

# 12夜

## Mathieu Moonshine に対する群論的アプローチ

宮本雅彦

筑波大学数理物質系数数学域

Dec. 12, 2017@RIMS

12夜とはシェイクスピアの三大喜劇の一つあり、双子の妹が兄の格好で働くことで起こるドタバタの後に、ハッピーエンドになる話である。それを念頭に私の話を聞いていただきたい。これは、熊本大学千吉良直紀氏との共同研究である。

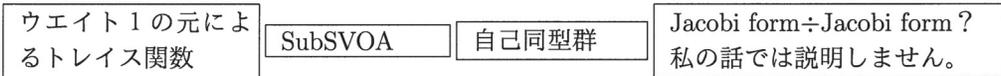
ここでは、次の4つのものが関係する。



上記の4者が演ずる舞台は、

超頂点作用素代数 (S+VOA, Super Vertex Operator Algebra)

であり、それぞれ次のような役で出てきます。



- (1) プロローグ: マッシュー  $M_{24}$  ムーンシャインと予想の説明
- (2) 舞台設営: 中心電荷 12 の SVOA の説明
- (3) Act 1: 上の舞台での K3 曲面の楕円種数の振る舞いを紹介
- (4) Act 2: 上の舞台でのマッシュー群  $M_{24}$  の演技
- (5) Act 3:  $g$ -不変  $N = 4$  中心電荷 6 の超共形代数の構成
- (6) Act 4: トラブル続発と良報、そして双子の出現と大団円

## 1 プロローグ

### 1.1 超共形代数

CFT-型の超頂点作用素代数  $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_{n/2}$  を使って説明する。CFT-型とは  $\mathbf{1}$  を真空とすると、 $V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$  となるものをいう。

$V$  のヴィラソロ元を  $\omega \in V_2$  と置く。 $V$  は超頂点代数なので、各  $v \in V$  に対して、無限個の作用  $v(n) \in \text{End}(V)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) が定義されている。例えば、 $\mathbf{1}(n) = \delta_{n,-1}$  である。超頂点代数の重要な性質は、 $v \in V_{\text{wt}(v)}$  に対して、 $v(n) : V_m \rightarrow V_{m+\text{wt}(v)-n-1}$  であり、超交換関係式

$$[v(n), u(m)] (\stackrel{\text{def}}{=} v(n)u(m) - (-1)^{4\text{wt}(v)\text{wt}(u)} u(m)v(n)) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} (v(j)u)(n+m-j)$$

を満たしている。ウエイトの小さい順に超交換関係式を見ていくと、

(1) もし  $v, u \in V_{1/2}$  なら、 $\mathbb{C}1 \ni v(0)u = \langle v, u \rangle 1$  で内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  が定義でき、 $[v(n), u(m)] = \langle v, u \rangle \delta_{n+m, -1}$  となる。このような元は『フェルミオン』と呼ばれている。

(2) もし  $v, u \in V_1$  かつ  $\omega(2)V_1 = 0$  なら、 $v(0)u \in V_1, v(1)u = \langle v, u \rangle 1$  であり、 $(V_1, 0$ -積) は不変内積を持つリー代数となっている。

(3) もし  $v, u \in V_{3/2}$  なら、 $v(0)u \in V_2, v(1)u \in V_1, v(2)u \in \mathbb{C}1$  である。さらに、

(3-1) もし  $v(0)v = 2\omega v(1)v = 0$  なら、1元  $v$  で生成される部分超頂点代数  $VA(v)$  を  $N = 1$  超共形代数と呼ばれている。これらは、リー超代数の表現として、Neveu-Schwartz 代数  $(n, m \in \mathbb{Z}/2)$  と Ramond 代数  $(n, m \in \mathbb{Z})$  の2つの顔を持つ。

(3-2) 2元  $v, u$  生成で、 $\dim(VA(v, u))_1 = 1$  となるものを  $N = 2$  超共形代数と呼ぶ。(これはミラー対称性に使われ注目された。)

(3-3) 4元生成で、 $(VA(v, u, v^*, u^*))_1 \cong sl_2$  (3-dim) となるものを  $N = 4$  超共形代数と呼ぶ。

