数理解析研究所講究録 第2086巻 2018年 111-129

Projective planes of order 12 admitting an automorphism group of order 9

Kenzi Akiyama (Fukuoka University),
Chihiro Suetake,
Masaki Tanaka (Sojo University)

要約 存在非存在が知られていない有限射影平面の最小位数は 12 である。位数 12 の射影平面が存在すれば, その全自己同型群の位数は 4 の約数または 9 の約数であることが知られている。このノートでは位数 9 の自己同型群を持つ位数 12 の射影平面があるのか無いのかを調べる。アイデアは, その存在を仮定したとき, その部分構造である対称横断デザイン上に導入される位数 9 の群の作用を調べることにより非存在 (多分) を詰めていくことである。計算は最後の段階にさしかかっているが、まだ最終的な結論を得ていない。

§1 準備

このノートで扱う集合はすべて有限集合とする。

定義 1.1 $\pi = (\mathcal{Q}, \mathcal{L}, J)$ を結合構造とする。ここで, $\mathcal{Q}, \mathcal{L}$ は集合で $J \subseteq \mathcal{Q} \times \mathcal{L}$ である。また, $p \in \mathcal{Q}$, $L \in \mathcal{L}$ に対して, $(p, L) \in J$ のとき, pJL と書くことにする。このとき, 次の 3 つの条件を満たす π を**点 (point)** からなる集合 $\mathcal{Q}$ と**直線 (line)** からなる集合 $\mathcal{L}$ を持つ**射影平面 (projective plane)** という。

(i) 任意の異なる 2 点 p, q に対して, $pJL\ qJL$ となるような直線 L が唯一つ存在する。
(ii) 任意の異なる 2 直線 L, M に対して, $pJL\ pJM$ となるような点 p が唯一つ存在する。
(iii) どの 3 点も同一直線上にない 4 点が存在する。

この定義に関していくつかの注意を与えておく。

注意 • $p \in \mathcal{Q}$ に対して, $(p) = \{X \in \mathcal{L} |\ pJX\}$ とおく。
• $L \in \mathcal{L}$ に対して, $(L) = \{x \in \mathcal{Q} |\ xJL\}$ とおく。
• $\mathcal{L} \ni L \longmapsto (L) \in 2^{\mathcal{Q}}$ は単射なので, $L \in \mathcal{L}$ に対して L と (L) を同一視する。従って直線は点集合 $\mathcal{Q}$ の部分集合と考えられる。

- 射影平面においては幾何的な用語法が使われる。
- 異なる 2 点 p, q を通る直線が唯一つ存在するので, それを pq と書くことにする。

定義 1.2　$\pi = (\mathcal{Q}, \mathcal{L}, J)$ を射影平面とするとき, 結合構造 $\pi^d = (\mathcal{Q}^*, \mathcal{L}^*, J^*)$ を次のように定義する。

$$\mathcal{Q}^* = \mathcal{L},\ \mathcal{P}^* = \mathcal{Q},\ J^* = \{(X, x) \in \mathcal{Q}^* \times \mathcal{L}^* |\ (x, X) \in J\}$$

このとき π^d も射影平面になる。π^d は π の**双対射影平面 (dual projective plane)** と呼ばれる。

任意の集合 X に対して, X に含まれる元の個数を $|X|$ と書く。次の補題は射影平面の定義から導かれる。

補題 1.3　$\pi = (\mathcal{Q}, \mathcal{L}, J)$ を射影平面とする。$L_0 \in \mathcal{L}$ で, ある自然数 $n (\geq 2)$ に対して $|(L_0)| = n + 1$ とする。(このような直線 L_0 の存在は射影平面の定義からわかる。) このとき次が成り立つ。

(i) 任意の $L \in \mathcal{L}$ に対して $|(L)| = n + 1$
(ii) 任意の $p \in \mathcal{Q}$ に対して $|(p)| = n + 1$
(iii) $|\mathcal{Q}| = |\mathcal{L}| = n^2 + n + 1$
(n は π の**位数 (order)** と呼ばれる。)

定義 1.4　$\pi_i = (\mathcal{Q}_i, \mathcal{L}_i, J_i)$ $(i = 1, 2)$ を射影平面とする。このとき, 次の性質を満たす全単射 $\varphi : \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{Q}_2 \cup \mathcal{L}_2$ が存在するとき, π_1 は π_2 に**同型である (isomorphic)** と呼ばれる。

$$\mathcal{Q}_1{}^\varphi = \mathcal{Q}_2,\ \mathcal{L}_1{}^\varphi = \mathcal{L}_2,$$
$$pJ_1L \Longleftrightarrow p^\varphi J_2 L^\varphi\ (p \in \mathcal{Q}_1,\ L \in \mathcal{L}_1)$$

ここで φ は π_1 から π_2 への**同型写像 (isomorphism)** と呼ばれる。特に射影平面 π からそれ自身への同型写像を π の**共線変換 (collineation)** あるいは**自己同型写像 (automorphism)** と呼ぶ。また恒等写像でない共線変換は**非自明**であると呼ばれる。

定義 1.5　与えられた射影平面のすべての共線変換全体からなる集合は通常の写像の積の定義のもとで群をなす。この群は $\mathrm{Aut}\,\pi$ と書かれ, π の**全共線変換群 (full collineation group)** あるいは**全自己同型群 (full automorphism group)** と呼ばれる。$\mathrm{Aut}\,\pi$ の任意の部分群は π の**共線変換群 (collineation group)** あるいは**自己同型群 (automorphism group)** と呼ばれる。

