数理解析研究所講究録 第2085巻 2018年 112-117

可微分写像の特異点集合の自己交差について

京都大学 数理解析研究所 清水 達郎

TATSURO SHIMIZU

RESEARCH INSTITUTE FOR MATHEMATICAL SCIENCES,
KYOTO UNIVERSITY

1. はじめに

向きづけられた閉4次元多様体 X から $\mathbb{R}^3$ への安定写像 $f: X\to\mathbb{R}^3$ の特異点集合 $S(f)$ は X の2次元部分多様体となり，その自己交差は X の符号数の3倍に一致することが知られている [2].

X から $\mathbb{R}^4$ への generic な写像 $\widetilde{f}: X\to\mathbb{R}^4$ のあるタイプの特異点の集合

$$\Sigma^2(\widetilde{f})=\{x\in X \mid \mathrm{rk} J_x\widetilde{f}\leq 2\}$$

は X の0次元部分多様体で，向きを込めて数えることができる．この数を $[\Sigma^2(\widetilde{f})]\in\mathbb{Z}$ とする．すると，$[\Sigma^2(\widetilde{f})]$ もまた符号数の3倍に一致することが，コボルディズムを用いた具体例の考察等で示される．よって

$$[S(f)]^2=[\Sigma^2(\widetilde{f})]\in\mathbb{Z}$$

が従う．

本論文では，より一般に閉 n 次元多様体から $\mathbb{R}^p$ への写像 $f: X\to\mathbb{R}^p$ と $\widetilde{f}: X\to\mathbb{R}^{p+k-1}$ を考え，X の特異点集合 $S(f)$ の k 重自己交差が $\widetilde{f}$ のある種の特異点集合 $\Sigma^{p-1}(\widetilde{f})$ と一致するような状況を与える．(定理 4.1)

定理の証明ではホモロジーの交差理論を用いる．一見泥臭いこの証明の利点は，局所化に向いている点である．すなわち X が境界付き多様体の場合に公式を拡張する際に有益と考えられる．実際たとえば境界付き多様体 X が折り目写像を許容する場合には定理の公式はほぼそのまま拡張される (命題 7.1)．この公式は境界となる多様体の不足符号数と密接に関係している．

謝辞：RIMS 共同研究 (公開型)『可微分写像の特異点論の局所的研究と大域的研究』の主催者である山本卓宏先生，福永知則先生に感謝を申し上げます．また，本研究は科研費 (課題番号:15K13437) の助成を受けたものです．

2. 部分多様体の自己交差類

X を向きづけられた閉 n 次元多様体，$A\subset X$ を余次元 d の閉部分多様体とする．$[A]\in H_{n-d}(X;\mathbb{Z}/2)$ を A の基本ホモロジー類 $[A]\in H_{n-d}(A;\mathbb{Z}/2)$ の埋め込み $A\to X$ による像とする．

正の自然数 l に対し，A の l 重自己交差類 $[A]^l$ を以下で定義する：

$$[A]^l=((([A]_{P.D.})^l)_{P.D.}\in H_{l(n-k)}(X;\mathbb{Z}/2).$$

ここで $[A]_{P.D.}$ は $[A]$ の Poincaré 双対を表す．

後の便利のため，ホモロジーの交差理論を用いた解釈を与えておく．$v_1,v_2,\dots,v_l$ を A の法束の切断で，互いに横断的に交わるものとする．ただし $v_1=0$ とする．A の法束を

A の管状近傍と同一視することで，切断の像 $v_i(A)$ を X の部分多様体として実現しておく．切断が互いに横断的に交わっていることから，$v_1(A)=A, v_2(A),\dots,v_l(A)$ は互いに横断的に交わっている．したがってこれらの交差は再び X の部分多様体となり，その基本ホモロジー類は $[A]^l$ を与える：

$$[A]^l=[A\cap v_2(A)\cap\ldots\cap v_l(A)]=[\bigcap_{i=2}^{l}v_i^{-1}(0)].$$

注意 2.1. l が偶数の時には，A が向き付け可能かどうかにかかわらず $[A]^l$ を $\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群の元として定義することができる．交差理論を用いて説明する．各 $x\in\bigcap_i v_i(A)$ に対し，ベクトル空間 T_xA の向き o_x を任意に指定する．X の向きから誘導される T_xX の向きと o_x により T_xX/T_xA の向きがひとつ定まる．これを $o_x^\perp$ とおく．各 i に対し，$v_i:A\to v_i(A)$ の x における微分を d_xv_i とおく．$d_xv_i(o_x)$ は $T_xv_i(A)$ の向きを与える．X の向きから誘導される T_xX の向きと $d_xv_i(o_x)$ により定まる $T_xX/T_xv_i(A)$ の向きを $o_{i,x}^\perp$ とおく．

