数理解析研究所講究録 第2085巻 2018年 15-19

可微分 CONVEX INTEGRAND とその DUAL の同時安定性について

西村　尚史
(横浜国立大学)

1. 序

本稿は，Erica Boizan Batista 氏 (Cariri 連邦大学（ブラジル）) と韓　呼和氏（西北農林科技大学（中国)）と筆者との 3 人による国際共同研究である，[3] のアナウンスメントである.

まず，記号や概念を簡潔に準備しておく．本稿において**可微分**とは C^∞ 級のことである．小文字 n で正の整数を表し，$\mathbb{R}_+$ という記号で正の実数からなる集合を表すことにする．写像 inv: $\mathbb{R}^{n+1}-\{\mathbf{0}\}\to\mathbb{R}^{n+1}-\{\mathbf{0}\}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の原点に関する**反転**を表すことにする，すなわち，極座標を使って表すと以下で定義される写像のことである:

$$\mathrm{inv}(\theta, r)=\left(-\theta, \frac{1}{r}\right).$$

$\mathbb{R}^{n+1}$ の単位球面を，通常通り，S^n という記号で表す．また，連続関数 $\gamma: S^n\to\mathbb{R}_+$ に対し, 以下で定義される $\mathbb{R}^{n+1}-\{\mathbf{0}\}$ の部分集合を graph(γ) と表すことにする.

$$\mathrm{graph}(\gamma)=\left\{(\theta,\gamma(\theta))\in\mathbb{R}^{n+1}-\{\mathbf{0}\}\ \mid\ \theta\in S^n\right\}.$$

さらに，inv(graph(γ)) の凸胞の境界を Γ_γ と表すことにする．連続関数 $\gamma: S^n\to\mathbb{R}_+$ は，等式 $\Gamma_\gamma=$inv(graph(γ)) が成立するとき **convex integrand** と呼ばれる ([20]).

定義 1 ([3])**.** Convex integrand $\gamma: S^n\to\mathbb{R}_+$ は，inv(graph(γ)) の凸胞が狭義凸であるとき **strictly convex integrand** と呼ばれる.

二つの関数空間 $C^\infty(S^n,\mathbb{R}_+)$ と $C^\infty_{\mathrm{conv}}(S^n,\mathbb{R}_+)$ を次のように定める.

$$\begin{aligned}C^\infty(S^n,\mathbb{R}_+) &= \{\gamma: S^n\to\mathbb{R}_+\ \ C^\infty\},\\ C^\infty_{\mathrm{conv}}(S^n,\mathbb{R}_+) &= \{\gamma\in C^\infty(S^n,\mathbb{R}_+)\mid \gamma \text{ is a convex integrand}\}.\end{aligned}$$

関数空間 $C^\infty(S^n,\mathbb{R}_+)$ はホイットニー C^∞ 位相による位相空間であり，関数空間 $C^\infty_{\mathrm{conv}}(S^n,\mathbb{R}_+)$ は $C^\infty(S^n,\mathbb{R}_+)$ の部分空間である.

Convex integrand $\gamma\in C^\infty_{\mathrm{conv}}(S^n,\mathbb{R}_+)$ が与えられると, 以下により γ に付随する**ウルフ図形**（$\mathcal{W}_\gamma$ という記号で表すことにする）が定まる.

$$\bigcap_{\theta\in S^n}\left\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\ \middle|\ x\cdot\theta\le\gamma(\theta)\right\},$$

ここに，$x\cdot\theta$ はベクトル空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の二つのベクトル x と θ の標準内積を表している．ウルフ図形の概念は，ウルフの 1901 年の有名な論文 [21] において，平衡状態にある結晶の幾何学的モデルとして導入されている[1]．定義により，任意のウルフ図形

[1]日本語による，物理の立場からウルフ図形をわかりやすく説明してある文献として [17] がある.