- すべての素数べき p^r に対して, 位数 p^r の射影平面が存在する。
- すべての知られた射影平面は素数べき位数を持つ。

与えられた位数を持つ射影平面の非存在についての唯一つの結果は, 次の優れた定理である。

定理 1.6 (Bruck-Ryser) $n \geq 2$ を $n \equiv 1$ または $2 \pmod 4$ を満たす自然数とする。このとき, もし n が2つの整数の平方和で書けないならば, 位数 n の射影平面は存在しない。

位数が25以下の射影平面の非同型なものの個数について記しておく。

位数	射影平面の個数	文献
2	1	
3	1	
4	1	
5	1	
6	0	定理 1.6(Bruck-Ryser)
7	1	
8	1	
9	4	Lam-Kolesova-Thiel([LKT]1991)
10	0	Lam-Thiel-Swierz([LTS]1989)
11	≥1	
12	?	
13	≥1	
14	0	定理 1.6(Bruck-Ryser)
15	?	
16	≥22	
17	≥1	
18	?	
19	≥1	
20	?	
21	0	定理 1.6(Bruck-Ryser)
22	0	定理 1.6(Bruck-Ryser)
23	≥1	
24	?	
25	≥193	

なお, C. Y.Ho(1988) は位数15の射影平面を研究した。

定義 1.7 (G, Λ) を集合 Λ 上に作用する置換群とする。この作用は忠実でなくてもよい。H を G の空でない部分集合とするとき, $F_\Lambda(H) = \{x \in \Lambda \mid$ すべての $\mu \in H$ に対して $x^\mu = x\}$, $\theta_\Lambda(H) = |F_\Lambda(H)|$ とおく。特に $H = \{\varphi\}$ のとき, $F_\Lambda(\{\varphi\}) = F_\Lambda(\varphi)$, $\theta_\Lambda(\{\varphi\}) = \theta_\Lambda(\varphi)$ とおく。また置換群 (G, Λ) の軌道の個数を $t_\Lambda(G) = t_\Lambda$ と書く。

次の補題は§3と§4で頻繁に使われる。

補題 1.8 (Burnside-Frobenius)　G を集合 Λ 上に作用する置換群とし, t を (G,Λ) の軌道の個数とする。このとき

$$t|G| = \sum_{\alpha\in G}\theta_\Lambda(\alpha)$$

次の補題は射影平面の軌道定理として知られている。

補題 1.9　$\pi=(\mathcal{Q},\mathcal{L},J)$ を射影平面とする。φ を π の共線変換, G を π の共線変換群とする。このとき

$$\theta_{\mathcal{Q}}(\varphi)=\theta_{\mathcal{L}}(\varphi),\ t_{\mathcal{Q}}(G)=t_{\mathcal{L}}(G)$$

次の補題は射影平面の定義と補題1.9から得られる。この補題は射影平面の共線変換が点集合と直線集合上かなり制限された作用を引き起こすことを示している。このことは, 大きい共線変換群を持つ射影平面の位数が素数べきになりやすい遠因となっているように思われる。

補題 1.10　$\pi=(\mathcal{Q},\mathcal{L},J)$ を射影平面とし, φ を $\theta_{\mathcal{Q}}(\varphi)\geq 2$ を満たす π の非自明な共線変換とする。このとき次のどれか1つが成り立つ。

(i) φ は **generalized elation** である。すなわち, $F_{\mathcal{Q}}(\varphi)\subseteq(L),\ F_{\mathcal{L}}(\varphi)\subseteq(p),\ p\in(L)$ であるような $L\in F_{\mathcal{L}}(\varphi)$ と $p\in F_{\mathcal{Q}}(\varphi)$ が存在する。ここで $L,\ p$ をそれぞれ φ の**軸 (axis), 中心 (center)** という。(φ の軸と中心は π に対して一意的に決まる。) この場合, φ を (p,L)-generalized elation と呼ぶ。

(ii) φ は **generalized homology** である。すなわち, $F_{\mathcal{Q}}(\varphi)\subseteq(L)\cup\{p\},\ F_{\mathcal{L}}(\varphi)\subseteq(p)\cup\{L\},\ p\notin(L)$ であるような $L\in F_{\mathcal{L}}(\varphi)$ と $p\in F_{\mathcal{Q}}(\varphi)$ が存在する。ここで $L,\ p$ をそれぞれ φ の**軸 (axis), 中心 (center)** という。(φ の軸と中心は π に対して一意的に決まる。) この場合, φ を (p,L)-generalized homology と呼ぶ。

(iii) φ は**平面的 (planar)** である。すなわち, π の部分構造 $(F_{\mathcal{Q}}(\varphi),F_{\mathcal{L}}(\varphi))$ は射影平面 (π の部分平面) である。

以上の有限射影平面についての記述は[HP]と[K]を参考にした。この節の残りでは我々のアイデアのために必要な対称横断デザインについて述べる。

定義 1.11　$\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B},I)$ を結合構造とする。$p\in\mathcal{P},\ B\in\mathcal{B}$ に対して, $(p,B)\in I$ であるとき, pIB と書く。$p\in\mathcal{P}$ に対して $(p)=\{X\in\mathcal{B}|\ pIX\}$ とおき, $B\in\mathcal{B}$ に対して $(B)=\{x\in\mathcal{P}|\ xIB\}$ とおく。このとき, 以下の条件を満たす $\mathcal{D}$ を**対称横断デザイン (symmetric transversal design)** $\mathrm{STD}_\lambda[k;u]$ と呼ぶ。ここで $\lambda,\ k,\ u$ は自然数で $k\geq 2$ である。

