数理解析研究所講究録 第2085巻 2018年 118-125

Wavefronts corresponding to the envelope of a family of horocycles

東京工業大学理学院数学系　青砥 禎彦
AOTO Yosihiko
Department of Mathematics
Tokyo Institute of Technology

1 序

c を平面曲線とする．$\alpha \in \mathbb{R}$ を 1 つ取り固定する．曲線 c 上の各点において，接線との成す角が α となるように直線をひく．ただし角度は反時計回りを正とする．この直線族の包絡線を **evolutoid** とよぶ ([6], [11] 参照)．とくに $\alpha = \pi/2$ のときは c の縮閉線と一致する．

ポワンカレ円板において境界の円周に接する円をホロ円とよぶ．泉屋-裴-佐野 [7] はホロ円を直線とみなす幾何学を展開した．このようにして得られる幾何学を**ホロ円的幾何学**とよぶ．γ を双曲面上の曲線とする．$\alpha \in \mathbb{R}$ を 1 つ取り固定する．曲線 γ 上の各点において，接線との成す角が α となるようにホロ円を描く．このホロ円の族の包絡線を **horocyclic evolutoid** とよぶ ([1] 参照)．

距離 d における γ の平行曲線を γ_d で表わす．距離 d を動かすと γ_d の特異点の軌跡は縮閉線となる．Giblin と Warder は，与えられた角度 α に対して，特異点の軌跡が evolutoid となるような wavefront を対応させた．とくに $\alpha = \pi/2$ のときは通常の平行曲線となる ([5], §6 参照)．

本稿では，与えられた角度 α に対して，特異点の軌跡が horocyclic evolutoid となるような wavefront を対応させる．この wavefront は一般にはポワンカレ円板の境界に達しそこで特異点をもつ．本概説は，この wavefront の幾何学的性質を特異点論の手法を用いて調べるものである．

2　ホロ円的幾何学

ポワンカレ円板において境界の円周に接する円をホロ円という．ホロ円を直線とみなす幾何学を**ホロ円的幾何学**とよぶ ([7] 参照)．相異なる 2 点を通るホロ円はちょうど 2 つあるので，ホロ円的幾何学は結合公理を満たさない．

$\mathbb{R}^3$ 上の擬内積を

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{に対し}$$
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

によって定める．3 次元ミンコフスキー空間 $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ を $\mathbb{R}^3_1$ で表す．

$D := \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ とおく．双曲面 $H^2_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3_1 \,|\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1,\ x_1 \geq 1\}$ を微分同相写像 $\Pi : H^2_+ \to D,\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2/x_1, x_3/x_1)$ により円板 D と同一視する．

次に $\mathbb{R}^3_1$ 上の擬外積を

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{に対し}$$
$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \left(-\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

によって定める．

以下では I によって開区間を表すものとする．

$\gamma : I \to H^2_+$ を単位速度曲線とする．γ の測地的曲率を $\kappa_g(s)$ で表す．$\kappa_g(s)$ は

$$\kappa_g(s) = |\gamma(s), \gamma'(s), \gamma''(s)|$$

で与えられる．単位接線ベクトル $\gamma'(s)$ を $\mathbf{t}(s)$ で表す．またベクトル $\mathbf{e}(s)$ を $\mathbf{e}(s) := \gamma(s) \wedge \mathbf{t}(s)$ によって定める．このとき $\{\gamma(s), \mathbf{t}(s), \mathbf{e}(s)\}$ は γ に沿う $\mathbb{R}^3_1$ の擬正規直交枠をなす．擬正規直交枠 $\{\gamma(s), \mathbf{t}(s), \mathbf{e}(s)\}$ に対して次の Frenet-Serret 型の公式

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \gamma'(s) & = & \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{t}'(s) & = & \gamma(s) + \kappa_g(s)\mathbf{e}(s) \\ \mathbf{e}'(s) & = & -\kappa_g(s)\mathbf{t}(s) \end{array} \right.$$

が成り立つ．$\alpha \in \mathbb{R}$ を 1 つ取り固定する．このとき

$$\mathbf{a}_{1,\alpha}(s) := \mathbf{t}(s)\cos\alpha + \mathbf{e}(s)\sin\alpha, \quad \mathbf{a}_{2,\alpha}(s) := -\mathbf{t}(s)\sin\alpha + \mathbf{e}(s)\cos\alpha$$

とおけば $\{\gamma(s), \mathbf{a}_{1,\alpha}(s), \mathbf{a}_{2,\alpha}(s)\}$ は γ に沿う $\mathbb{R}^3_1$ の擬正規直交枠となる．