切断が互いに横断的であることにより $o_x^\perp, o_{2,x}^\perp,\dots,o_{x,l}^\perp$ は $T_xX/T_x(\bigcap_i v_i^{-1}(0))$ の向きを与える．この向きと T_xX の向きから $T_x(\bigcap_i v_i^{-1}(0))$ の向きが定まる．l が偶数であることから，この定め方は o_x の取り方によらない．

以上の Poincaré 双対を用いた解釈は，局所系を用いるとよい．

3. 写像と特異点に関する準備

ひきつづき X を向きづけられた閉 n 次元多様体とする．p,k を，$n\geq p-k$ を満たす自然数とする．C^∞ 写像 $f:X\to\mathbb{R}^p$ に対し特異点集合 $\Sigma^{p-k}(f)\subset X$(Thom-Boardman 特異点集合) を以下で定義する:

$$\Sigma^{p-k}(f)=\{x\in X\mid \mathrm{rk}(J_xf)\leq p-k\}\subset X.$$

f の 1-ジェット拡張を $j^1f:X\to J^1(X,\mathbb{R}^p)$ と書くことにする．

定義 3.1. $f:X\to\mathbb{R}^p$ が generic であるとは，j^1f が $\Sigma^{p-1},\Sigma^{p-2},\ldots\subset J^1(X,\mathbb{R}^p)$ と横断的に交わるときをいう．ここで Σ^{p-i} は階数が $p-i$ の行列をあつめた $J^1(X;\mathbb{R}^p)$ の部分束である．

陰関数定理から f が generic なとき，$\Sigma^{p-k}(f)$ は X の余次元 $k(n-p+k)$ の部分多様体となる．X は一般には向き付け不可能である．

$x\in X$ を C^∞ 写像 $f:X\to\mathbb{R}^p$ の特異点とする．$x\in X$ の周りの x を原点とする適当な局所座標系 $(x_1,\dots,x_n)$ と $f(x)\in\mathbb{R}^p$ の周りの適当な局所座標系を用いて次のように局所表示されるとき，x を折り目特異点と呼ぶ．

$$f(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_{p-1},\sum_{i=p}^{n}\pm x_i^2).$$

ただし最後の複号は任意にとってよい．$f:X\to\mathbb{R}^p$ の任意の特異点が折り目特異点であるとき，f は折り目写像であるという．

4. 主結果

X を連結閉 n 次元多様体とする．多様体 X に対し次の条件 (C_p) を考える．

(C_p) X と cobordant な n 次元多様体 X_0 で，折り目写像 $f_0:X_0\to\mathbb{R}^p$ を許容するものが存在する．

条件 (C_p) が成り立つことを,「X がコボルディズムを法として ($\mathbb{R}^p$ への) 折り目写像を許容する,」ということにする.

定理 4.1. 連結閉 n 次元多様体 X, C^∞ 写像 $f : X \to \mathbb{R}^p$, $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}^{p+k-1}$ と自然数 $k \geq 1$ が以下の条件を満たすとする：

(1) X は条件 (C_p) を満たす,
(2) $f, \widetilde{f}$ は *generic*,
(3) $(n-p+1)k = n$.

このとき,

$$[\Sigma^{p-1}(f)]^k = [\Sigma^{p-1}(\widetilde{f})] \in H_0(X; \mathbb{Z}/2)$$

が成り立つ.

さらに X が向き付け可能で k が偶数の時には $\mathbb{Z}$ 係数ホモロジーの等式が成立する：

$$[\Sigma^{p-1}(f)]^k = [\Sigma^{p-1}(\widetilde{f})] \in H_0(X; \mathbb{Z}).$$

例 4.2. (1) X を向き付けられた連結閉 4 次元多様体とする. [1] の Theorem 1.1 によれば, X の交差形式が (± 1) または $\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と同値でないとき, X は折り目写像を許容する. 任意の 4 次元多様体はコボルディズムによる変形で交差形式を上記以外にできる (たとえば $S^2 \times S^2$ を連結和すればよい) から, X はコボルディズムを法として折り目写像を許容する (条件 (C_3) を満たす). したがって任意の X について,

$$[\Sigma^2(f : X \to \mathbb{R}^3)]^2 = [\Sigma^2(\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}^4)] \in H_0(X; \mathbb{Z})$$

が成り立つ.