### 1.2 マシュームーンシャイン

江口、大栗、立川の3名が次の3つの間に神秘的な関係があることに気づいたのが出発点である。

(1) K3 曲面の楕円種数  $Z_{K3}^{ell}(z, \tau)$  (Witten 種数の変形)

弱 Jacobi 形式 (wt=0, index=1) であり、 $\lim_{q \rightarrow 0} Z(0, \tau) = 24$  の条件で一意的に決まる。

$$Z_{K3}^{ell}(z, \tau) = 20 + 2(\zeta + \zeta^{-1}) + f_1(z)q + f_2(z)q^2 + \dots \quad (q = e^{2\pi i\tau}, \zeta = e^{2\pi iz})$$

(2) 中心電荷 6 の  $N=4$  超共形代数  $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$  Ramond 既約加群の指標は

$$\text{ch}_{h=1/4, \ell=0}(z, \tau), \quad \text{ch}_{h=n+1/4, \ell=1/2}(z, \tau) = q^{n-1/8} \frac{\theta_1(z, \tau)^2}{\eta(\tau)^3}, \quad n = 0, 1, \dots$$

と与えられる。この時、Witten の結果より、ある整数係数  $A_n$  があって、線形和

$$Z_{K3}^{ell}(z, \tau) = 24 \text{ch}_{1/4, 0}(z, \tau) + \sum_{n=0}^{\infty} \exists A_n \text{ch}_{n+1/4, 1/2}(z, \tau)$$

と表示できることが知られていた。そこで、大栗 [1988] はいくつかの係数を計算した。

$$A_0 = -2, A_1 = 90, A_2 = 462, A_3 = 1540$$

2010年に上記の3人はこれらの数字が下の次数の簡単な和であることに気づいた。

(3) Mathieu 単純群  $M_{24}$  の既約加群の次数

$$1, 23, 45, 45, 231, 231, 252, 253, 483, 770, 770, 990, 990, 1035, \dots$$

### 1.3 マシュームーンシャイン予想

そこで、3人は次のような質問(予想)を立てた。

予想:  $A_n$  は  $M_{24}$ -加群の次数ではないか?

期待として: K3 曲面と  $M_{24}$  と  $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$  の間に関係があるのではないか?

(例えば、 $M_{24} \times \mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$  が  $Z_{K3}^{ell}(z, \tau)$  を定義する空間に作用しているのではないかということである。)

この予想が広く注目された理由の一つは、 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n q^n$  が”Mock テータ級数” (Ramanujan が定義したもの) になっていたことである。これは、モンスター単純群にまつわるムーンシャイン予想における種数 0 のモジュラー関数を彷彿させた。モンスタースムーンシャインにおけるトンプソン級数のように、マシュームーンシャインでも、各  $g \in M_{24}$  に、”ツイスト楕円種数” (江口、樋上)

$$Z_g^{ell}(z, \tau) = (1 + \chi_2(g)) \text{ch}_{1/4,0}(z, \tau) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(g) \text{ch}_{n+1/4,1/2}(z, \tau)$$

が与えられ、予想は、「 $A_n(*)$  が  $M_{24}$  の指標ではないか？」の形になった。

その後、計算機を使って多くの係数 ( $\sim q^{300}$ ) の指標の表示が求められ、最終的に、ギャノン [2012] が、この膨大なデータとモックテータ級数の性質を使って、予想を示した。(論文名は “Much Ado About Mathieu” である。Much Ado About Nothing (空騒ぎ) はシェイクスピアの喜劇の 1 つであり、この講演内容は上の論文に対する返歌のつもりである。)

しかし、 $M_{24}$  と  $A_{cc=6}^{N=4}$  と  $Z_{K3}^{ell}(z, \tau)$  の関係は以前不明である。

## 2 12 夜の舞台の設営

12 夜の舞台となる超頂点作用素代数 SVOA を構成する。

格子 SVOA  $V_L$  とは  $\mathbb{Z}$ -値正定値格子  $L$  に対して、2 つの性質

(1)  $L$  の加法:  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L \subseteq (V_L)_1$ , ( $v \in \mathbb{C}L \rightarrow v(-1)1 \in (V_L)_1$ ) と

(2)  $L$  の群環: 各  $\alpha \in L$  に対して、 $e^\alpha \in (V_L)_{\langle \alpha, \alpha \rangle / 2}$

