

Zeta functions of quaternion weighted graphs

法政大学・理工学部 三橋 秀生

Hideo Mitsuhashi

Faculty of Science and Engineering

Hosei University

Abstract

グラフのゼータ関数は、伊原 [6] により定義された伊原ゼータ関数が起源である。伊原ゼータ関数は、 $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$ の捻れのない余コンパクトな離散部分群 Γ から定まるセルバーグゼータ関数の類似であり、母関数型表示と行列式表示を持つことが [6] において示された。その後、Serre [15] により、伊原ゼータ関数は、 $SL(2, \mathbb{Q}_p)$ に付随した Bruhat-Tits tree (無限正則木) の Γ による商グラフ (有限正則グラフ) のゼータ関数であることが示唆され、砂田 [17, 18] によってグラフのゼータ関数が確立された。その後多くの研究者の貢献により、グラフのゼータ関数は大きく発展した。我々は、水野-佐藤が [12] で導入した重み付きグラフのゼータ関数と佐藤が [14] で導入した重み付きゼータ関数の新しいクラス (第 2 種重み付きゼータ関数) について、重みを四元数とした場合のゼータ関数を定義し、それらの四元数行列式 (Study 行列式) 表示や母関数型表示を得た [7, 8]。本稿ではその概要について述べる。本稿の結果は、今野紀雄氏 (横浜国立大学)、佐藤巖氏 (小山工業高等専門学校) との共同研究である。

1 有限グラフの伊原ゼータ関数

$G = (V, E)$ を有限単純連結グラフとし、 $|V| = n$, $|E| = m$ とする。 $uv \in E$ に対し、 u を始点、 v を終点とする有向辺を (u, v) で表し、 $D(G) = \{(u, v), (v, u) \mid uv \in E\}$ とする。このとき $D_G = \{V, D(G)\}$ は symmetric digraph である。 $D(G)$ の元を arc と呼び、さらに $e = (u, v)$ に対し $e^{-1} = (v, u)$ と表すことにする。また、 $u \in V$ に対し、 $d_u = \deg u$ を u の次数とし、 $e = (u, v) \in D(G)$ に対し、 $o(e) = u$, $t(e) = v$ とする。 G における長さ ℓ の path とは、arc の列 $P = (e_1, \dots, e_\ell)$ で $t(e_r) = o(e_{r+1})$ ($r \in \{1, \dots, \ell - 1\}$) を満たすものとし、 $|P| = \ell$ と表す。さらに、 $t(e_\ell) = o(e_1)$ であるような P を cycle と呼ぶ。

cycle $C = (e_1, \dots, e_\ell)$ の s 乗 C^s とは, C と同じ向きに同じ始点から s 周して得られる cycle のこととし, C の backtracking とは $e_{r+1} = e_r^{-1}$ となる部分のこととし, $e_\ell = e_1^{-1}$ であるとき, C は tail をもつという. C は backtracking も tail も持たないとき reduced であるといい, $C = B^s$ ($s > 1$) となる cycle B が存在しないとき prime であるという. 2つの cycles $C_1 = (e_1, \dots, e_\ell)$, $C_2 = (f_1, \dots, f_\ell)$ は, ある整数 k に対し $f_r = e_{r+k}$ ($r \in \{1, \dots, \ell\}$, 添え字は ℓ を法とした剰余類で扱う) が成り立つとき巡回同値であるといい, C の属する同値類を $[C]$ と表す. このとき, G の伊原ゼータ関数 $\mathbf{Z}(G, t)$ は次式で定義される [18]:

$$\mathbf{Z}(G, t) = \prod_{[C]} (1 - t^{|C|})^{-1}. \quad (1)$$

但し, $\prod_{[C]}$ は prime reduced cycles の巡回同値類をわたるものとし, $|t|$ は十分小さい複素数とする. 最初, 伊原ゼータ関数は $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$ の torsion-free, cocompact, discrete な部分群 Γ に対し, Γ の primitive conjugacy classes の個数の数え上げに関連して導入され [6], Serre のグラフ理論的解釈 [15] を経て, 砂田 [17, 18] によりグラフのゼータ関数として定式化された. そして, 伊原ゼータ関数の行列式表示は $SL(2, \mathbb{Q}_p)$ に付随した Bruhat-Tits tree (無限正則木) の Γ による商グラフ (有限正則グラフ) のゼータ関数の行列式表示として理解されるようになった. その後, 半正則 2 部グラフの Ihara ゼータ関数の行列式表示が橋本 [4] により与えられた. G が正則とは限らない一般の場合の伊原ゼータ関数の行列式表示および母関数型表示は次のとおりである.