はコンパクトであることがわかる．Convex integrand という概念は，ウルフ図形を研究するためにテイラーにより [20] で導入された概念である．

定義 2. 連続関数 $\gamma : S^n \to \mathbb{R}_+$ が convex integrand であるとする．

(1) Convex integrand $\delta : S^n \to \mathbb{R}_+$ は，等式 $\mathrm{inv}(\mathrm{graph}(\delta)) = \partial\mathcal{W}_\gamma$ が成立するとき，γ の **dual convex integrand**（あるいは単に γ の **dual**）と呼ばれる，ここに $\partial\mathcal{W}_\gamma$ は $\mathcal{W}_\gamma$ の境界を表す．

(2) Convex integrand δ に付随するウルフ図形は $\mathcal{W}_\gamma$ の**双対ウルフ図形**と呼ばれ，$\mathcal{D}\mathcal{W}_\gamma$ と表される．

$$\mathcal{D}\mathcal{W}_\gamma = \mathcal{W}_\delta.$$

(1) は convex integrand についての双対性を，(2) はウルフ図形についての双対性を定義しているわけであるが，これら二つの双対概念はどちらも involutive であることを注意しておく．すなわち，δ の dual は γ であり，また，等式 $\mathcal{D}\mathcal{D}\mathcal{W}_\gamma = \mathcal{W}_\gamma$ が成立するのである．詳細については，[3] の Lemma 2.7 をご覧いただきたい．

Convex integrand やそれに付随するウルフ図形の様々な性質は [2, 4, 5, 6] で既にいろいろ調べてあり，それらのサーベイも存在している ([7])．これらの続編である [3] においては，可微分 convex integrand γ とその dual δ とが同時に満たす性質について，安定性に重点を置いて調べたものである．

定義 3. 可微分関数 $\gamma \in C^\infty(S^n, \mathbb{R}_+)$ は，γ の $\mathcal{A}$-同値類が開集合であるとき**安定**[2]と呼ばれる，ここに二つの可微分関数 $\gamma_1, \gamma_2 \in C^\infty(S^n, \mathbb{R}_+)$ が **$\mathcal{A}$-同値**であるとは，可微分な微分同相写像 $h : S^n \to S^n$ と $H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が存在して $\gamma_1 = H \circ \gamma_2 \circ h^{-1}$ が成り立つことである．

“Convex integrand の安定性に拘るのはなぜですか？” などと問われることがある．このような質問に対しては，以下の二つの理由を回答としている．

【理由１】 ウルフ図形は結晶の幾何学的モデルであるが，物理的には，convex integrand は結晶の表面エネルギー密度に相当していることになる．本物の結晶の表面エネルギー密度を正確に観測することはまず不可能であるので,「表面エネルギー密度は近似的な関数で表されている」という理解で済ますしか術がない．他方,『可微分 convex integrand 全体の空間の中で安定な convex integrand からなる部分空間は稠密である』ということがもしも示せるのであれば，安定な convex integrand は近似的な表面エネルギーの望ましい候補になり得る．そして，上記の『』内は [2] で実際に示されているのである．これが一つ目の理由である．

【理由２】 **モース不等式**（[15]）の存在が二つ目の理由である．微分トポロジー的観点から convex integrand を調べようとすると，モース不等式はほとんど不可欠なツールになのである．モース不等式を使うためには，臨界点は非退化でなければならないので，調べる対象を安定な convex integrand に限定したいのである．

上にも書いているように，[2] において『可微分 convex integrand 全体の空間の中で安定な convex integrand からなる部分空間は稠密である』ということを示している．[2] の次のステップとして，“可微分 convex integrand とその dual が同時に安定写像になるのは，いつどのような場合であろうか？” という問題を調べることは自然なように思われる．この問題に答えることが [3] の主要な目的である．

2. 主結果

安定な関数は，定義により，もちろん可微分でなくてはならない．そこで，なにはともあれ，まず次を示しておく必要がある:

[2]安定写像の基本的文献としてはもちろん [9, 10, 11, 12, 13, 14] であるが，これらの日本語による解説として [8] の第 I 部がある．

定理 1 ([3]). $\gamma : S^n \to \mathbb{R}_+$ を可微分 *convex integrand* とし，δ を γ の *dual* とする．すると，δ が可微分であることの必要十分条件は γ が *strictly convex integrand* であることである．

定理 1 より幾分弱い結果は，[1, 16, 19] などにおいて既に得られていたことに注意しておく．また，[4] により，定理 1 の仮定は δ が strictly convex integrand であることを含んでいることにも注意しておく．これらの注意により以下の系が従う．

系 1 ([3]). $\gamma : S^n \to \mathbb{R}_+$ を可微分 *convex integrand* とし，δ を γ の *dual* とする．すると，γ が可微分な *strictly convex integrand* であることの必要十分条件は δ が可微分な *strictly convex integrand* であることである．

関数 $\widehat{\gamma}, \widehat{\delta} : S^n \to \mathbb{R}_+$ をそれぞれ以下で定義する．

$$\widehat{\gamma}(\theta) = \frac{1}{\gamma(-\theta)},\ \widehat{\delta}(\theta) = \frac{1}{\delta(-\theta)} \quad (\forall \theta \in S^n).$$