を利用して構成される SVOA であり、中心電荷は  $L$  のランク、指標は次で与えられる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim(V_L)_n q^{n - \text{rank}(L)/24} = \theta_L(\tau) / \eta(\tau)^{\text{rank}(L)}$$

Duncan, et al. [2015] は中心電荷 12 の格子 SVOA  $V_{D_{12}+}$  を構成し、 $V_L$  のいくつかの自己同型群と可換な中心電荷 12 の超共形代数を構成した。

マシュームーンシャインに出てくる超共形代数は中心電荷 6 なので、一見無関係のように見えるが、この中に隠れていたというのが今回の 12 夜の話である。それを見るために、上記の SVOA の性質を見ていこう。

$x_1, \dots, x_{12}$  正規直交基底とすると、

$$D_{12} = \left\{ \sum_{i=1}^{12} a_i x_i \mid a_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^{12} a_i \equiv 0 \pmod{2} \right\}$$

はタイプ  $D_{12}$  の偶格子となる。その双対格子  $D_{12}^*$  は、 $f = \frac{x_1 + \dots + x_{12}}{2}$  と置いて、

$$D_{12}^* = D_{12} \cup (D_{12} + x_1) \cup (D_{12} + f) \cup (D_{12} + f - x_1)$$

となる。この時、格子 VOA 理論から、 $V_{D_{12}}$ -既約加群は次の 4 つである。

$$V := V_{D_{12}}, W^1 := V_{D_{12}+x_1}, W^2 := V_{D_{12}+f}, W^3 := V_{D_{12}+f-x_1}$$

**補題 1**  $D_{12} \cup (D_{12} + t)$  ( $\forall t = x_1, f, f - x_1$ ) は正則格子なので、 $V \oplus W^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は正則 SVOA となる。(正則 SVOA の重要な性質として、既約加群は自分自身だけ、トレースは  $SL_2(\mathbb{Z})$ -不変となっている。)

### 3 舞台上での楕円種数の姿

weight 1 の元  $x_i(-1)\mathbf{1}$  と  $V \oplus W^h$  が正則 SVOA であることを使って、次を得る。

補題 2  $x_1(-1)\mathbf{1} + x_2(-1)\mathbf{1}$  に対して、トレース関数

$$Z^h(z, \tau) := \text{Tr}_{V \oplus W^h} \zeta^{(x_1(0)+x_2(0))} q^{L(0)-12/24}, \quad \text{ここで } \zeta = e^{2\pi iz}, q = e^{2\pi i\tau}$$

は弱 Jacobi 形式となる。(注釈:  $q$  の冪は  $V$  上で半整数で、 $W^i$  上では整数である。) 整数冪だけを考慮して、定数項を比較してみると、次に事実が分かる。

$$\text{事実 } Z_{K3}^{ell}(z, \tau) = Z^1(z, \tau) - Z^3(z, \tau)$$

(注釈:  $W^1 \oplus W^3$  は  $(V_{D_{12}} \oplus W^2)$ -ラムオン加群である。)

#### 3.1 $V \oplus W^1$ への $M_{24}$ の作用

散在型有限単純群マシュー群  $M_{24}$  は 24 点集合上の 5 重置換群であり、位数は 244823040 であり、ゴレーイ符号  $G_{24} \subseteq \mathbb{Z}_2^{\oplus 24}$  (自己双対偶コード) の全自己同型群である。

定義 1 前に述べたフェルミオン  $a \in V_{1/2}$  の性質  $a(n)a(m) + a(m)a(n) = \delta_{n+m,-1}$  から、一元  $a$  で生成した SVOA( $a$ ) は  $L(\frac{1}{2}, 0) \oplus L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  と同型である。ここで、 $L(\frac{1}{2}, 0)$ : 2次元イジング模型と呼ばれる中心電荷 1/2 の単純頂点作用素代数であり、 $L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  は最小ウエイト  $\frac{1}{2}$  の既約加群である。

補題 3 格子 SVOA  $V_{\mathbb{Z}_{x_1}}$  において、 $e^{x_1} + e^{-x_1}$  と  $i(e^{x_1} - e^{-x_1})$  の 2 つが互いに直交したフェルミオンであり、

$$V_{\mathbb{Z}_{x_1}} \cong \left( L\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus L\left(\frac{1}{2}, 0\right) \right) \otimes \left( L\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right)$$