定理 1 (橋本 [5], Bass[2]).

$$\mathbf{Z}(G, t)^{-1} = \det(\mathbf{I}_{2m} - t(\mathbf{B} - \mathbf{J}_0)) = (1 - t^2)^{m-n} \det(\mathbf{I}_n - t\mathbf{A} + t^2(\mathbf{D} - \mathbf{I}_n)), \quad (2)$$

$$\mathbf{Z}(G, t) = \exp\left(\sum_{s \geq 1} \frac{N_s}{s} t^s\right). \quad (3)$$

ここで $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{uv})_{u,v \in V}$ は隣接行列, $\mathbf{D} = (\mathbf{D}_{uv})_{u,v \in V}$ は次数行列でそれぞれ

$$\mathbf{A}_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{if } (u, v) \in D(G), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \mathbf{D}_{uv} = \delta_{uv} d_u$$

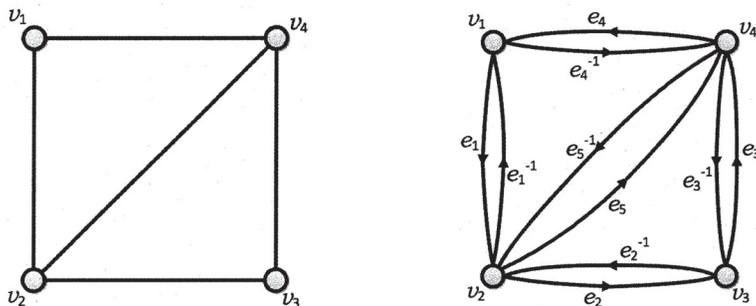
で定義され, $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{ef})_{e,f \in D(G)}$, $\mathbf{J}_0 = (\mathbf{J}_{ef})_{e,f \in D(G)}$ は

$$\mathbf{B}_{ef} = \begin{cases} 1 & \text{if } t(e) = o(f), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \mathbf{J}_{ef} = \delta_{e^{-1}f}$$

で定義される行列である. ここで δ_{uv} や $\delta_{e^{-1}f}$ はディラックのデルタである. また, N_s は D_G における長さ s の reduced cycles の個数を表す.

(2) の右式は G が正則グラフの場合、伊原 [6] で導出された行列式表示と一致する。我々は (2) の中式を橋本型表示と呼び、右式を伊原型表示と呼ぶことにする。また、 $\mathbf{B} - \mathbf{J}_0$ を G の edge matrix という。

例を挙げる。 G を左図に示すグラフとし、 D_G を右図に示す symmetric digraph とする。



このとき、伊原ゼータ関数をその定義により求めれば、以下の無限積が得られる。

$$\mathbf{Z}(G, t) = \frac{1}{(1-t^3)^4(1-t^4)^2(1-t^6)^2 \dots} \quad (4)$$

一方、 $n = |V| = 4$ 、 $m = |E| = 5$ で、 \mathbf{A} と \mathbf{D} はそれぞれ以下で与えられるから、

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

定理 1 の伊原型表示を用いると次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(G, t)^{-1} &= (1-t^2)^{5-4} \det(\mathbf{I}_n - t\mathbf{A} + t^2(\mathbf{D} - \mathbf{I}_n)) \\ &= (1-t^2) \begin{vmatrix} 1+t^2 & -t & 0 & -t \\ -t & 1+2t^2 & -t & -t \\ 0 & -t & 1+t^2 & -t \\ -t & -t & -t & 1+2t^2 \end{vmatrix} \\ &= (1-t)^2(1+t)(1+t^2)(1+t+2t^2)(1-t^2-2t^3). \end{aligned}$$

ゆえに $\mathbf{Z}(G, t)$ は以下の有理式で表される。

$$\mathbf{Z}(G, t) = \frac{1}{(1-t)^2(1+t)(1+t^2)(1+t+2t^2)(1-t^2-2t^3)}.$$

注意 2. ここでは簡単のため G を有限単純連結グラフとしたが, 単純性を仮定せずループや多重辺を許す, より一般的な議論が可能であることを補足しておく. 詳細は [5, 2, 3, 10, 20] を参照してほしい.

2 伊原ゼータ関数の一般化

伊原ゼータ関数の一般化として, ここでは arc 上に重みのついたグラフのゼータ関数を考察する. 重み付きグラフのゼータ関数については, 橋本 [4] が $e, e^{-1} \in D(G)$ が等しい重みをもつ場合の多変数ゼータ関数について考察している. その後, Stark-Terras[16], 水野-佐藤 [12] 等によって一般化が進み発展した. $D(G)$ の元を e_1, e_2, \dots, e_{2m} と表し, 各 $e_r \in D(G)$ に重みと呼ばれる複素数 $w_r = w(e_r)$ を付与する. $2m \times 2m$ 行列 $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_{ef})_{e,f \in D(G)}$ を $\mathbf{U}_{ef} = \delta_{ef} w(e)$ で定める. このとき, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{2m})$ を変数とする G の辺ゼータ関数 $\zeta_G(\mathbf{w})$ は次式で定義される [16]:

$$\zeta_G(\mathbf{w}) = \prod_{[C]} (1 - w(C))^{-1}.$$

但し, $C = (e_{r_1}, \dots, e_{r_\ell})$ に対し $w(C) = w(e_{r_1}) \cdots w(e_{r_\ell}) = w_{r_1} \cdots w_{r_\ell}$ とし, これを C のノルムと呼ぶことにする. 全ての重みを t とすると, 辺ゼータ関数は伊原ゼータ関数に一致することに注意する. 従って, 辺ゼータ関数は伊原ゼータ関数における変数 t の多変数化と考えることができる. Stark and Terras[16] は辺ゼータ関数の edge matrix を用いた次の行列式表示を求めた:

定理 3 (Stark and Terras[16]).