(2) X を連結閉 8 次元多様体とする. X がコボルディズムを法として $\mathbb{R}^7$ への折り目写像を許容するならば,

$$[\Sigma^6(f : X \to \mathbb{R}^7)]^4 = [\Sigma^6(\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}^{10})] \in H_0(X; \mathbb{Z}/2)$$

が成り立つ.

5. ひとつの応用

n を自然数とする. 向きづけられた連結閉 $2n$ 次元多様体 X と generic な写像 $f : X \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}^{n+2}$ を考える.

定義 5.1. $d_n(X) = [\Sigma^n(f)]^2 - [\Sigma^n(\widetilde{f})] \in \mathbb{Z} \cong H_0(X; \mathbb{Z})$.

注意 5.2. d_n はコボルディズム不変量であるので[1], $2n$ 次元多様体のコボルディズム群 Ω^{2n} 上で定義される：

$$d_n : \Omega^{2n} \to \mathbb{Z}.$$

定理から, d_n はコボルディズムを法とした折り目写像の存在の障害を与える:

命題 5.3. 向きづけられた $2n$ 次元閉多様体 X が $\mathbb{R}^{n+1}$ への折り目写像を許容するのなら $d_n(X) = 0$ である.

[1]第 6 節の補題 6.1 を参照.

6. 主定理の証明

ここでは $\mathbb{Z}/2$ 係数での主張を示すが，$\mathbb{Z}$ 係数の場合も局所的な向きを考慮して議論すれば同様に示すことができる．

Lemma 6.1. $[\Sigma^{p-1}(f)]^k, [\Sigma^{p-1}(\widetilde{f})] \in H_0(X;\mathbb{Z}/2)$ はそれぞれコボルディズム不変量である．すなわち，コンパクト $n+1$ 次元多様体 W とその境界 ∂W 上の *generic* な写像 $f : \partial W \to \mathbb{R}^p$ $\widetilde{f} : \partial W \to \mathbb{R}^{p+k-1}$ に対して

$$\text{(A) } [\Sigma^{p-1}(f)]^k = 0,$$
$$\text{(B) } [\Sigma^{p-1}(\widetilde{f})] = 0$$

が成り立つ．

Proof. (A) を示す．$F : W \to \mathbb{R}^{p-1} \times [0,\infty)$ を generic な写像であって，∂W のカラー近傍 $\partial W \times [0,1) \subset W$ において

$$f|_{\partial W \times [0,1)} : \partial W \times [0,1) \ni (x,t) \mapsto (f(x),t) \in \mathbb{R}^p \times [0,\infty)$$

を満たすものとする．F は generic であるから，$\Sigma^p(F)$ は余次元 $n+1-(p+1)+1 = n-p+1$ 次元の部分多様体でありその k 重自己交差は 1 次元多様体である．よって

$$0 = \partial[\Sigma^p(F)]^k.$$

F のカラー近傍での仮定より，$\Sigma^p(F) \cap (\partial W \times [0,1)) = \Sigma^{p-1}(f) \times [0,1)$ であるから，

$$0 = \partial[\Sigma^p(F)]^k = [\Sigma^{p-1}(f)]^k.$$

(B) も同様である． □

上の補題と条件 (C_p) より，X が折り目写像を許容する場合に定理を示せばよい．$f : X \to \mathbb{R}^p$ を折り目写像とする．$\pi_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ を第 i 成分への射影とする．$i = 1, \ldots, p$ に対し $f_i = \pi_i \circ f : X \to \mathbb{R}$ が Morse 関数になるように f を適当に摂動しておく．