各 $s \in I$ に対して，点 $\gamma(s)$ を通りその点において曲線 γ と角度 α をなすようなホロ円を $\Gamma_\alpha(s)$ で表す．ホロ円の族 $\{\Gamma_\alpha(s)\}_{s\in I}$ の包絡線を **horocyclic evolutoid** とよぶ ([1] 参照)．γ の horocyclic evolutoid を g_α で表す．

3 Wavefronts

$\gamma : I \to H^2_+$ を単位速度曲線とする．$\alpha \in \mathbb{R}$ を 1 つ取り固定する．まず以下の条件をみたす曲線 $\tilde{P} : I \to H^2_+$ を見つける．

(1) 関数 $\varphi : I \to \mathbb{R}$ が存在して，各 $s \in I$ に対して

$$\tilde{P}(s) = \gamma(s) + \varphi(s)\mathbf{a}_{1,\alpha}(s) + \frac{\varphi(s)^2}{2}(\gamma(s) + \mathbf{a}_{2,\alpha}(s))$$

が成り立つ．

(2) 各 $s \in I$ に対して

$$\langle \tilde{P}'(s), \mathbf{a}_{1,\alpha}(s) + \varphi(s)(\gamma(s) + \mathbf{a}_{2,\alpha}(s))\rangle = 0$$

が成り立つ．

上記の 2 条件から微分方程式

$$\varphi'(s) = \frac{1}{2}(\cos\alpha - \kappa_g(s))\varphi(s)^2 + \varphi(s)\sin\alpha - \cos\alpha$$

を得る．この微分方程式の解は一般には爆発する．そこでこの微分方程式を $\mathbb{R}P^1$ 上で考える．$\sigma \in I$ を 1 つ取り固定する．各 $r \in \mathbb{R}$ に対して (σ, r) を通るこの微分方程式の解を $\varphi_r : I \to \mathbb{R}P^1$ で表す．以後，$\mathbb{R}P^1$ の局所座標を用いて $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}P^1$ とみなす．$r \in \mathbb{R}$ とする．$s_0 \in I$ を $\varphi_r(s_0) \in \mathbb{R}$ なる点とすると曲線 $\tilde{P}_r : (I, s_0) \to H^2_+$ を

$$\tilde{P}_r(s) := \gamma(s) + \varphi_r(s)\mathbf{a}_{1,\alpha}(s) + \frac{\varphi_r(s)^2}{2}(\gamma(s) + \mathbf{a}_{2,\alpha}(s))$$

によって定義することができる．そこで曲線 $P_r : I \to \bar{D}$ を

$$P_r(s) := \begin{cases} \mathit{\Pi} \circ \tilde{P}_r(s) & \varphi_r(s) \in \mathbb{R} \\ \left(\dfrac{\gamma_2(s) + (\mathbf{a}_{2,\alpha})_2(s)}{\gamma_1(s) + (\mathbf{a}_{2,\alpha})_1(s)}, \dfrac{\gamma_3(s) + (\mathbf{a}_{2,\alpha})_3(s)}{\gamma_1(s) + (\mathbf{a}_{2,\alpha})_1(s)}\right) & \varphi_r(s) = \infty \end{cases}$$

で定義する．

P_r を horocyclic evolutoid g_α に対応する **wavefront** とよぶ．とくに $\alpha = \pm\pi/2$ のとき P_r をホロ円的平行曲線とよぶ．

注意. $r \in \mathbb{R}$ を十分大きくとれば P_r は必ず境界 ∂D に到達する ([4] 参照).

命題 3.1. $s_0 \in I$ を $P_r(s_0) \in D$ かつ $\cos\alpha \neq \kappa_g(s_0)$ をみたす点とする．このとき曲線 $\tilde{P}_r$ が点 $s = s_0$ において特異点をもつための必要十分条件は $\tilde{P}_r(s_0) = g_\alpha(s_0)$ が成り立つことである．

4 Wavefront の特異点

本節では，前節で定義した wavefront の特異点について考察する．

$\gamma : I \to H^2_+$ を単位速度曲線とする．$\alpha,\ r \in \mathbb{R}$ をそれぞれ 1 つずつ取り固定する．次に

$$\delta_\alpha(s) := 2\kappa_g'(s)\sin\alpha - 2\kappa_g^2(s)\cos\alpha + \left(3\cos^2\alpha + 1\right)\kappa_g(s) - \cos^3\alpha - \cos\alpha$$

と定義する．

注意. もし $\cos\alpha \neq \kappa_g(s)$ ならば [3, p. 60] において定義された不変量 $\delta[0]_1$ および $\delta[0]_2$ について

$$\delta[0]_1(s) = 0 \Longleftrightarrow \delta_\alpha(s) = 0,$$
$$\delta[0]_2(s) = 0 \Longleftrightarrow \delta_\alpha'(s) = 0$$

が成り立つ．

(I) $P_r(s_0) \in D$

$s_0 \in I$ を $P_r(s_0) \in D$ なる点とする．

$$\lambda_r(s) := \kappa_g(s)\varphi_r(s) - \varphi_r(s)\cos\alpha - \sin\alpha$$

とおく．このとき曲線 P_r が点 $s = s_0$ において特異点をもつための必要十分条件は $\lambda_r(s_0) = 0$ が成り立つことである．

[9, Proposition 1.22, Theorem 1.23, Proposition 4.9] により以下の定理を得る．

定理 4.1. 曲線 P_r は点 $s = s_0$ において特異点をもつものとする．このとき

(A) $\cos\alpha \neq \kappa_g(s_0)$.