(i) 任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して $|(B)| = k$

(ii) 次を満たすような $\mathcal{P}$ の分割 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_{k-1}$ が存在する。$|\mathcal{P}_i| = u \quad (0 \le i \le k-1)$, 任意の異なる $p, q \in \mathcal{P}$ に対して

$$|(p) \cap (q)| = \begin{cases} 0 & \text{if } p,\ q \in \mathcal{P}_i \text{ for some } i, \\ \lambda & \text{otherwise} \end{cases}$$

($\mathcal{P}_0, \cdots, \mathcal{P}_{k-1}$ は $\mathcal{D}$ の **point classes** と呼ばれる。 $\Omega(\mathcal{D}) = \{\mathcal{P}_0, \cdots, \mathcal{P}_{k-1}\}$ とおく。)

(iii) $\mathcal{D}$ の双対構造 $\mathcal{D}^d$ (定義 1.2 におけるのと同様に定義される。) もまた (i),(ii) を満たす。($\mathcal{D}^d$ の point classes $\mathcal{B}_0, \cdots, \mathcal{B}_{k-1}$ は $\mathcal{D}$ の **block classes** と呼ばれる。 $\Delta(\mathcal{D}) = \{\mathcal{B}_0, \cdots, \mathcal{B}_{k-1}\}$ とおく。)

この定義に関して注意を与えておく。

注意 • $k = u\lambda$

• $\mathcal{B} \ni B \longmapsto (B) \in 2^{\mathcal{P}}$ は単射なので, $B \in \mathcal{B}$ に対して B と (B) を同一視する。従ってブロックは点集合 $\mathcal{P}$ の部分集合と考えられる。

定義 1.12 対称横断デザインの**同型写像, 自己同型写像, 全自己同型群, 自己同型群**は定義 1.4 と定義 1.5 におけるように定義される。対称横断デザイン $\mathcal{D}$ の自己同型群 G は $\Omega(\mathcal{D})$ と $\Delta(\mathcal{D})$ 上の置換群を導入することも注意しておく。

次の補題は対称横断デザインの軌道定理である。これは自己同型写像の点とブロック上の作用を調べるときに便利である。

補題 1.13 [AS1] $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を $\mathrm{STD}_\lambda[k, u]$ とし, $\Omega = \Omega(\mathcal{D})$, $\Delta = \Delta(\mathcal{D})$ とおく。$\varphi \in$Aut $\mathcal{D}$ とし, G を $\mathcal{D}$ の自己同型群とする。このとき

$$\theta_{\mathcal{P}}(\varphi) + \theta_{\Delta}(\varphi) = \theta_{\mathcal{B}}(\varphi) + \theta_{\Omega}(\varphi), \quad \theta_{\mathcal{P}}(G) + \theta_{\Delta}(G) = \theta_{\mathcal{B}}(G) + \theta_{\Omega}(G)$$

射影平面は部分構造として対称横断デザインを含む。

補題 1.14 $\pi = (\mathcal{Q}, \mathcal{L}, J)$ を位数 n の射影平面とする。$r_\infty \in \mathcal{Q}$ と $L_\infty \in \mathcal{L}$ を $r_\infty \in (L_\infty)$ となるように任意に選ぶ。$\mathcal{P} = \mathcal{Q} \backslash (L_\infty)$, $\mathcal{B} = \mathcal{L} \backslash (r_\infty)$ とおく。$(r_\infty) \backslash \{L_\infty\} = \{L_0, L_1, \cdots, L_{n-1}\}$, $(L_\infty) \backslash \{r_\infty\} = \{r_0, r_1, \cdots, r_{n-1}\}$ とする。$\mathcal{P}_i = (L_i) \backslash \{r_\infty\}$, $\mathcal{B}_j = (r_j) \backslash \{L_\infty\}$ $(0 \le i, j \le n-1)$, $\Omega = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_{n-1}\}$, $\Delta = \{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_{n-1}\}$ とおく。このとき, π の部分構造 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ $(I = J \cap (\mathcal{P} \times \mathcal{B}))$ は点クラスからなる集合 Ω とブロッククラスからなる集合 Δ を持つ $\mathrm{STD}_1[n, n]$ になる。この場合, $\mathcal{D}$ を点 r_∞ と直線 L_∞ に関する $\mathrm{STD}_1[n, n]$ と呼ぶ。

なお任意の $\mathrm{STD}_1[n, n]$ は同型を無視すると一意的に位数 n の射影平面に拡大出来ることも注意しておく。

補題 1.15　$\pi = (\mathcal{Q}, \mathcal{L}, J)$ を位数 n の射影平面とする。$r_\infty \in \mathcal{Q}$ と $L_\infty \in \mathcal{L}$ を $r_\infty \in (L_\infty)$ となるように任意に選ぶ。$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を点 r_∞ と直線 L_∞ に関する $\mathrm{STD}_1[n, n]$ とする。$\Omega = \Omega(\mathcal{D})$, $\Delta = \Delta(\mathcal{D})$ とおく。G を r_∞ と L_∞ を固定する π の共線変換群とする。このとき

(i) 任意の $\mu \in G$ に対して $\mu|_{\mathcal{P}\cup\mathcal{B}} \in \mathrm{Aut}\ \mathcal{D}$