$$\zeta_G(\mathbf{w})^{-1} = \det(\mathbf{I}_{2m} - (\mathbf{B} - \mathbf{J}_0)\mathbf{U}) = \det(\mathbf{I}_{2m} - \mathbf{U}(\mathbf{B} - \mathbf{J}_0)).$$

水野-佐藤は辺ゼータ関数の別形として以下に示す通り, 伊原ゼータ関数のオイラー積表示において C に対応する因子中の $t^{|C|}$ に C のノルムを乗じて (第 1 種) 重み付きゼータ関数 $\mathbf{Z}(G, w, t)$ を定義した [12]:

$$\mathbf{Z}(G, w, t) = \prod_{[C]} (1 - w(C)t^{|C|})^{-1}. \quad (5)$$

$w(e) = 1$ ($\forall e \in D(G)$) ならば, $\mathbf{Z}(G, w, t) = \mathbf{Z}(G, t)$ であるから重み付きゼータ関数 (5) は伊原ゼータ関数 (1) の一般化と見なせる. $n \times n$ 行列 $\mathbf{W} = (\mathbf{W}_{uv})_{u,v \in V}$ を

$$\mathbf{W}_{uv} = \begin{cases} w(u, v) = w(e) & \text{if } (u, v) = e \in D(G), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める． \mathbf{W} を G の重み行列という．このとき，水野-佐藤による重み付きゼータ関数の重み行列を用いた行列式表示に関する結果は次のとおりである：

定理 4 (水野-佐藤 [12]). $w(e^{-1}) = w(e)^{-1}$ であるとき以下の等式が成り立つ：

$$\mathbf{Z}(G, w, t)^{-1} = (1 - t^2)^{m-n} \det(\mathbf{I}_n - t\mathbf{W} + t^2(\mathbf{D} - \mathbf{I}_n)).$$

一般の場合は，渡辺-福水により重み行列や次数行列を修正することで得られた：

定理 5 (渡辺-福水 [21]). $e_{r+m} = e_r^{-1}$ ($r = 1, \dots, m$) となるように番号付けするとき

$$\zeta_G(\mathbf{w})^{-1} = \det(\mathbf{I}_n + \hat{\mathbf{D}} - \hat{\mathbf{W}}) \prod_{r=1}^m (1 - w(e_r)w(e_r^{-1})).$$

但し $\hat{\mathbf{W}} = (\hat{\mathbf{W}}_{uv})_{u,v \in V(G)}$, $\hat{\mathbf{D}} = (\hat{\mathbf{D}}_{uv})_{u,v \in V(G)}$ は以下で定める $n \times n$ 行列である：

$$\hat{\mathbf{W}}_{uv} = \begin{cases} \frac{w(u, v)}{1 - w(u, v)w(v, u)} & \text{if } (u, v) \in D(G), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \hat{\mathbf{D}}_{uv} = \delta_{uv} \sum_{\substack{e \in D(G) \\ o(e)=u}} \frac{w(e)w(e^{-1})}{1 - w(e)w(e^{-1})}.$$

次に佐藤 [14] の第 2 種重み付きゼータ関数について説明する． $2m \times 2m$ 行列 $\mathbf{B}_w = (\mathbf{B}_{ef}^{(w)})_{e, f \in D(G)}$ を次式で定める：

$$\mathbf{B}_{ef}^{(w)} = \begin{cases} w(f) & \text{if } t(e) = o(f), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$\mathbf{B}_w = \mathbf{B}\mathbf{U}$ であることに注意する． $\mathbf{B}_w - \mathbf{J}_0$ を \mathbf{B} に重みの付いた edge matrix という．このとき，第 2 種重み付きゼータ関数 $Z_1(G, w, t)$ を次式で定義する [14]：

$$\mathbf{Z}_1(G, w, t) = \det(\mathbf{I}_{2m} - t(\mathbf{B}_w - \mathbf{J}_0)). \quad (6)$$

全ての $e \in D(G)$ に対し $w(e) = 1$ であるときは， $\mathbf{Z}_1(G, w, t)$ は $\mathbf{Z}(G, t)$ の橋本型行列式表示に一致することに注意する．

注意 6. 正確には，この新しいゼータ関数は [14] において，伊原ゼータ関数の (backtracking を許す cycle に関する) 一般化である Bartholdi ゼータ関数を拡張した次式で定義されている：

$$\mathbf{Z}_1(G, w, u, t) = \det(\mathbf{I}_{2m} - t(\mathbf{B}_w - (1 - u)\mathbf{J}_0))^{-1}.$$

このとき， $\mathbf{Z}_1(G, w, t) = \mathbf{Z}_1(G, w, 0, t)$ であることに注意する．

佐藤による第 2 種重み付きゼータ関数の重み行列を用いた伊原型行列式表示に関する結果は次のとおりである：

定理 7 (佐藤 [14]).

$$\mathbf{Z}_1(G, w, t)^{-1} = (1 - t^2)^{m-n} \det(\mathbf{I}_n - t\mathbf{W} + t^2(\mathbf{D}_w - \mathbf{I}_n)),$$

但し, $\mathbf{D}_w = (\mathbf{D}_{uv}^{(w)})_{u,v \in V(G)}$ は $\mathbf{D}_{uu}^{(w)} = \sum_{e: o(e)=u} w(e)$ で与えられる対角行列とする.