(1) P_r が s_0 において 3/2 カスプをもつための必要十分条件は $\delta_\alpha(s_0) \neq 0$ が成り立つことである．

(2) P_r が s_0 において 4/3 カスプをもつための必要十分条件は $\delta_\alpha(s_0)=0$ かつ $\delta'_\alpha(s_0)\neq 0$ が成り立つことである．

(B) $\cos\alpha=\kappa_g(s_0)$.

(1) P_r が s_0 において 5/2 カスプをもつための必要十分条件は $\tilde{P}_r(s_0)\neq\gamma(s_0)$ かつ $\kappa'_g(s_0)\neq 0$ が成り立つことである．

(2) $\tilde{P}_r(s_0)=\gamma(s_0)$ とする．このとき P_r が s_0 において曲線 $t\mapsto(t^3,t^5)$ になるための必要十分条件は $\kappa'_g(s_0)\neq 0$ が成り立つことである．

(II) $P_r(s_0)\in\partial D$

定理 4.2. $s_0\in I$ を $P_r(s_0)\in\partial D$ なる点とする．このとき

(1) 曲線 P_r は点 $s=s_0$ において特異点をもつ．

(2) P_r が s_0 において 4/3 カスプをもつための必要十分条件は $\cos\alpha\neq\kappa_g(s_0)$ が成り立つことである．

定理 4.1 および [1, 命題 4.1] により以下の系を得る．

系 4.3. $s_0\in I$ を $P_r(s_0)\in D$ なる点とし $\cos\alpha\neq\kappa_g(s_0)$ とする．このとき

(1) P_r が s_0 において 3/2 カスプをもつとき点 s_0 は g_α の正則点となる．

(2) P_r が s_0 において 4/3 カスプをもつとき g_α は s_0 において 3/2 カスプをもつ．

5 Wavefronts からなる曲面

$\gamma: I\to H^2_+$ を単位速度曲線とする．$\alpha\in\mathbb{R}$ を 1 つ取り固定する．本節では，$r\in\mathbb{R}$ を動かしたときに得られる曲面の特異点について考察する．

曲面 $F: I\times\mathbb{R}\to\bar{D}\times\mathbb{R}$ を $F(s,r):=(P_r(s),r)$ で定義する．$\varphi: I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}P^1$ を $\varphi(s,r):=\varphi_r(s)$ で定義する．

(I) $P_{r_0}(s_0)\in D$

$(s_0,r_0)\in I\times\mathbb{R}$ を $P_{r_0}(s_0)\in D$ なる点とする．このとき曲面 F が点 (s_0,r_0) において特異点をもつための必要十分条件は $\lambda_{r_0}(s_0)=0$ が成り立つことである．

曲面 $\tilde{F}:(I\times\mathbb{R},(s_0,r_0))\to H^2_+\times\mathbb{R}$ を $\tilde{F}(s,r):=(\tilde{P}_r(s),r)$ で定める．包含写像 $H^2_+\hookrightarrow\mathbb{R}^3$ により H^2_+ の接空間を $\mathbb{R}^3$ の部分空間とみなす．$\tilde{F}$ に沿う単位ベク

トル場 ν を

$$\nu(s,r) := \frac{1}{\sqrt{(\partial\varphi/\partial r(s,r))^2+1}}\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,\alpha}(s)+\varphi(s,r)\,(\gamma(s)+\mathbf{a}_{2,\alpha}(s)) \\ -\partial\varphi/\partial r(s,r) \end{pmatrix}$$

によって定める．ν は単位法線ベクトル場を定義するので $\tilde{F}$ はフロンタルである．$\cos\alpha \neq \kappa_g(s_0)$ ならば $\tilde{F} : (I\times\mathbb{R}, (s_0,r_0)) \to H^2_+ \times \mathbb{R}$ は波面芽となる．

[8, Proposition 1.3] により以下の定理を得る．

定理 5.1. 曲面 F は点 (s_0,r_0) において特異点をもつものとする．このとき

(A) $\cos\alpha \neq \kappa_g(s_0)$.