(ii) $G \ni \mu \longmapsto \mu|_{\mathcal{P}\cup\mathcal{B}} \in \mathrm{Aut}\ \mathcal{D}$ は単射準同型写像である。(このノートの残りでは $\mu|_{\mathcal{P}\cup\mathcal{B}}$ と μ を同一視する。)

(iii) $\widetilde{\mu}$ と $\widetilde{\widetilde{\mu}}$ をそれぞれを $\mu(\in G)$ によって導入された Ω と Δ 上の置換とする。このとき, $G \ni \mu \longmapsto \widetilde{\mu} \in \mathrm{Sym}\ \Omega$ と $G \ni \mu \longmapsto \widetilde{\widetilde{\mu}} \in \mathrm{Sym}\ \Delta$ は共に準同型写像である。

§2 位数 9 の共線変換群を持つ位数 12 の射影平面

この節では我々の興味を位数 12 の射影平面に限定する。位数 12 の射影平面は 1980 年代に Janko と Van Trung によって最初に研究された。続けて同年代に Hovatic-Baldasar, Kramer, Matulic-Bedenic の 3 人によって研究されたが, 少し途絶え 2000 年代に筆者たちの 2 人によって研究が再開された。これらの文献については [AS2] の引用文献を参照されたい。

もし H が位数 12 の射影平面の自己同型群とすると, H の位数は 4 または 9 の約数であることが知られている。この節では次を仮定する。

仮定 2.1　$\pi = (\mathcal{Q}, \mathcal{L}, J)$ を位数 9 の共線変換群 G を持つ位数 12 の射影平面とする。

補題 2.2 [JT]　π は位数 3 の elation を持たない。

補題 2.3 [AS2]　G は位数 9 の基本可換群で, π の部分構造 $(F_{\mathcal{Q}}(G), F_{\mathcal{L}}(G))$ は π の部分平面ではない。

補題 2.4 [AS2]　$\mu \in G\backslash\{1\}$ とする。もし $\pi_1 = (F_{\mathcal{Q}}(\mu), F_{\mathcal{L}}(\mu))$ が π の部分平面ならば π_1 の位数は 3 である。

補題 2.5　$\mu \in G,\ L \in \mathcal{L},\ r \in (L)$ とする。もし μ が (r, L)-generalized elation ならば $r \in F_{\mathcal{Q}}(G),\ L \in F_{\mathcal{L}}(G)$ である。

$|G| = 9$ なので, G は $r_\infty \in (L_\infty)$ である点 r_∞ と直線 L_∞ を固定する。$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を r_∞ と L_∞ に関する $\mathrm{STD}_1[12, 12]$ とする。実際, $\mathcal{P} = \mathcal{Q}\backslash(L_\infty)$, $\mathcal{B} = \mathcal{L}\backslash(r_\infty)$ で $\Omega = \Omega(\mathcal{D}) = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_{11}\}$ と $\Delta = \Delta(\mathcal{D}) = \{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_{11}\}$ はそれぞれ $\mathcal{D}$ の点クラスからなる集合, ブロッククラスからなる集合である。ここで, $(r_\infty)\backslash\{L_\infty\} = \{L_0, L_1, \cdots, L_{11}\}$, $(L_\infty)\backslash\{r_\infty\} = \{r_0, r_1, \cdots, r_{11}\}$, $\mathcal{P}_i = (L_i)\backslash\{r_\infty\}$, $\mathcal{B}_j = (r_j)\backslash\{L_\infty\}$　$(0 \leq i, j \leq 11)$ また, $0 \leq i \leq 11$ と $(\mathcal{X}, x) \in \{(\mathcal{P}, p),\ (\mathcal{B}, B)\}$ に対して, $\mathcal{X}_i = \{x_{12i},\ x_{12i+1}, \cdots, x_{12i+11}\}$ とおく。次の補題は補題 1.10 と補題 1.13 から得られ, §3, §4 で頻繁に使われる。

補題 2.6　$\mu \in G\backslash\{1\}$ ならば次の (1),⋯,(5) のどれか一つが起こる。

	μ	$\theta_\Omega(\mu)$	$\theta_\mathcal{B}(\mu)$	$\theta_\Delta(\mu)$	$\theta_\mathcal{P}(\mu)$
(1)	平面的	3	9	3	9
(2)	(r_∞, L)–g.e.	n_2	0	0	n_2
(3)	(r_∞, L_∞)-g.e.	n_3	0	n_3	0
(4)	(r, L_∞)-g.e.	0	n_4	n_4	0
(5)	(r_∞, L_∞)-g.e.	0	0	0	0

ここで $n_2, n_3, n_4 \in \{3,6,9\}$, $r \in (L_\infty)\backslash\{r_\infty\}$, $L \in (r_\infty)\backslash\{L_\infty\}$ である。

補題 2.7　G が $\mathcal{P} = \mathcal{Q}\backslash(L_\infty)$ 上半正則でないとするとき, $G\backslash\{1\}$ が 平面的共線変換を持たないならば, G は $\mathcal{B} = \mathcal{L}\backslash(r_\infty)$ 上半正則である。

証明　G が $\mathcal{B}$ 上半正則でないと仮定する。このとき $r_\infty \notin (M)$ と $M^\varphi = M$ を満たす $\varphi \in G\backslash\{1\}$ と $M \in \mathcal{L}$ が存在する。仮定によって, $p^\tau = p$ を満たす $\tau \in G\backslash\{1\}$ と $p \in \mathcal{P}$ が存在する。$L = pr_\infty \in \mathcal{L}$ とおくと, $G\backslash\{1\}$ は 平面的共線変換を持たないので, 補題 2.5 より τ は (r_∞, L)-generalized elation で $L \in F_\mathcal{L}(G)$ である。$M \cap L_\infty = r$, $M \cap L = s$ とおくと, r, s, r_∞ は同一直線上になくて φ によって固定される。これより, φ は 平面的である。これは仮定に矛盾する。 □