定理 7 は今野-佐藤 [9] において, グラフのゼータ関数とグラフ上の量子ウォークを結びつける役割を果たし, その結果は以降のグラフ上の量子ウォークの発展につながった. 詳細は [9] を参照してほしい.

また, $\tilde{w}(e, f)$ を $\mathbf{B}_w - \mathbf{J}_0$ の (e, f) -成分とすると, $\tilde{w}(e, f)$ は次式で与えられる:

$$\tilde{w}(e, f) = \begin{cases} w(f) - \delta_{e^{-1}f} & \text{if } t(e) = o(f), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Cycle $C = (e_1, \dots, e_\ell)$ に対し, $\tilde{w}(C) = \tilde{w}(e_1, e_2)\tilde{w}(e_2, e_3) \cdots \tilde{w}(e_{\ell-1}, e_\ell)\tilde{w}(e_\ell, e_1)$ とする. このとき, $\mathbf{Z}_1(G, w, t)$ のオイラー積表示は次式で与えられる:

定理 8 (Mizuno and Sato [13]).

$$\mathbf{Z}_1(G, w, t) = \prod_{[C]} (1 - \tilde{w}(C)t^{|C|})^{-1}, \quad (7)$$

ただし, $[C]$ は G の全ての *prime cycles* をわたる.

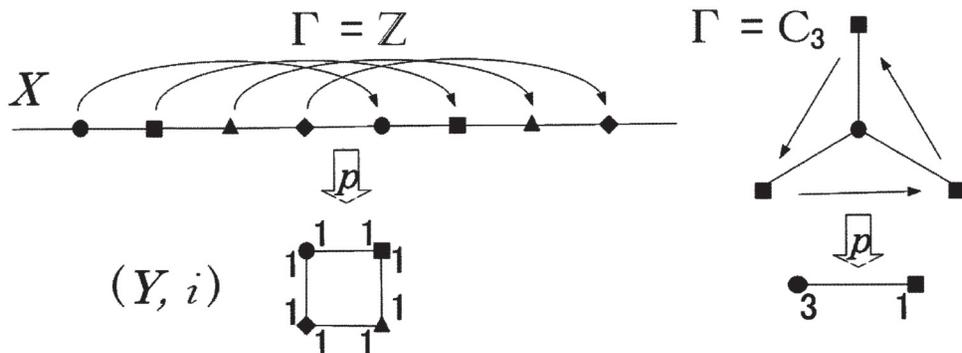
$\mathbf{Z}_1(G, w, t)$ と edge-indexed graph のゼータ関数の関係について触れておく. T を locally finite (possibly infinite) tree とし, Γ を $X = (V(X), \vec{E}(X)) = (V(T), D(T)) = D_T$ に作用する群とする. Γ は uniform tree lattice であるとする. ここで uniform tree lattice とは

- (1) Γ has no inversion ($e^{-1} \notin \Gamma e$ for all $e \in \vec{E}(X)$)
- (2) Γ is discrete ($|\Gamma_u| < \infty$ ($\forall u \in V(X)$), Γ_u は u の固定部分群)
- (3) Γ is uniform (= cocompact) ($\Gamma \backslash X$ is a finite graph)

を満たすことをいう. $Y = (V(Y), \vec{E}(Y)) = \Gamma \backslash X$ を X の Γ による商グラフとし, $p: X \rightarrow Y$ を射影とする. $x \in X$ に対し $y = p(x)$ であるとき, $o(e) = y$ となるような $e \in \vec{E}(Y)$ の index $i(e)$ を次式で定める.

$$i(e) = \left| \{ e' \in \vec{E}(X) \mid o(e') = x, p(e') = e \} \right|$$

$i(e)$ は x の選び方によらずに定まることに注意する. (Y, i) を edge-indexed graph という.



Y が loop をもたないとき, $D_G = Y$ とし $w(e) = i(e)$ ($e \in \vec{E}(Y)$) とすれば $\mathbf{Z}_1(G, i, t)$ は edge-indexed graph (Y, i) のゼータ関数 [2] になる.

3 四元数行列の行列式

本節では四元数を成分に持つ行列 (四元数行列) の行列式 (四元数行列式) について概説する. 四元数行列式を定める試みは, 19 世紀中ごろより多くの数学者により行われており, その詳細については [1] を参照してほしい. ここでは, Study が [19] で与えた四元数行列式 (Study 行列式ということにする) についての要点を述べる. 四元数体 \mathbb{H} は Hamilton が発見した実 4 次元ベクトル空間で, $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ を満たす 3 つの元 i, j, k および 1 が基底を成す. $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}$ に対し, $|q| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ を q のノルムといい, $q^* = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k$ を q の (四元数) 共役という. ここで $(pq)^* = q^*p^*$ ($p, q \in \mathbb{H}$) であることに注意する. 通常の行列式からの類推により, N 次正方四元数行列全体からなる集合 $\text{Mat}(N, \mathbb{H})$ から \mathbb{H} への写像 $d : \text{Mat}(N, \mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{H}$ で次の性質を満たすものをここでは四元数行列式と呼ぶことにする [1]:

(A1) $d(\mathbf{M}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{M}$ は特異行列.

(A2) $d(\mathbf{M}\mathbf{N}) = d(\mathbf{M})d(\mathbf{N})$.