$\partial \mathcal{DW}_\gamma$（あるいは，$\partial \mathcal{DW}_\delta$）は関数 $\widehat{\gamma}$（あるいは, $\widehat{\delta}$）のグラフであり，γ（あるいは, δ）は $\hat{\gamma}$（あるいは，$\hat{\delta}$）と $\mathcal{A}$-同値である．従って，定理 1 の別の系として以下を得る．

系 2 ([3]). $\gamma : S^n \to \mathbb{R}_+$ を *strictly convex integrand* とし，$\delta : S^n \to \mathbb{R}_+$ を γ の *dual* とする．そのとき，以下は同値である．

(1) *Convex integrand* γ は可微分である．
(2) *Convex integrand* δ は可微分である．
(3) グラフが $\partial \mathcal{W}_\delta = \partial \mathcal{DW}_\gamma$ とピッタリ一致する関数 $\widehat{\gamma}$ は可微分である．
(4) グラフが $\partial \mathcal{W}_\gamma = \partial \mathcal{DW}_\delta$ とピッタリ一致する関数 $\widehat{\delta}$ は可微分である．

どんな convex integrand $\gamma : S^n \to \mathbb{R}_+$ に対しても，それに付随するウルフ図形 $\mathcal{W}_\gamma$ は原点を内点として含む凸体になるのであった．凸体理論においては，原点を内点として含む凸体に対して **dual** と呼ばれる概念がある．すなわち, 凸体理論では, $\mathcal{W}_\gamma$ の dual の概念は以下で与えられる（たとえば，[18] を参照）．

$$\left\{ \left(\theta, \frac{1}{\gamma(\theta)}\right) \,\middle|\, \theta \in S^n \right\}.$$

しかしながら, この意味での dual の概念は,（物理においてはウルフ図形と同様に共通のバックグラウンドのように思える）pedal の概念との関係はあまりないように見える[3]．他方, 本稿で定義している意味での双対ウルフ図形の概念は pedal の概念と密接に関係している．さらに, 中心射影を経由して, $\Phi(\theta) = (\theta, 1/\delta(-\theta))$ で定義される可微分な埋め込み $\Phi : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$ に対する原点をペダルポイントとするペダルは，Φ に対応する球面への埋め込みの球面 dual を使って特徴づけることができ, 球面 dual は特異点論においてはよく知られている概念である（これらについての詳細は，[3] の第 2.3 部分節をご覧いただきたい）．可微分 convex integrand に付随したウルフ図形の研究にはペダルは有用であるので，[3] においては，$\mathcal{W}_\gamma$ の双対ウルフ図形の概念として $\mathcal{DW}_\gamma$ を採用している．

問題 1. γ と δ の同時安定性はいつ起こるのであろうか？

問題 1 に対しては次の結果が得られた．

定理 2 ([3]). $\gamma : S^n \to \mathbb{R}_+$ を可微分な *strictly convex integrand* とし，δ を γ の *dual* とする．そのとき，γ が安定であることの必要十分条件は δ が安定であることである．

---

[3] [17] には pedal の概念も登場している．

系 3 ([3]). $\gamma : S^n \to \mathbb{R}_+$ を可微分な *strictly convex integrand* とし，$\delta : S^n \to \mathbb{R}_+$ を γ の *dual* とする．そのとき，以下の四つは同値である．

(1) *Convex integrand* γ は安定である．
(2) *Convex integrand* δ は安定である．
(3) グラフが $\partial\mathcal{W}_\delta = \partial\mathcal{D}\mathcal{W}_\gamma$ とピッタリ一致するような関数 $\widehat{\gamma}$ は安定である．
(4) グラフが $\partial\mathcal{W}_\gamma = \partial\mathcal{D}\mathcal{W}_\delta$ とピッタリ一致するような関数 $\widehat{\delta}$ は安定である．

問題 2. γ と δ の同時安定性はどのように起こるのであろうか？

問題 2 に対しては次の結果が得られている．

定理 3 ([3]). $\gamma : S^n \to \mathbb{R}_+$ を可微分な *strictly convex integrand* とし，$\delta : S^n \to \mathbb{R}_+$ を γ の *dual* とする．さらに，γ は安定であると仮定する．そのとき，以下が成立する．

