim_{k \downarrow 0} v(x, d(k)) = 0 \quad (\bar{I} \text{ 上で一様}),$$

および、

$$\lim_{k \uparrow 1} v(x, d(k)) = \begin{cases} -1 & (-1 \leq x < 0), \\ 0 & (x = 0), \\ 1 & (0 < x \leq 1) \end{cases}$$

が確かめられる。

以上の準備から、Krasnoselskii の分岐定理 ([3], [6, 第 I 部, 定理 6.8]) の枠組みで、 $S(0)$ 上に (1.1) の奇関数でない解の枝の分岐点を探す。そのために、(1.1) で $S(0)$ 上の解 $(v(\cdot, d(k)), d(k))$ からの摂動を未知関数とする変数変換 $\phi := u - v$ を導入する。若干の計算で (1.1) は

$$\begin{cases} d\phi'' + (1 - 3v^2)\phi - \frac{\mu}{2}(1 - v^2) \int_{-1}^1 \phi \, dx - (\phi + 3v)\phi^2 + \frac{\mu}{2}(\phi + 2v)\phi \int_{-1}^1 \phi \, dx = 0, \\ \phi'(-1) = \phi'(1) = 0 \end{cases} \quad x \in I, \quad (3.12)$$

に帰着される。この境界値問題は、任意正数 m を用いて、

$$\phi = \left(-d \frac{d^2}{dx^2} + m \right)^{-1} \left[(m + 1 - 3v^2)\phi - \frac{\mu}{2}(1 - v^2) \int_{-1}^1 \phi \, dx - (\phi + 3v)\phi^2 + \frac{\mu}{2}(\phi + 2v)\phi \int_{-1}^1 \phi \, dx \right] \quad (3.13)$$

と表される。ただし、 $(v, d) = (v(\cdot, d(k)), d(k)) \in S(0)$ であって、右辺の作用素 $(-d \frac{d^2}{dx^2} + m)^{-1}$ は、線形 2 階常微分方程式の Neumann 境界値問題

$$-d\phi'' + m\phi = g(x), \quad x \in I, \quad \phi'(-1) = \phi'(1) = 0$$

の Green 作用素である。ここで、 $0 < k < 1$ をパラメーター、 $E = C^1(\bar{I})$ を基礎空間として、(3.13) の右辺の線形部分に対応する作用素 $L(k) : E \rightarrow E$ を

$$L(k)\phi := \left(-d \frac{d^2}{dx^2} + m \right)^{-1} \left[(m + 1 - 3v^2)\phi - \frac{\mu}{2}(1 - v^2) \int_{-1}^1 \phi \, dx \right] \quad (3.14)$$

とし、非線形部分に対応する作用素 $H(k) : E \rightarrow E$ を

$$H(k)\phi := \left(-d\frac{d^2}{dx^2} + m\right)^{-1} \left[-(\phi + 3v)\phi^2 + \frac{\mu}{2}(\phi + 2v)\phi \int_{-1}^1 \phi dx\right] \quad (3.15)$$

とする。ただし、 (v, d) は (3.7) の $(v(\cdot, d(k)), d(k)) \in \mathcal{S}(0)$ であった。このとき、 $L(k)$ と $H(k)$ はともにコンパクト作用素であって、 $H(k)$ は $0 < k < 1$ に関して広義一様に

$$H(k)\phi = o(\|\phi\|_E) \quad (\|\phi\|_E \rightarrow 0) \quad (3.16)$$

をみたす。このとき、(3.13) は

$$\phi = (L(k) + H(k))\phi \quad (3.17)$$

と表される。

定理 3.3. 任意の $0 < \mu < 1$ に対して、 $0 < k^* < 1$ が存在して、 $\mathcal{S}(\mu)$ の奇関数でない解の枝が $(v(\cdot, d(k^*)), d(k^*)) \in \mathcal{S}(0)$ から分岐する。

Proof. (3.17) より、(3.12) の非自明解は作用素 $L(k) + H(k)$ の非自明な不動点に対応する。主要部である線形作用素 $L(k)$ と (3.16) の意味で摂動部である非線形作用素 $H(k)$ がともにコンパクトであることから、Krasnoselskii の分岐定理 ([3], [6, 第 I 部, 定理 6.8]) や Rabinowitz の大域分岐定理 [8, Theorem 1.3] の適用条件をみたす。これらの定理によれば、 $L(k^*)$ が固有値 1 をもち、その代数的多重度が奇数であれば、 $k = k^*$ から (3.17) の非自明解の枝が分岐することが分かる。