である。それゆえ、

$$V \oplus W^1 \cong \left( L\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right)^{\otimes 24}$$

特に、 $M_{24}$  は成分の置換として作用している。

Adermollo[1976] は 12 個の直交フェルミオンから中心電荷 6 の  $N = 4$  超共形代数  $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$  を  $V_D \oplus V_{D+x_1}$  の中に構成したが、今回必要なのは  $V_D \oplus V_{D+e}$  の中の中心電荷 6 の  $N = 4$  超共形代数である。

#### 3.2 $V \oplus W^2$ への $M_{24}$ の作用

$V \oplus W^1$  は  $L(\frac{1}{2}, 0)$  と  $L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  だけで構造が分かるが、 $W^2, W^3$  はそれだけでは不十分である。 $L(\frac{1}{2}, 0)$  の既約加群として上記以外に  $L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$  がある。これを使って、 $W^2, W^3$  の構造を見ていこう。まず、ゴレーイ符号

$$G_{24} \subseteq \{ \text{偶コード全体} \} \subseteq (\mathbb{Z}_2)^{24} \quad M_{24}\text{-不変部分群の列}$$

を考え、2元符号の内積を利用して、位数2の元 $z$ による中心拡大

$$2^{1+12} \subseteq 2^{1+23} \subseteq 2^{1+24}$$

を考える。ここで、 $2^{1+n}$ は位数2の中心元 $z$ で商を取ると $2^n$ の基本アーベル群となる extra-special 2-群である。 $\theta$ を $2^{1+12}$ の1次表現で $z$ が自明でないものとする、その誘導表現 $T = \text{Ind}^{2^{1+23}}(\theta)$ は、次元が $2^{11}$ であり、 $M_{24}$ -加群でもある。

**命題 1**  $W^2 \cong L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})^{\otimes 24} \otimes T, \quad (W^3 \text{ もほぼ同じ})$

上記の表現に対する $M_{24}$ による固定元を計算してみると、

**補題 4**  $\dim(V \oplus W^2)_{3/2}^{M_{24}} = 1$

それゆえ、 $\exists \xi \in (W^2)_{3/2}^{M_{24}}$ で、 $\xi_0 \xi = 2\omega$ が存在する。この $\xi$ は次の部分節で利用する。

### 3.3 $V \oplus W^2$ の中の超共形代数 $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$

格子SVOAの中に超共形代数を見つける方法として、最近発表された結果がある。

**定理 5 (Mason-Tuite-Yamskulna(2017))**  $L$ を正定値奇格子で、最小ウエイト $\text{wt}(L) \geq 2$ とする。 $V_L$ を格子SVOAとする。以下の条件を満たす $A, B \subseteq V_{3/2}$ があるとすると

(I)  $A$ と $B$ は2次元の $sl_2$ -加群で、 $\dim(A+B) = 4$

(II)  $A(1)B \cong sl_2, A(1)A = B(1)B = 0,$

(III)  $sl_2$ は $L$ のあるルートを含む。i.e.  $\exists e^x$  ( $x$ ルート)

この時、 $A, B$ で生成される $VA(A, B) \cong \mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$ である。

この定理の応用として、

**定理 6**  $H < M_{24}$ に対して、同型 $\sigma$ があって、 $H$ -不変な

$$sl_2 \cong \text{Span}_{\mathbb{C}}\{e^{x_1+x_2}, e^{-x_1-x_2}, x_1(-1)\mathbf{1} + x_2(-1)\mathbf{1}\}^{\sigma} \subseteq (V_{D_{12}})_1$$

があれば、 $H$ -不変な超共形代数 $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$ を次のように構成できる。

$$G^1 = (e^{x_1+x_2})^{\sigma}(0)\xi, \quad G^2 = (e^{-x_1-x_2})^{\sigma}(0)(e^{x_1+x_2})^{\sigma}(0)\xi$$

$$\bar{G}^1 = (e^{-x_1-x_2})^{\sigma}(0)\xi, \quad \bar{G}^2 = (e^{x_1+x_2})^{\sigma}(0)(e^{-x_1-x_2})^{\sigma}(0)\xi$$