(1) 点 $\theta_0 \in S^n$ が γ の非退化臨界点であることの必要十分条件は θ_0 の対蹠点 $-\theta_0 \in S^n$ が δ の非退化臨界点であることである．
(2) 点 $\theta_0 \in S^n$ が γ の非退化臨界点であると仮定する．そのとき，点 θ_0 における γ のモース指数が i であることの必要十分条件は点 $-\theta_0$ における δ のモース指数が $(n-i)$ であることである．ここで，i は 0 以上 n 以下の整数である．

定理 3 から次の系が従うことは明白であろう．

系 4 ([3]). $\gamma : S^n \to \mathbb{R}_+$ を安定な *convex integrand* とし，$\delta : S^n \to \mathbb{R}_+$ を γ の *dual* とする．さらに，θ_0 は S^n の点とし，i は 0 以上 n 以下の整数とする．そのとき，以下の四つは同値である．

(1) 点 $\theta_0 \in S^n$ は，モース指数が i である γ の非退化臨界点である．
(2) 点 $-\theta_0 \in S^n$ は，モース指数が $(n-i)$ である δ の非退化臨界点である．
(3) 点 $-\theta_0 \in S^n$ は，モース指数が $(n-i)$ である $\widetilde{\gamma}$ の非退化臨界点である．
(4) 点 $\theta_0 \in S^n$ は，モース指数が i である $\widetilde{\delta}$ の非退化臨界点である．

References

[1] B. Andrews, *Harnack inequalities for evolving hypersurfaces*, Math. Z., **217** (1994), no. 2, 179–197.

[2] E. B. Batista, H. Han and T. Nishimura, *Stability of* C^∞ *convex integrands*, Kyushu J. Math., **71** (2017), 187–196.

[3] E. B. Batista, H. Han and T. Nishimura: Simultaneous smoothness and simultaneous stability of C^∞ strictly convex integrands and their duals, preprint (available from arXiv:1707.02359 [math.GT]).

[4] H. Han and T. Nishimura, *Strictly convex Wulff shapes and* C^1 *convex integrands*, Proc. Amer. Math. Soc., **145** (2017), 3997–4008.

[5] H. Han and T. Nishimura, *Self-dual Wulff shapes and spherical convex bodies of constant width* $\pi/2$, J. Math. Soc. Japan, **69** (2017), 1475–1484

[6] H. Han and T. Nishimura, *The spherical dual transform is an isometry for spherical Wulff shapes*, to appear in Studia Math. (available from arXiv:1504.02845 [math.MG]).

[7] H. Han and T. Nishimura, *Spherical method for studying Wulff shapes and related topics*, accepted for publication in Proceedings of Singularities in Generic Geometry and its Applications –Kobe-Kyoto 2015 (Valencia IV)–, to be published in a volume of Advanced Studies in Pure Mathematics, The Mathematical Society of Japan.

[8] 福田拓生・西村尚史: 特異点と分岐, 特異点の数理第 2 巻, 共立出版, 2002.

[9] J. Mather, *Stability of* C^∞ *mappings,* I. *The division theorem*, Ann. of Math., **87** (1968), 89–104.

[10] J. Mather, *Stability of* C^∞ *mappings,* II. *Infinitesimal stability implies stability*, Ann. of Math., **89** (1969), 254–291.

[11] J. Mather, *Stability of C^∞ mappings,* III. *Finitely determined map-germs*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **35** (1969), 127–156.
[12] J. Mather, *Stability of C^∞ mappings,* IV. *Classification of stable map-germs by $\mathbb{R}$-algebras*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **37** (1970), 223–248.
[13] J. Mather, *Stability of C^∞-mappings* V. *Transversality*, Adv. in Math., **4** (1970), 301–336.
[14] J. Mather, *Stability of C^∞-mappings* VI. *The nice dimensions*, Lecture Notes in Math., **192** (1971), 207–253.
[15] J. Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematics Studies **51**, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1973.
[16] F. Morgan, *The cone over the Clifford torus in $\mathbb{R}^4$ is F-minimizing*, Math. Ann., **289** (1991), 341–354.
[17] 大川章哉：復刊　結晶成長，応用物理学選書 2，裳華房，2002 年.
[18] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory* 2nd Edition, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **44**, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
[19] H. M. Soner, *Motion of a set by the curvature of its boundary*, J. Differential Equations, **101** (1993), 313–372.
[20] J. E. Taylor, *Crystalline variational problems*, Bull. Amer. Math. Soc., **84** (1978), 568–588.
[21] G. Wulff, *Zur frage der geschwindindigkeit des wachstrums und der auflösung der krystallflachen*, Z. Kristallographine und Mineralogie, **34** (1901), 449–530.