そこで、 $L(k)$ の固有値問題

$$L(k)\phi = \lambda\phi \quad (3.18)$$

について考察する。正值な C^1 級関数の集合を

$$P := \{\phi \in E \mid \phi(x) > 0 \ (x \in I)\}$$

とする。補題 3.1 より、あらかじめ $m > 0$ を十分に大きくとっておくと、すべての $0 < k < 1$ に対して $L(k)P \subset P$ が成り立つ。これは Krein-Rutman の定理 (例えば [2, Chapter 1] 参照) が適用できる条件である。Krein-Rutman の定理によれば、 $L(k)$ のスペクトル半径 $r(k)$ に対して、 $\lambda_1(k) = r(k)$ をみたす固有値 $\lambda_1(k)$ が存在し、対応する固有関数は定符号、すなわち最大値ノルムで正規化した正值固有関数を $\Phi_1(\cdot, k)$ と表せば $\Phi_1(\cdot, k) \in P$ である。このとき $\lambda_1(k)$ は単純固有値である。さらに P に属する任意の固有関数に対応する固有値は $\lambda_1(k)$ に限られる。

そこで, (3.18) の固有値が 1 になる $k = k^* \in (0, 1)$ をまず見つける. 次にその固有値 ($= 1$) に対応する固有関数が定符号であって, P に属するものがとれることを示す. すると, 上述の Krein-Rutman の定理より, $\lambda_1(k^*) = r(k^*) = 1$ であって, この固有値は単純である.

とくに $\lambda = 1$ のとき, (3.14) より固有値問題 (3.18) は,

$$\begin{cases} d\phi'' + (1 - 3v^2)\phi - \frac{\mu}{2}(1 - v^2) \int_{-1}^1 \phi dx = 0, & x \in I, \\ \phi'(-1) = \phi'(1) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

と同値である. したがって, 目標は (3.19) の正值解を見つめることである. そこで (3.19) の両辺を

$$\frac{\mu}{2} \int_{-1}^1 \phi dx > 0$$

で割り, 積分条件と Neumann 境界条件を伴う 2 階線形常微分方程式

$$\begin{cases} d\psi'' + (1 - 3v^2)\psi + v^2 - 1 = 0, & x \in I, \\ \psi'(-1) = \psi'(1) = 0, \\ \int_{-1}^1 \psi dx = \frac{2}{\mu} \end{cases} \quad (3.20)$$

に帰着する. ここで, (3.20) で非斉次項 $v^2 - 1$ と積分条件がない場合は, 定常 Allen-Cahn 方程式 (1.2) の線形化方程式に対応する. 若狭 [12] は (1.2) の線形化固有値問題のすべての固有値と固有関数の陽的表示を得ている. ここでは, [12] のアイデアに倣って, (3.20) の非自明解を

$$\psi = p - qv^2 \quad (3.21)$$

の形で探す. (3.21) の両辺を 2 階微分すると,

$$\psi'' = -2q\{(v')^2 + vv''\}.$$

これに (1.2) と (3.8) を代入し整理すると,

$$d\psi'' = q(-2\alpha^2 + \alpha^4 + 4v^2 - 3v^4). \quad (3.22)$$

そこで, (3.21) と (3.22) を (3.20) に代入すると,

$$(3q - 3p + 1)v^2 - \alpha^2(2 - \alpha^2)q + p - 1 = 0$$

となる。これは $x \in \bar{I}$ に関する恒等式だから、(3.11) を使うと、

$$p = \frac{3 + 2k^2 + 3k^4}{3(1 - k^2)^2}, \quad q = \frac{2}{3} \left(\frac{1 + k^2}{1 - k^2} \right)^2$$

が分かる。したがって (3.21) より

$$\psi = \frac{1}{3(1 - k^2)^2} \{ 3 + 2k^2 + 3k^4 - 2(1 + k^2)^2 v^2 \}$$

となるから、 $v(x, d(k))$ の表示式 (3.7) を代入すると、

$$\psi = \frac{1}{3(1 - k^2)^2} \{ 3 + 2k^2 + 3k^4 - 4(1 + k^2) k^2 \operatorname{sn}^2(K(k)x, k) \}$$