(A3) $d((\mathbf{I}_N + q\mathbf{E}_{rs})\mathbf{M}) = d(\mathbf{M}(\mathbf{I}_N + q\mathbf{E}_{rs})) = d(\mathbf{M})$.

但し, $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in \text{Mat}(N, \mathbb{H})$, \mathbf{I}_N は N 次単位行列, \mathbf{E}_{rs} は行列単位で $r \neq s$, $q \in \mathbb{H}$ とする. 一般に, 四元数行列 $\mathbf{M} \in \text{Mat}(N, \mathbb{H})$ は二つの複素行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}(N, \mathbb{C})$ を用い

て, $\mathbf{M} = \mathbf{A} + j\mathbf{B}$ と一意に表すことができ, $\psi: \text{Mat}(N, \mathbb{H}) \rightarrow \text{Mat}(2N, \mathbb{C})$ を

$$\psi(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\overline{\mathbf{B}} \\ \mathbf{B} & \overline{\mathbf{A}} \end{pmatrix}$$

で定めれば, ψ は単射 \mathbb{R} 代数準同型である ($\overline{\mathbf{A}}$ は \mathbf{A} の全成分を (複素) 共役にして得られる行列). このとき Study 行列式は次式で定義される:

$$\text{Sdet}(\mathbf{M}) = \det(\psi(\mathbf{M})).$$

Sdet は (A1),(A2),(A3) を満たす. また, 定義から Sdet は行や列の入れ替えで不変であることや, $\mathbf{M} \in \text{Mat}(N, \mathbb{C})$ のときは $\text{Sdet}(\mathbf{M}) = |\det(\mathbf{M})|^2$ であることがわかる. さらに, ψ の像は以下で与えられる (\mathbf{O}_N は N 次零行列):

$$\psi(\text{Mat}(N, \mathbb{H})) = \{\mathbf{X} \in \text{Mat}(2N, \mathbb{C}) \mid \mathbf{J}\mathbf{X} = \overline{\mathbf{X}}\mathbf{J}\}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_N & -\mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & \mathbf{O}_N \end{pmatrix}.$$

これより $\det \mathbf{X} = \det \mathbf{J}^{-1} \overline{\mathbf{X}} \mathbf{J} = \det \overline{\mathbf{X}} = \overline{\det \mathbf{X}}$ だから $\det \mathbf{X} \in \mathbb{R}$ が従い, $\text{Sdet}(\mathbf{M}) \in \mathbb{R}$, すなわち Sdet は \mathbb{R} -代数 $\text{Mat}(N, \mathbb{H})$ 上の汎関数である. さらに,

$$GL(N, \mathbb{H}) = \{\mathbf{M} \in \text{Mat}(N, \mathbb{H}) \mid \text{Sdet}(\mathbf{M}) \neq 0\}$$

とすると, $GL(N, \mathbb{H})$ は連結であることから $\text{Sdet}(GL(N, \mathbb{H}))$ も連結となり, $\text{Sdet}(\mathbf{I}_N) = 1$ ゆえ, $\text{Sdet}(GL(N, \mathbb{H})) \subset \mathbb{R}_{>0}$ を得る. これより $\text{Sdet}(\text{Mat}(N, \mathbb{H})) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ が従う. 文献によっては, Sdet の平方根を Study 行列式とするものもあるようなので注意してほしい.

4 Lyndon word

Arc 上の重みが四元数の場合のグラフのゼータ関数を考察する際に留意することは, 四元数体の非可換性である. 重みが非可換だから, 巡回同値な cycle 同士でもノルムは一般には異なる値をとる. そこで我々は, $[C]$ の特別な代表元として Lyndon word をとることで四元数重み付きグラフのゼータ関数を構成した. 本節ではアルファベット上の Lyndon word について解説する. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ を空でない有限全順序集合とする. X をアルファベットとする語 (word) を元とし, 辞書式順序をもつ全順序集合を X^* とする. 空語でない word $\alpha = x_{r_1} x_{r_2} \cdots x_{r_\ell} \in X^*$ は, $\alpha = \beta \beta \cdots \beta$ となる他の word $\beta \in X^*$ を持たず, かつ α を構成するアルファベットを巡回させて得られる word の中で最小であるとき Lyndon word という. X 上の Lyndon word の集合を L_X と表すことにする.

例えば, $X = \{1, 2, 3, 4\}$ を自然な順序集合とすると, 1, 12, 123, 23234 は Lyndon word だが 21, 121, 134134, 13212 は Lyndon word ではない.

以下の定理 (Chen-Fox-Lyndon theorem) が示す通り, 空語でない任意の word は Lyndon word の非増加列で一意にあらわされることが知られている. 詳細については [11] を参照してほしい.

定理 9. *For every $w(\neq \emptyset) \in X^*$, there exists a unique sequence $l_1, \dots, l_r \in L_X$ with $l_1 \geq \dots \geq l_r$ such that $w = l_1 \cdot \dots \cdot l_r$.*

例として, $X = \{1, 2, 3, 4\}$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} 321 &\rightarrow (3)(2)(1), \\ 231 &\rightarrow (23)(1), \\ 414312 &\rightarrow (4)(143)(12), \\ 23412133411321 &\rightarrow (234)(121334)(1132)(1), \end{aligned}$$

などは Lyndon word による分解の例である.