とおくと、 $A = \langle G^1, G^2 \rangle, B = \langle \bar{G}^1, \bar{G}^2 \rangle$ は定理5の条件を満たす。

## 4 マシュームーンシャイン現象と12夜 (トラブル)

**定義 2** (マシュー群の類関数) $\forall g \in M_{24}, g$ -不変な $\exists \mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$ が存在し、 $g \times \mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$ は $W^1 \oplus W^3$ に作用している。この時、 $A_n(*)$ を次のように定義する。

$$\frac{\theta_1(z, \tau)^2}{\eta(\tau)^3} \times \sum A_n(g) q^{n-1/8} = \text{Tr}_{M_g(W^1 \oplus W^3) - (W^2 \oplus W^3)} g \zeta^{\alpha(0)} q^{L(0)-1/2},$$

ここで、 $M_g(W^1 \oplus W^3)$ は $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$ のウエイトが $1/4$ でない加群全体である。

質問:  $M_{24} \times \mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$  が  $(W^1 \oplus W^3) - (W^2 \oplus W^3)$  に作用している?

答: 否 (Bad News)

事実:  $((V_{D_{12}})^{M_{24}})_1 = 0$   $M_{24}$  は  $sl_2$  さえ固定しない。

**More bad news**

1つの元でも、 $g = 23A, 23B$  の場合には、 $g$  と可換な  $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$  の作用は無い。

## 5 朗報

(1) 舞台の頂点作用素代数の中心電荷は 12. 一方超共形代数の中心電荷 6 なので、双子  $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4} \otimes \mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$  が必要。実際、組を作れる。(劇 1 2 夜の主人公は双子の兄妹)

(2) Brauer の定理 群の類関数  $\chi$  が一般指標 (2つの指標の差) である必要十分条件はすべての基本部分群  $\forall H$  への制限  $\chi|_H$  が一般指標であることである。

即ち、マッシュー群  $M_{24}$  そのものが出てこなくても、 $M_{24}$  の類関数が  $M_{24}$  の一般指標となることがある。しかも、 $M_{24}$  の基本部分群 ( $p$ -群と巡回群の直積) は、{巡回群,  $\mathbb{Z}_3 \times D_8$ ,  $\mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_2)^2$ , Sylow2-群, Sylow3-群} という簡単な構造を持ったものだけである。

(3) 基本部分群  $H$  に対して、 $V_{D_{12}} \oplus W^2$  の中に、 $H$ -不変な双子  $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4} \otimes \mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$  が構成できる。(注釈  $H$  の作用と可換というわけではない。)

### 5.1 双子の兄妹

左右の Virasoro 元を  $\omega^1, \omega^2$  とする。それぞれ 中心電荷  $cc = 6$  である。右の  $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$  の中に含まれる Neveu-Schwartz 代数の元  $v$  を使うことで、

$$v(1/2)v(1/2) = \frac{1}{2}[v(1/2), v(1/2)] = \omega^2(1) - 1/4$$

を得る。そこで、 $(\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4})^{even} \otimes (\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4})^{even}$  の加群  $W^1 \otimes W^2 \subseteq W_{D+x_1}$  に対して、

$$\begin{aligned} v(1/2) : V_{D_{x_1}} &\leftrightarrow V_{D_{x_1+e}} \\ W^1 \otimes W^2 &\leftrightarrow v(1/2)(W^1 \otimes W^2) \end{aligned}$$

かつ、左  $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$ -加群として、 $W^1 \otimes W^2 - v(1/2)(W^1 \otimes W^2) = W^1 \otimes (W^2)_{1/4}$  となるので、差  $W_{D+x_1} - W_{D+e+x_1}$  には  $W^2_{1/4} \neq 0$  となる massless 表現  $W^2$  の相棒  $W^1$  しか出てこない。結果として、左右の  $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$  は一つにしか見えない (これが双子  $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4} \otimes \mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$  を一つの  $\mathcal{A}_{cc=6}^{N=4}$  と誤解した理由である。) それゆえ、予想に対する次の結果の別証明を得た。

定理 7  $A_n(*)$  は  $M_{24}$  の一般指標である。