(1) F が (s_0,r_0) においてカスプ辺 $(u,v)\mapsto(u^2,u^3,v)$ になるための必要十分条件は $\delta_\alpha(s_0)\neq 0$ が成り立つことである．

(2) $\partial\varphi/\partial r(s_0,r_0) \neq 0$ とする．このとき F が (s_0,r_0) においてツバメの尾 $(u,v)\mapsto(3u^4+u^2v, 4u^3+2uv, v)$ になるための必要十分条件は $\delta_\alpha(s_0)=0$ かつ $\delta'_\alpha(s_0)\neq 0$ が成り立つことである．

注意. $\partial\varphi/\partial r(s_0,r_0)\neq 0$ ならば点 (s_0,r_0) は非退化である．

(B) $\cos\alpha = \kappa_g(s_0)$.

F が (s_0,r_0) において 5/2 カスプ辺 $(u,v)\mapsto(u^2,u^5,v)$ になるための必要十分条件は点 (s_0,r_0) が非退化になることである．

注意. 点 (s_0,r_0) が非退化であるための必要十分条件は $\kappa'_g(s_0)\neq 0$ かつ $\varphi(s_0,r_0)\neq 0$ が成り立つことである．

(II) $P_{r_0}(s_0)\in\partial D$

定理 5.2. $(s_0,r_0)\in I\times\mathbb{R}$ を $P_{r_0}(s_0)\in\partial D$ なる点とする．このとき F が (s_0,r_0) において曲面 $(u,v)\mapsto(u^3,u^4,v)$ になるための必要十分条件は $\cos\alpha\neq\kappa_g(s_0)$ が成り立つことである．

$(s_0,r_0)\in I\times\mathbb{R}$ を $P_{r_0}(s_0)\in D$ なる点とし，F は点 (s_0,r_0) において特異点をもつとする．さらに $\cos\alpha=\kappa_g(s_0)$ かつ $\tilde{P}_{r_0}(s_0)=\gamma(s_0)$ を仮定する．このとき $\sin\alpha=0$ となり $\kappa_g(s_0)=\pm 1$ を得る．したがって horocyclic evolutoid は曲線 γ とホロ円とからなり $\gamma(s_0)$ を通るホロ円はその点において曲線 γ と接していることがわかる．さらに $\kappa'_g(s_0)\neq 0$ かつ $\partial\varphi/\partial r(s_0,r_0)\neq 0$ を仮定すると，曲線 γ に沿って 3/2 カスプが連なり，$\gamma(s_0)$ を通るホロ円に沿って 5/2 カスプが連なる．そうしてそれぞれの曲線がカスプ辺に

なっている．さらに曲線 P_{r_0} は s_0 において曲線 $t \mapsto (t^3, t^5)$ に $\mathcal{A}$ 同値となる．そこで次の予想をたてる．

予想 5.3. 上記の仮定の下で F は点 (s_0, r_0) において曲面

$$(u, v) \mapsto (u, v^3 + uv^2, 12v^5 + 10uv^4)$$

に $\mathcal{A}$ 同値である ([2], [10] 参照)．

参考文献

1. 青砥 禎彦, *Horocyclic evolutoids*, 京都大学数理解析研究所講究録, **2049** (2017), 109–115.
2. Arnol'd, V. I., *Singularities of systems of rays*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983), 27–49, PWN, Warsaw, 1984.
3. Ashino, T., Ichiwara, H., and Izumiya, S., *Envelopes of slant lines in the hyperbolic plane*, Note Mat. 35 (2015), 51–67.
4. Bahk, S. Y., Dyakevich, N. E., and Johnson, S. C., *Long term behavior of solutions for Riccati initial-value problems*, Electron. J. Differential Equations 2008 (2008), 1–8.
5. Giblin, P. J., and Warder, J. P., *Evolving Evolutoids*, Amer. Math. Monthly 121 (2014), 871–889.
6. Hamann, M., *A note on ovals and their evolutoides*, Beiträge Algebra Geom. 50 (2009), 433–441.
7. Izumiya, S., Pei, D., and Sano, T., *Singularities of hyperbolic Gauss maps*, Proc. London Math. Soc. 86 (2003), 485–512.
8. Kokubo, M., Rossman, W., Saji, K., Umehara, M., and Yamada, K., *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, Pacific J. Math. 221 (2005), 303–351.
9. Porteous, I. R., *Geometric differentiation for the intelligence of curves and surfaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
10. Shcherbak, O. P., *Singularities of families of evolvents in the neighborhood of an inflection point of the curve, and the group H_3 generated by reflections*, Functional Anal. Appl. 17 (1983), 301–303.

11. Wunderlich, W., *Über die Evolutoiden der Ellipse*, Elem. Math. 10 (1955), 37–40.