5 四元数重み付きグラフのゼータ関数

本節では四元数重み付きゼータ関数に関する我々の結果を概説する. 2 節における重み $w(e)$ が四元数の場合を考える. まず, $D(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_{2m}\}$ と表し, $[2m] = \{1, 2, \dots, 2m\}$ 上の Lyndon word 全体の集合を $L_{[2m]}$ とする. $\mathbb{H}[[x]]$ を可換不定元 x の \mathbb{H} 係数形式的べき級数環とし, $\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x) \in \mathbb{H}[[x]]$ を以下で定義する [7]:

$$\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x) = \prod_C \left\{ (1 - w(C)x^{|C|})(1 - w(C)x^{|C|})^* \right\}^{-1}. \quad (8)$$

但し, \prod_C は $r_1 \cdot \dots \cdot r_\ell \in L_{[2m]}$ を満たす reduced cycles $C = e_{r_1} \cdot \dots \cdot e_{r_\ell}$ をわたる積で, これは因子 $\{(1 - w(C)x^{|C|})(1 - w(C)x^{|C|})^*\}^{-1}$ の積の順序によらず定まることに注意する. また, $(1 - w(C)x^{|C|})^{-1} = 1 + w(C)x^{|C|} + (w(C)x^{|C|})^2 + \dots$ であり, 共役 $*$ は $x^* = x$ として $\mathbb{H}[[x]]$ 上に自然に拡張する. $(1 - w(C)x^{|C|})(1 - w(C)x^{|C|})^* = 1 - 2\operatorname{Re}(w(C))x^{|C|} + |w(C)|^2 x^{2|C|}$ であることから, 実際には $\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x) \in \mathbb{R}[[x]]$ である. $w(e) = 1$ ($\forall e \in D(G)$) ならば, $\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x) = \mathbf{Z}(G, x)^2$ であるから $\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x)$ は伊原ゼータ関数 (1) の 2 乗の一般化と見なせる. $\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x)$ の四元数行列式表示を与えるため, Sdet を $\mathbb{H}[[x]]$ の元を成分に持つ行列の行列式へ拡張しよう. \mathbb{R} -代数準同型 $\psi: \operatorname{Mat}(N, \mathbb{H}) \rightarrow \operatorname{Mat}(2N, \mathbb{C})$ の $\operatorname{Mat}(N, \mathbb{H}[[x]])$ への拡張 ψ_x を $\psi_x(x) = x$ で定める. また, $\det: \operatorname{Mat}(2N, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ は行列成分の多項式だから成分を形式的べき級数に拡張でき, それを \det_x と表すことにする. このとき $\operatorname{Sdet}_x = \det_x \cdot \psi_x$ で Sdet_x を定義すれ

ば, Sdet_x は $\mathbb{R}[[x]]$ に値をとる. さらに $\mathbf{M} \in \text{Mat}(N, \mathbb{H}[[x]])$ ならば $\text{Sdet}_x(\mathbf{M}) \in \mathbb{R}[[x]]$ が成り立つ. また, Sdet_x を $\text{Mat}(N, \mathbb{H})$ へ制限すれば Sdet に等しいことも明らかであろう. Sdet_x の詳細については [7] を参照してほしい.

我々は次に示す通り, $\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x)$ の母関数型表示と, 2 種類の (拡張された) Study 行列式による表示を決定した.

定理 10 (今野-三橋-佐藤 [7]). (i) 母関数型表示

$$\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x) = \left\{ \exp \left(\sum_{s \geq 1} \sum_C \frac{\text{Re}(w(C)^s)}{s} x^{s|C|} \right) \right\}^2.$$

但し, \sum_C は $r_1 \cdots r_\ell \in L_{[2m]}$ を満たす reduced cycles $C = e_{r_1} \cdots e_{r_\ell}$ をわたる和とする.

(ii) Edge matrix による (拡張された) Study 行列式による表示

$$\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x)^{-1} = \text{Sdet}_x(\mathbf{I}_{2m} - \mathbf{U}(\mathbf{B} - \mathbf{J}_0)x).$$

(iii) (修正された) 重み行列による (拡張された) Study 行列式による表示

$e_{r+m} = e_r^{-1}$ ($r = 1, \dots, m$) となるように番号付けするとき次式が成り立つ:

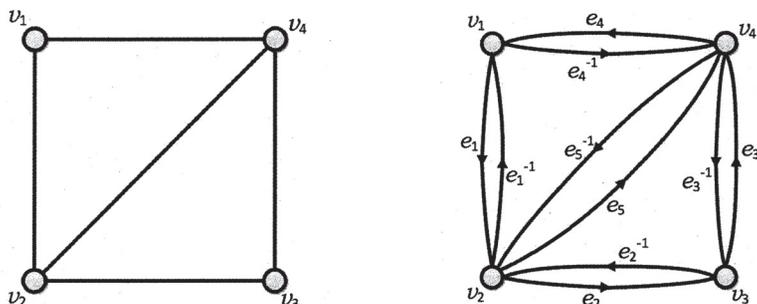
$$\begin{aligned} & \mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x)^{-1} \\ &= \text{Sdet}_x(\mathbf{I}_n - x\tilde{\mathbf{W}} + x^2\tilde{\mathbf{D}}) \prod_{r=1}^m (1 - w(e_r)w(e_r^{-1})x^2)(1 - w(e_r)w(e_r^{-1})x^2)^*. \end{aligned}$$