を得る。任意の $x \in \bar{I}$ および $0 < k < 1$ に対して $0 \leq \operatorname{sn}^2(K(k)x, k) \leq 1$ だから、

$$\psi \geq \frac{1}{3(1 - k^2)^2} \{ 3 + 2k^2 + 3k^4 - 4(1 + k^2) k^2 \} = \frac{1}{3(1 - k^2)^2} (3 - 2k^2 - k^4) > 0 \quad (3.23)$$

と ψ の正値性も分かる。したがって、積分条件

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{3(1 - k^2)^2} \left\{ 3 + 2k^2 + 3k^4 - 4(1 + k^2) k^2 \int_0^1 \operatorname{sn}^2(K(k)x, k) dx \right\}$$

をみたく $k \in (0, 1)$ を求める問題に帰着される。次の楕円関数の積分公式 ([11] 参照)

$$\int_0^1 \operatorname{sn}^2(K(k)x, k) dx = \frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right)$$

を代入すると、

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{3(1 - k^2)^2} \underbrace{\left\{ -(1 - k^2)(1 + 3k^2) + 4(1 + k^2) \frac{E(k)}{K(k)} \right\}}_{=: h(k)}, \quad 0 < k < 1 \quad (3.24)$$

となる。ただし、 $E(k)$ は第 2 種完全楕円積分

$$E(k) := \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

である。ここで、方程式 (3.24) の右辺の $h(k)$ に対して、

$$\lim_{k \downarrow 0} h(k) = 1 \left(< \frac{1}{\mu} \right), \quad \lim_{k \uparrow 1} h(k) = \infty$$

が容易に確かめられる. よって中間値の定理より, $h(k^*) = 1/\mu$ をみたす $k^* \in (0, 1)$ が存在する. このとき $\psi(x, d(k^*)) > 0$ ($x \in \bar{I}$) は (3.23) で確かめてある. 結局, $L(k^*)$ は固有値 1 をもち, その代数的多重度は 1 であることが示された. したがって, Krasnoselskii の分岐定理 ([3], [6, 第 I 部, 定理 6.8]) や Rabinowitz の大域分岐定理 [8, Theorem 1.3] の適用条件が確かめられて, $k = k^*$ において, (3.17) の非自明解の枝が自明解の枝から分岐することが分かる. これは (3.12) を通じて (1.1) に戻れば, $S(0)$ 上の $(v(\cdot, d(k^*)), d(k^*))$ から $S(\mu)$ の解の枝が分岐することに他ならない.

□

参考文献

- [1] N. Chafee, E. F. Infante, A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type, *Applicable Anal.*, **4** (1974/75), 17–37.
- [2] Y. Du, Order Structure and Topological Methods in Nonlinear Partial Differential Equations, Vol. 1. Maximum principles and applications. Series in Partial Differential Equations and Applications, World Scientific, Hackensack, NJ, 2006.
- [3] M. Krasnoselskii, Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations, Pergamon, Oxford, 1964.
- [4] K. Kuto, T. Mori, T. Tsujikawa, S. Yotsutani, Secondary bifurcation for a nonlocal Allen-Cahn equation, *Journal of Differential Equations*, **263** (2017), 2687–2714
- [5] K. Kuto, T. Mori, T. Tsujikawa, S. Yotsutani, Global solution branches for a nonlocal Allen-Cahn equation, *Journal of Differential Equations*, to appear.
- [6] 増田 久弥 編著, 応用解析ハンドブック, シュプリンガー・ジャパン編集, 丸善出版, 2010.
- [7] T. Mori, K. Kuto, T. Tsujikawa, S. Yotsutani, Exact multiplicity of stationary limiting problem of a cell polarization model, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **36** (2016), 5627–5655.
- [8] P. Rabinowitz, Some global results for nonlinear eigenvalue problems, *J. Funct. Anal.*, **7** (1971), 487–513.
- [9] R. Schaaf, Global solution branches of two-point boundary value problems. Lecture Notes in Mathematics, 1458. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

- [10] J. Smoller, A. Wasserman, Global bifurcation of steady-state solutions, *J. Differential Equations*, **39** (1981), 269–290.
- [11] 四ツ谷 晶二, 村井 実, 楕円関数と仲良くなろう。微分方程式の解の全体像を求めて, 日本評論社, 2013.
- [12] T. Wakasa, Exact eigenvalues and eigenfunctions associated with linearization for Chafee-Infante problem, *Funkcialaj Ekvacioj*, **49** (2006), 321–336.