補題 2.8　L_∞ 上の G 軌道のサイズは次の 5 通りである。

場合 1 $(1,1,1,1,1,1,1,3,3)$,
場合 2 $(1,1,1,1,3,3,3)$,
場合 3 $(1,1,1,1,9)$,
場合 4 $(1,3,3,3,3)$,
場合 5 $(1,3,9)$

§3 G が π のアファイン点上半正則でない場合

この節では G が π のアファイン点上半正則でない場合を考える。もし $G\backslash\{1\}$ が平面的共線変換を持たないならば, 補題 2.7 によって G は π^d のアファイン点上半正則に作用する。従ってこの節では π の双対性を無視して, 仮定 2.1 のもとで次を仮定する。

仮定 3.1　G は $\mathcal{P} = \mathcal{Q}\backslash(L_\infty)$ 上半正則でなくて, $G\backslash\{1\}$ は平面的共線変換を含む。

補題 3.2　場合 1 は起こらない。

証明　$\varphi \in G\backslash\{1\}$ を平面的共線変換とする。このとき $\theta_\Delta(\varphi) = 3$ である。これは場合 1 の仮定に矛盾する。 □

補題 3.3 もし場合 2 が起こるならば, 次の 2 つのタイプのどちらかが起こる。

タイプ 1 (i) $G = \langle \varphi, \tau \rangle$,
$\widetilde{\varphi} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\varphi}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$,
$\widetilde{\tau} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_5, \mathcal{P}_4)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\tau}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_5, \mathcal{B}_4)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$
(ii) φ は $\mathcal{P}_i$ $(0 \leq i \leq 2)$ の 3 点と $\mathcal{B}_j$ $(0 \leq j \leq 2)$ の 3 ブロックを固定する。G は $\mathcal{P} \backslash F_{\mathcal{P}}(\varphi)$ と $\mathcal{B} \backslash F_{\mathcal{B}}(\varphi)$ 上半正則に作用する。$\langle \tau \rangle$ は $F_{\mathcal{P}}(\varphi)$ と $F_{\mathcal{B}}(\varphi)$ 上半正則に作用する。

タイプ 2 (i) $G = \langle \varphi, \tau \rangle$,
$\widetilde{\varphi} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\varphi}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$,
$\widetilde{\tau} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3)(\mathcal{P}_4)(\mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_8, \mathcal{P}_7)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\tau}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3)(\mathcal{B}_4)(\mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_8, \mathcal{B}_7)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$
(ii) φ は $\mathcal{P}_i$ $(0 \leq i \leq 2)$ の 3 点と $\mathcal{B}_j$ $(0 \leq j \leq 2)$ の 3 ブロックを固定する。G は $\mathcal{P} \backslash F_{\mathcal{P}}(\varphi)$ と $\mathcal{B} \backslash F_{\mathcal{B}}(\varphi)$ 上半正則に作用する。$\langle \tau \rangle$ は $F_{\mathcal{P}}(\varphi)$ と $F_{\mathcal{B}}(\varphi)$ 上半正則に作用する。

証明. $\varphi \in G \backslash \{1\}$ を平面的共線変換とする。このとき
$\widetilde{\varphi} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\varphi}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$ としてよい。ここで φ は $\mathcal{P}_i$ $(0 \leq i \leq 2)$ の 3 点と $\mathcal{B}_j$ $(0 \leq j \leq 2)$ の 3 ブロックを固定する。

2 つの場合に分けて考える。

(1) $F_{\mathcal{P}}(\tau) \neq \emptyset$ を満たす $\tau \in G \backslash \langle \varphi \rangle$ が存在するとする。

τ は補題 2.6 によって平面的であるので, $\theta_{\Omega}(\tau) = \theta_{\Delta}(\tau) = 3$ である。置換群 (G, Δ) に Burnside-Frobenius の定理を適用して $\theta_{\Delta}(\varphi) + \theta_{\Delta}(\tau) + \theta_{\Delta}(\varphi\tau) + \theta_{\Delta}(\varphi^2\tau) = 21$ を得る。これより $\theta_{\Delta}(\varphi\tau) + \theta_{\Delta}(\varphi^2\tau) = 15$ である。補題 2.2 によって $\theta_{\Delta}(\varphi\tau) \neq 12$, $\theta_{\Delta}(\varphi^2\tau) \neq 12$ であるので, $(\theta_{\Delta}(\varphi\tau), \theta_{\Delta}(\varphi^2\tau)) = (6, 9)$, $(9, 6)$ である。もし必要なら φ の代わりに φ^2 を考えることにより $(\theta_{\Delta}(\varphi\tau), \theta_{\Delta}(\varphi^2\tau)) = (6, 9)$ と仮定してよい。$\varphi\tau$ と $\varphi^2\tau$ は共に軸 L_{∞} を持つ generalized elation である。従って $\theta_{\mathcal{P}}(\varphi\tau) = \theta_{\mathcal{P}}(\varphi^2\tau) = 0$ である。これより $\theta_{\Omega}(\varphi\tau) + \theta_{\mathcal{B}}(\varphi\tau) = \theta_{\Delta}(\varphi\tau) + \theta_{\mathcal{P}}(\varphi\tau) = 6 + 0 = 6$ が成り立つ。同様に $\theta_{\Omega}(\varphi^2\tau) + \theta_{\mathcal{B}}(\varphi^2\tau) = 9$ が成り立つ。