但し $\tilde{\mathbf{W}} = (\tilde{\mathbf{W}}_{uv})_{u,v \in V(G)}$, $\tilde{\mathbf{D}} = (\tilde{\mathbf{D}}_{uv})_{u,v \in V(G)}$ は以下で定まる $n \times n$ 行列である:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}_{uv} &= \begin{cases} (1 - w(e)w(e^{-1})x^2)^{-1}w(e) & \text{if } e = (u, v) \in D(G), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{uv} &= \delta_{uv} \sum_{\substack{e \in D(G) \\ o(e)=u}} (1 - w(e)w(e^{-1})x^2)^{-1}w(e)w(e^{-1}). \end{aligned}$$

注意 11. Sdet_x は行や列の入れ替え操作で不変である ([7] 参照) から, $\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x)$ は, e_1, e_2, \dots, e_{2m} の添字番号のつけ方によらずに定まる. このことは, 後に説明する第 2 種四元数重み付きゼータ関数についてもいえる.

例として, G, D_G を下図の通りとし, 各 arc 上の四元数重みを次式で与える.



$$\begin{aligned} w(e_1) &= 1 + i, w(e_1^{-1}) = 1 - i, w(e_2) = 1 + j, w(e_2^{-1}) = 1 - j, \\ w(e_3) &= 1 + k, w(e_3^{-1}) = 1 - k, w(e_4) = i, w(e_4^{-1}) = -2i, \\ w(e_5) &= 1, w(e_5^{-1}) = 2 \end{aligned}$$

このとき,

$$\tilde{\mathbf{W}} = \frac{1}{1-2x^2} \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 0 & -2i \\ 1-i & 0 & 1+j & 1 \\ 0 & 1-j & 0 & 1+k \\ i & 2 & 1-k & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = \frac{1}{1-2x^2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

であるから, 定理 10 を用いると次式を得る:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x)^{-1} &= \text{Sdet}_x(\mathbf{I}_4 - x\tilde{\mathbf{W}} + x^2\tilde{\mathbf{D}})(1-2x^2)^{10} \\ &= (1-2x^2)^2(1+4x^2+4x^3+24x^4+16x^5+98x^6+60x^7+368x^8 \\ &\quad + 184x^9+776x^{10}+448x^{11}+1856x^{12}+512x^{13}+3072x^{14}+4096x^{16}). \end{aligned}$$

次に, 第 2 種重み付きゼータ関数の四元数化について述べる. (6) において橋本型行列式表示を Study 行列式に置き換えたもので有限グラフの第 2 種四元数重み付きゼータ関数を定義する:

$$\mathbf{Z}_1^{\mathbb{H}}(G, w, t) = \text{Sdet}(\mathbf{I}_{2m} - t(\mathbf{B}_w - \mathbf{J}_0))^{-1}.$$

ただし, t は四元数変数とする. $\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x)$ の定義では x を中心的不定元としたが, ここでは t を四元数変数として $\mathbf{Z}_1^{\mathbb{H}}(G, w, t)$ を定めた. また, \mathbf{B}_w は四元数行列であることに注意する. 我々は, $\mathbf{Z}_1^{\mathbb{H}}(G, w, t)$ に対する伊原型行列式表示を次の通り得た.

定理 12 (今野-三橋-佐藤 [8]).

$$\mathbf{Z}_1^{\mathbb{H}}(G, w, t)^{-1} = |1 - t^2|^{2m-2n} \text{Sdet}(\mathbf{I}_n - \mathbf{W}t + (\mathbf{D}_w - \mathbf{I}_n)t^2).$$

$\mathbf{Z}_1^{\mathbb{H}}(G, w, t)$ のオイラー積表示について簡単に触れたい. 重みが非可換だから, (7) における $\tilde{w}(C)$ は巡回同値な cycle 同士でも一般には異なる値をとる. そこで我々は, $[C]$ に属する Lyndon word に対応する $\tilde{w}(C)$ でオイラー積表示を求めた. prime cycle $C = e_{j_1} \cdots e_{j_d}$ の巡回同値類の元の中で, 添字列 $j_1 \cdots j_d$ が $L_{[2m]}$ に属するものが唯一つ存在することに注意する. 我々はそのような代表元を用いて $\mathbf{Z}_1^{\mathbb{H}}(G, w, t)$ のオイラー積が次式で与えられることを示した.

定理 13 (今野-三橋-佐藤 [8]). t のノルムが十分小さいとき,

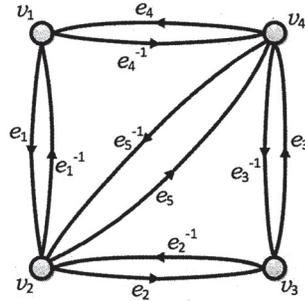
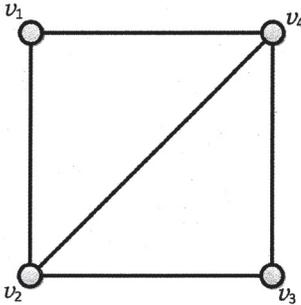
$$\mathbf{Z}_1^{\mathbb{H}}(G, w, t) = \prod_{i_1 i_2 \cdots i_d \in L_{[2m]}} |1 - t\tilde{w}(e_{i_1}, e_{i_2})t\tilde{w}(e_{i_2}, e_{i_3}) \cdots t\tilde{w}(e_{i_d}, e_{i_1})|^{-2}.$$

実数は \mathbb{H} の中心に属するので, 定理 13 から次の系が従う.