さらに，Morse 関数 $f_{p+1}, \ldots, f_{p+k-1} : X \to \mathbb{R}$ をとり，必要なら適当に摂動することで

$$\widetilde{f} = (f, f_{p+1}, \ldots, f_{p+k-1}) : X \to \mathbb{R}^{p+k-1}$$

が generic であるようにしておく．

$$f = (f_1, \ldots, f_p) : X \to \mathbb{R}^p,$$

$$\widetilde{f} = (f_1, \ldots, f_{p+k-1}) : X \to \mathbb{R}^{p+k-1}.$$

$x \in X$ に対し $x \in \Sigma^{p-1}(f)$ であることと $\mathrm{rk} J_x f \leq p-1$ であることは同値である．さらに f が折り目写像であることから $\mathrm{rk} J_x f \geq p-1$ であるから，

$$x \in \Sigma^{p-1}(f) \Leftrightarrow \mathrm{rk} J_x f = p-1.$$

X に Riemann 計量をひとつ固定する．$\mathrm{grad}_x f_i$ を関数 $f_i : X \to \mathbb{R}$ のこの計量に関する勾配ベクトル場とする．$\mathrm{grad}_x f_1, \ldots, \mathrm{grad}_x f_p \in T_x X$ が張るベクトル空間を

$$\mathcal{J}_x f = \langle \mathrm{grad}_x f_1, \ldots, \mathrm{grad}_x f_p \rangle \subset T_x X$$

とおく．適当な局所座標系の下で，$J_x f$ は $\mathrm{grad} f_1, \ldots, \mathrm{grad} f_p$ を並べた行列と相似であるから，

$$\mathrm{rk} J_x f = p-1 \Leftrightarrow \dim \mathcal{J}_x f = p-1.$$

Lemma 6.2. X 上の *Riemann* 計量であって，任意の $x \in \Sigma^{p-1}(f)$ に対して

$$T_x\Sigma^{p-1}(f) = \mathcal{J}_x f$$

が成立するものが存在する．

Proof. $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ を $f_0(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{p-1}, \sum_{i=p}^n \pm x_i^2)$ で定める．$\mathbb{R}^n$,$\mathbb{R}^p$ に標準計量をいれたとき，$T_x\Sigma^{p-1}(f_0) = \mathcal{J}_x f_0$ が任意の $x \in \Sigma^{p-1}(f_0)$ について成立している．折り目写像は局所的に f_0 で表されるので，その局所座標によって標準計量を引き戻すことで局所的に $T_x\Sigma^{p-1}(f) = \mathcal{J}_x f$ が成立する．この計量を 1 の分割で貼り合わせればよい． □

あらためて補題の計量をとり固定する．この計量の元，$x \in X$ が $x \in \Sigma^{p-1}(\widetilde{f})$ となる条件を考察する．さきほどと同様に

$$x \in \Sigma^{p-1}(\widetilde{f}) \Leftrightarrow \dim\langle \mathrm{grad}_x f_1, \ldots, \mathrm{grad}_x f_{p+k-1}\rangle \le p-1.$$

である．ところで $\widetilde{f} = (f_1, \ldots, f_p, \ldots, f_{p+k-1})$ であったから，

$$\langle \mathrm{grad}_x f_1, \ldots, \mathrm{grad}_x f_{p+k-1}\rangle = \mathcal{J}_x f + \langle \mathrm{grad}_x f_{p+1}, \ldots, \mathrm{grad}_x f_{p+k-1}\rangle$$

である．$\mathcal{J}_x f$ の次元は少なくとも $p-1$ あるので，$\dim\langle \mathrm{grad}_x f_1, \ldots, \mathrm{grad}_x f_{p+k-1}\rangle \le p-1$ となるためには $x \in \Sigma^{p-1}(f)$ かつ $\mathrm{grad}_x f_{p+1}, \ldots, \mathrm{grad}_x f_{p+k-1} \in \mathcal{J}_x f$ となることが必要十分である．我々の選んだ計量のもと，$T_x\Sigma^{p-1}(f) = \mathcal{J}_x f$ であったから，以上をまとめて次を得る：

$$x \in \Sigma^{p-1}(\widetilde{f}) \Leftrightarrow (x \in \Sigma^{p-1}(f) \ \wedge \ \mathrm{grad}_x f_{p+1}, \ldots, \mathrm{grad}_x f_{p+k-1} \in T_x\Sigma^{p-1}(f)).$$

$i = p+1, \ldots, p+k-1$ と $x \in \Sigma^{p-1}(f)$ に対し，射影 $T_xX \to T_xX/T_x\Sigma^{p-1}(f)$ による $\mathrm{grad}_x f_i$ の像を $h_\imath(x)$ とおく．$\mathrm{grad}_x f_i \in T_x\Sigma^{p-1}(f)$ と $h_\imath(x) = 0$ は同値であるから，

$$x \in \Sigma^{p-1}(\widetilde{f}) \Leftrightarrow (x \in \Sigma^{p-1}(f) \ \wedge \ h_{p+1}(x) = \cdots = h_{p+k-1}(x) = 0).$$