$F_{\Omega}(\varphi) \cap F_{\Omega}(\tau) \neq \emptyset$ と仮定する。このとき $F_{\Omega}(\varphi) = F_{\Omega}(\tau) = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}$ である。もし $p^{\varphi} = p^{\tau} = p$ を満たす $p \in \mathcal{P}_0$ が存在するならば, $(F_{\mathcal{Q}}(G), F_{\mathcal{L}}(G))$ は π の位数 3 の部分平面である。これは補題 2.3 に矛盾する。従って $F_{\mathcal{P}_0}(\varphi) \cap F_{\mathcal{P}_0}(\tau) = \emptyset$ である。$\theta_{\mathcal{P}}(\varphi\tau) = \theta_{\mathcal{P}}(\varphi^2\tau) = 0$ であるので, G は $\mathcal{P}_0 \backslash (F_{\mathcal{P}_0}(\varphi) \cup F_{\mathcal{P}_0}(\tau))$ 上半正則に作用する。従って $9 = |G| \| \mathcal{P}_0 \backslash (F_{\mathcal{P}_0}(\varphi) \cup F_{\mathcal{P}_0}(\tau))| = 6$ が

成り立つ。これは矛盾である。従って $F_\Omega(\varphi)\cap F_\Omega(\tau)=\emptyset$ が成り立つ。

補題 2.6 によって $(\theta_\Omega(\varphi^2\tau),\theta_{\mathcal{B}}(\varphi^2\tau))=(0,9)$ または $(9,0)$ が成り立つ。$(\theta_\Omega(\varphi^2\tau),\theta_{\mathcal{B}}(\varphi^2\tau))=(9,0)$ とすると, $F_\Omega(\varphi)\cap F_\Omega(\tau)=\emptyset$ より, ${\mathcal{P}_i}^{\varphi^2\tau}=\mathcal{P}_i$ であるような, φ または τ によって固定される $\mathcal{P}_i\in\Omega$ が存在する。従って, $\mathcal{P}_i$ は φ と τ によって固定される。これは矛盾である。従って, $(\theta_\Omega(\varphi^2\tau),\theta_{\mathcal{B}}(\varphi^2\tau))=(0,9)$ である。$r_0(\neq r_\infty)$ を $\varphi^2\tau$ の中心とする。このとき補題 2.5 より $r_0\in F_{\mathcal{Q}}(G)$ である。$\mathcal{B}_0=(r_0)\backslash\{L_\infty\}\in\Delta$ とおくと, 上と同様な議論により $F_{\mathcal{B}_0}(\varphi)\cap F_{\mathcal{B}_0}(\tau)=\emptyset$ を得る。$L^{\varphi^2\tau}=L$ で, L が φ または τ によって固定されるような $L\in(r_0)$ が存在する。従って L は φ と τ の両方によって固定される。これも矛盾である。こうして (1) は起こらない。

(2) すべての $\mu\in G\backslash\langle\varphi\rangle$ に対して $F_{\mathcal{P}}(\mu)=\emptyset$ と仮定する。

$\tau\in G\backslash\langle\varphi\rangle$ とする。このとき $\theta_\Delta(\tau)\leq\theta_\Delta(\varphi\tau)\leq\theta_\Delta(\varphi^2\tau)$ としてよい。$\theta_\Delta(\tau)+\theta_\Delta(\varphi\tau)+\theta_\Delta(\varphi^2\tau)=18$ であるので, $(\theta_\Delta(\tau),\theta_\Delta(\varphi\tau),\theta_\Delta(\varphi^2\tau))=(3,6,9)$ または $(6,6,6)$ である。補題 2.6 によって $\tau,\varphi\tau,\ \varphi^2\tau$ すべては軸 L_∞ を持つ generalized elation である。$\tau,\ \varphi\tau,\ \varphi^2\tau$ のそれぞれの中心は $F_{(L_\infty)}(\varphi)$ のある元である。$\pi_S=(F_{\mathcal{Q}}(\varphi),F_{\mathcal{L}}(\varphi))$ とおくと, π_S は π の位数 3 の部分平面である。$\tau|_{\pi_S}=\varphi\tau|_{\pi_S}=\varphi^2\tau|_{\pi_S}$ で, これは軸 L_∞ を持つ π_S の elation である。ここで $\tau|_{\pi_S}$ の中心は r_∞ としてよい。従って $\tau|_{\pi_S}$ は点 r_∞ を通るすべての直線を固定する。L_∞ 以外のこれらの直線を M_0,M_1,M_2 とする。M_0,M_1,M_2 はすべて φ と τ によって固定されるので, これら 3 つの直線は G のすべての共線変換によって固定される。