系 14. t を $|t|$ が十分小さい実数とすると,

$$\mathbf{Z}_1^{\mathbb{H}}(G, w, t) = \prod_{i_1 i_2 \cdots i_d \in L_{[2m]}} |1 - \tilde{w}(e_{i_1}, e_{i_2})\tilde{w}(e_{i_2}, e_{i_3}) \cdots \tilde{w}(e_{i_d}, e_{i_1})t^d|^{-2}.$$

例として, G, D_G を下図の通りとし, 各 arc 上の四元数重みを



$$\begin{aligned} w(e_1) &= i, w(e_1^{-1}) = -i, w(e_2) = j, w(e_2^{-1}) = -j, \\ w(e_3) &= i, w(e_3^{-1}) = -i, w(e_4) = k, w(e_4^{-1}) = -k, \\ w(e_5) &= 1, w(e_5^{-1}) = 1 \end{aligned}$$

で与える. このとき,

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & -k \\ -i & 0 & j & 1 \\ 0 & -j & 0 & i \\ k & 1 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_w = \begin{pmatrix} i-k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i+j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i-j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i+k \end{pmatrix}$$

であるから, t を実数とし定理 12 を用いると次式を得る :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1^{\mathbb{H}}(G, w, t)^{-1} &= |1 - t^2|^2 \text{Sdet}(\mathbf{I}_4 - \mathbf{W}t + (\mathbf{D}_w - \mathbf{I}_4)t^2) \\ &= (1 - t^2)^2 (1 - 14t^2 + 75t^4 - 194t^6 - 16t^7 + 283t^8 \\ &\quad + 56t^9 - 226t^{10} - 64t^{11} + 141t^{12} - 24t^{13} - 54t^{14} + 36t^{16}) \quad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

References

- [1] Aslaksen, H.: Quaternionic Determinants. *Math. intelligencer* **18**, no3, pp. 57–65 (1996)
- [2] Bass, H.: The Ihara-Selberg zeta function of a tree lattice. *Internat. J. Math.* **3**, pp. 717–797 (1992)
- [3] Foata, D., Zeilberger, D.: A combinatorial proof of Bass’s evaluations of the Ihara-Selberg zeta function for graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* **351**, pp. 2257–2274 (1999)
- [4] Hashimoto, K.: Zeta Functions of Finite Graphs and Representations of p -Adic Groups. in *Adv. Stud. Pure Math. Vol. 15*, pp. 211–280, Academic Press, New York, 1989.
- [5] Hashimoto, K.: On Zeta and L-Functions of Finite Graphs. *Internat. J. Math.* **1**, pp. 381–396 (1990)
- [6] Ihara, Y.: On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p -adic fields, *J. Math. Soc. Japan* **18**, pp. 219–235 (1966)
- [7] Konno, N., Mitsuhashi, H., Sato, I.: The quaternionic weighted zeta function of a graph, *J. Algebr. Comb.* **44**, pp.729–755 (2016)
- [8] Konno, N., Mitsuhashi, H., Sato, I.: The quaternionic second weighted zeta function of a graph and the Study determinant, *Linear Algebra and its Applications* **510**, pp.92–109 (2016)
- [9] Konno, N., Sato, I.: On the relation between quantum walks and zeta functions, *Quantum Information Processing* **11** Issue 2, pp. 341–349 (2012)
- [10] Kotani, M., Sunada, T.: Zeta functions of finite graphs. *J. Math. Sci. U. Tokyo* **7**, pp. 7–25 (2000)
- [11] Lothaire, M.: *Combinatorics on words*. Cambridge University Press, (1997)
- [12] Mizuno, H., Sato, I.: Weighted zeta functions of graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* **91**, pp.169–183 (2004)

- [13] Mizuno, H., Sato, I. : The scattering matrix of a graph. *Electron. J. Combin.* **15**, R96 (2008)
- [14] Sato, I. : A new Bartholdi zeta function of a graph, *Int. J. Algebra* **1**, pp. 269–281 (2007)
- [15] Serre, J. -P.: *Trees*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [16] Stark, H. M., Terras, A. A.: Zeta functions of finite graphs and coverings. *Adv. Math.* **121**, pp. 124-165 (1996)
- [17] Sunada, T. : L-functions in geometry and some applications, *Lecture Notes in Mathematics* **1201**, pp. 266-284 (1986)
- [18] 砂田利一, 「基本群とラプラスアン」, 紀伊国屋書店, 1988
- [19] Study, E.: Zur Theorie der lineare Gleichungen. *Acta. Math.* **42**, pp. 1–61 (1920)
- [20] Terras, A. A.: *Zeta Functions of Graphs*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011.
- [21] Watanabe, Y., Fukumizu, K.: Graph Zeta Function in the Bethe Free Energy and Loopy Belief Propagation. *Adv. Neural Inf. Process. Syst.* **22** 2017–2025 (2009)