すなわち

$$\Sigma^{p-1}(\widetilde{f}) = \bigcap_{\imath=p+1}^{p+k-1} h_i^{-1}(0).$$

必要なら $f_{p+1}, \ldots, f_{p+k-1}$ を摂動して，$0, h_{p+1}, \ldots, h_{p+k-1}$ が互いに横断的であるようにしてよい．ここで 0 は零切断である．このとき

$$\Sigma^{p-1}(f), h_{p+1}(\Sigma^{p-1}(f)), \ldots, h_{p+k-1}(\Sigma^{p-1}(f))$$

は横断的に交わり，交差

$$\Sigma^{p-1}(f) \cap (\bigcap_{i=p+1}^{p+k-1} h_i(\Sigma^{p-1}(f)))$$

は $[\Sigma^{p-1}]^k$ を代表する．交差 $\Sigma^{p-1}(f) \cap (\bigcap_{i=p+1}^{p+k-1} h_i(\Sigma^{p-1}(f)))$ はすなわち $\bigcap_{i=p+1}^{p+k-1} h_i^{-1}(0)$ であるから，

$$[\Sigma^{p-1}(f)]^k = [\Sigma^{p-1}(\widetilde{f})]$$

が示された．

7. 境界付き多様体の場合

上の章で述べた定理の証明は，ホモロジー類の一致よりももう少し詳しく，交差 $\Sigma^{p-1}(f)^k$ と $\Sigma^{p-1}(\widetilde{f})$ が 0 次元多様体のレベルで一致していることを示唆している．この点を丁寧に観察することで，境界付き多様体に対して定理を拡張することができる．ここでは X が向きづけられた境界付き 4 次元多様体の場合にその概要を述べる．

X を向きづけられた連結コンパクト 4 次元多様体とする．A を X にプロパーに埋め込まれた 2 次元部分多様体 A とする．A の法束の切断 s で 0 切断と横断的であり，$\partial A = \partial X \cap A$ 上では 0 にならないもの (A の framing と呼ぶことにする) をとると，A と $s(A)$ は横断的に交わるから，交差数

$$A \cap s(A)$$

が定義される．この，A の framing s による自己交差数を

$$[A, s]^2 \in \mathbb{Z}$$

と書くことにする．

引き続き X を向きづけられた連結コンパクト 4 次元多様体とする．Riemann 計量をひとつ固定しておく．$f : X \to \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$ を折り目写像であって X の境界 $Y = \partial X$ のカラー近傍 $Y \times [0, 1) \subset X$ 上で

$$f|_{Y \times [0,1)}(y, t) = (f(y, 0), t)$$

を満たすものとする．また，$h : X \to \mathbb{R}$ を Morse 関数で $\widetilde{f} = (f, h) : X \to \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ が generic 写像になるものとする．

$\Sigma^2(f) \subset X$ は X の境界付き 2 次元多様体で境界付近で，

$$\Sigma^2(f) \cap (Y \times [0, 1)) = \Sigma^1(f|_Y) \times [0, 1)$$

を満たしている．ベクトル場 $\mathrm{grad} h$ の $\Sigma^2(f)$ への制限 $\mathrm{grad} h|_{\Sigma^2(f)}$ を $\Sigma^2(f)$ の法方向に射影したベクトル場を v_h と書くことにする：

$$v_h(x) = (T_x X \to T_x X / T_x \Sigma^2(f))_* \mathrm{grad}_x h, \ x \in \Sigma^2(f).$$

v_h は $\Sigma^2(f)$ の framing を与えている．前章の主定理の証明の議論を境界付き多様体に適用することで，以下が従う．

命題 7.1. $[\Sigma^2(f), v_h]^2 = [\Sigma^2(\widetilde{f})] \in \mathbb{Z}$.

References

[1] O. Saeki, Fold maps on 4-manifolds, Comment. Math. Helv. 78 (2003), 627-647.

[2] T. Ohmoto, O Saeki, and K. Sakuma, Self-intersection class for singularities and its application to fold maps, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), 3825-3838.

京都大学 数理解析研究所

E-mail address: shimizu@kurims.kyoto-u.ac.jp