$(\theta_\Delta(\tau),\theta_\Delta(\varphi\tau),\theta_\Delta(\varphi^2\tau))=(3,6,9)$ と仮定する。このとき $F_{(r_\infty)}(\varphi)=F_{(r_\infty)}(\tau)$ と $F_{(r_\infty)}(\varphi)\subseteq F_{(r_\infty)}(\varphi\tau)\cap F_{(r_\infty)}(\varphi^2\tau)$ が成り立つ。$\tau,\ \varphi\tau,\ \varphi^2\tau$ の中心はすべて r_∞ である。もし $M^\varphi\neq M,\ M^{\varphi\tau}=M,\ M^{\varphi^2\tau}=M$ となるような $M\in(r_\infty)$ が存在するならば $M=M^\varphi$ が成り立つ。何故なら, $M^{\varphi\tau}=M=M^{\varphi^2\tau}$ は $M=M^\varphi$ を導くので。これは矛盾である。従って $F_{(r_\infty)}(\varphi\tau)\cap F_{(r_\infty)}(\varphi^2\tau)=\{L_\infty,M_0,M_1,M_2\}=F_{(r_\infty)}(\varphi)=F_{(r_\infty)}(\tau)$ である。この場合タイプ 1 を得る。

$(\theta_\Delta(\tau),\theta_\Delta(\varphi\tau),\theta_\Delta(\varphi^2\tau))=(6,6,6)$ と仮定する。このとき $F_{(r_\infty)}(\varphi)\subseteq F_{(r_\infty)}(\tau)\cap F_{(r_\infty)}(\varphi\tau)\cap F_{(r_\infty)}(\varphi^2\tau)$ が成り立つ。$\tau,\ \varphi\tau,\ \varphi^2\tau$ の中心はすべて r_∞ である。もし $M^\varphi\neq M\ M^\tau=M,\ M^{\varphi\tau}=M$ となるような $M\in(r_\infty)$ が存在するならば $M=M^\varphi$ が成り立つ。何故なら, $M^\tau=M=M^{\varphi\tau}$ は $M=M^\varphi$ を導くので。これは矛盾である。従って $F_{(r_\infty)}(\tau)\cap F_{(r_\infty)}(\varphi\tau)=F_{(r_\infty)}(\varphi)$ である。同様な議論により $F_{(r_\infty)}(\tau)\cap F_{(r_\infty)}(\varphi^2\tau)=F_{(r_\infty)}(\varphi\tau)\cap F_{(r_\infty)}(\varphi^2\tau)=F_{(r_\infty)}(\varphi)$ が成り立つ。この場合タイプ 2 を得る。 □

補題 2.7 と補題 3.3 の証明で用いられた議論はこのノートにおける典型的な幾何的かつ置換群論的議論である。このノートの残りでは各補題等の証明は省略し結果だけ述べることにする。なおタイプ 1, タイプ 2 等における記述により群 G の $\mathrm{STD}_1[12,12]$ である $\mathcal{D}$ の点とブロック上の作用 (それを含む位数 12 の射影平面の点と直線上の作用) が明確に決められる。これについては

§5.1 と §6.10 で述べる。

補題 3.4 もし場合 3 が起こるならば, 次の 3 タイプのどれか一つが起こる。

タイプ 3 (i) $G = \langle\varphi,\tau\rangle$,
$\widetilde{\varphi} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3,\mathcal{P}_4,\mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6,\mathcal{P}_7,\mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9,\mathcal{P}_{10},\mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\varphi}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4,\mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6,\mathcal{B}_7,\mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9,\mathcal{B}_{10},\mathcal{B}_{11})$,
$\widetilde{\tau} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3,\mathcal{P}_6,\mathcal{P}_9)(\mathcal{P}_4,\mathcal{P}_7,\mathcal{P}_{10})(\mathcal{P}_5,\mathcal{P}_8,\mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\tau}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_6,\mathcal{B}_9)(\mathcal{B}_4,\mathcal{B}_7,\mathcal{B}_{10})(\mathcal{B}_5,\mathcal{B}_8,\mathcal{B}_{11})$
(ii) $\varphi,\ \tau,\ \varphi\tau,\ \varphi^2\tau$ のそれぞれは $\mathcal{P}_i$ $(0 \le i \le 2)$ の 3 点と $\mathcal{B}_j$ $(0 \le j \le 2)$ の 3 ブロックを固定する。$F_{\mathcal{P}}(\varphi)$, $F_{\mathcal{P}}(\tau)$, $F_{\mathcal{P}}(\varphi\tau)$, $F_{\mathcal{P}}(\varphi^2\tau)$ の任意の 2 つの点集合は互いに交わらない。$F_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $F_{\mathcal{B}}(\tau)$, $F_{\mathcal{B}}(\varphi\tau)$, $F_{\mathcal{B}}(\varphi^2\tau)$ の任意の 2 つのブロック集合は互いに交わらない。

タイプ 4 (i) $G = \langle\varphi,\tau\rangle$,
$\widetilde{\varphi} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3,\mathcal{P}_4,\mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6,\mathcal{P}_7,\mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9,\mathcal{P}_{10},\mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\varphi}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4,\mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6,\mathcal{B}_7,\mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9,\mathcal{B}_{10},\mathcal{B}_{11})$,
$\widetilde{\tau} = (\mathcal{P}_0,\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3,\mathcal{P}_6,\mathcal{P}_9)(\mathcal{P}_4,\mathcal{P}_7,\mathcal{P}_{10})(\mathcal{P}_5,\mathcal{P}_8,\mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\tau}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_6,\mathcal{B}_9)(\mathcal{B}_4,\mathcal{B}_7,\mathcal{B}_{10})(\mathcal{B}_5,\mathcal{B}_8,\mathcal{B}_{11})$
(ii) φ は $\mathcal{P}_i$ $(0 \le i \le 2)$ の 3 点と $\mathcal{B}_j$ $(0 \le j \le 2)$ の 3 ブロックを固定する。G は $F_{\mathcal{B}_0}(\varphi)$ の任意のブロックを固定する。G は $\mathcal{B}_0 \backslash F_{\mathcal{B}_0}(\varphi)$, $\mathcal{B}_1 \backslash F_{\mathcal{B}_1}(\varphi)$, $\mathcal{B}_2 \backslash F_{\mathcal{B}_2}(\varphi)$ の各ブロック集合上半正則に作用する。$\langle\tau\rangle$ は $F_{\mathcal{B}_1}(\varphi)$ と $F_{\mathcal{B}_2}(\varphi)$ の両方のブロック集合上正則に作用する。

タイプ 5 (i) $G = \langle\varphi,\tau\rangle$,
$\widetilde{\varphi} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3,\mathcal{P}_4,\mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6,\mathcal{P}_7,\mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9,\mathcal{P}_{10},\mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\varphi}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4,\mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6,\mathcal{B}_7,\mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9,\mathcal{B}_{10},\mathcal{B}_{11})$,
$\widetilde{\tau} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3,\mathcal{P}_6,\mathcal{P}_9)(\mathcal{P}_4,\mathcal{P}_7,\mathcal{P}_{10})(\mathcal{P}_5,\mathcal{P}_8,\mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\tau}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_6,\mathcal{B}_9)(\mathcal{B}_4,\mathcal{B}_7,\mathcal{B}_{10})(\mathcal{B}_5,\mathcal{B}_8,\mathcal{B}_{11})$
(ii) φ は $\mathcal{P}_i$ $(0 \le i \le 2)$ の 3 点と $\mathcal{B}_j$ $(0 \le j \le 2)$ の 3 ブロックを固定する。$\langle\tau\rangle$ は $F_{\mathcal{P}_i}(\varphi)$ $(0 \le i \le 2)$ と $F_{\mathcal{B}_j}(\varphi)$ $(0 \le j \le 2)$ 上正則に作用する。G は $\mathcal{P}_i \backslash F_{\mathcal{P}_i}(\varphi)$ $(0 \le i \le 2)$ と $\mathcal{B}_j \backslash F_{\mathcal{B}_j}(\varphi)$ $(0 \le j \le 2)$ 上正則に作用する。

次の補題は補題 3.6 を証明するのに必要である。

補題 3.5 $G = \langle\varphi,\tau\rangle$ とし, 場合 4 を仮定する。もし φ と τ が共に平面的で $F_\Omega(\varphi) \cap F_\Omega(\tau) = \emptyset$ であるならば $F_{(L_\infty)}(\varphi) = F_{(L_\infty)}(\tau)$ である。

補題 3.6 もし場合 4 が起こるならば, 次の 3 つのタイプのどれか一つが π の双対性を無視して起こる。

タイプ 6 (i) $G = \langle\varphi,\tau\rangle$,

$\widetilde{\varphi} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\varphi}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$,
$\widetilde{\tau} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\tau}} = (\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$
(ii) φ は $\mathcal{P}_i$ $(0 \le i \le 2)$ の 3 点と $\mathcal{B}_j$ $(0 \le j \le 2)$ の 3 ブロックを固定する。$\langle \varphi^2\tau \rangle$ は $\mathcal{P}_i$ と $\mathcal{B}_j$ $(3 \le i, j \le 11)$ の両方の上で半正則に作用する。

タイプ 7　(i) $G = \langle \varphi, \tau \rangle$,
$\widetilde{\varphi} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\varphi}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$,
$\widetilde{\tau} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_5, \mathcal{P}_4)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\tau}} = (\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_5, \mathcal{B}_4)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$
(ii) φ は $\mathcal{P}_i$ $(0 \le i \le 2)$ の 3 点と $\mathcal{B}_j$ $(0 \le j \le 2)$ の 3 ブロックを固定する。$\langle \varphi\tau \rangle$ は $\mathcal{P}_i$ と $\mathcal{B}_j$ $(3 \le i, j \le 5)$ の両方の上で半正則に作用する。$\langle \varphi^2\tau \rangle$ は $\mathcal{P}_i$ と $\mathcal{B}_j$ $(6 \le i, j \le 11)$ の両方の上で半正則に作用する。

タイプ 8　(i) $G = \langle \varphi, \tau \rangle$,
$\widetilde{\varphi} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\varphi}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$,
$\widetilde{\tau} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3)(\mathcal{P}_4)(\mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_8, \mathcal{P}_7)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\tau}} = (\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3)(\mathcal{B}_4)(\mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_8, \mathcal{B}_7)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$
(ii) φ は $\mathcal{P}_i$ $(0 \le i \le 2)$ の 3 点と $\mathcal{B}_j$ $(0 \le j \le 2)$ の 3 ブロックを固定する。$\langle \tau \rangle$ は $\mathcal{P}_i$ と $\mathcal{B}_j$ $(3 \le i, j \le 5)$ の両方の上で半正則に作用する。$\langle \varphi\tau \rangle$ は $\mathcal{P}_i$ と $\mathcal{B}_j$ $(6 \le i, j \le 8)$ の両方の上で半正則に作用する。$\langle \varphi^2\tau \rangle$ は $\mathcal{P}_i$ と $\mathcal{B}_j$ $(9 \le i, j \le 11)$ の両方の上で半正則に作用する。

補題 3.7　もし場合 5 が起こるならば π の双対性を無視して次のタイプが起こる。

タイプ 9　(i) $G = \langle \varphi, \tau \rangle$,
$\widetilde{\varphi} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\varphi}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$,
$\widetilde{\tau} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_6, \mathcal{P}_9)(\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_{10})(\mathcal{P}_5, \mathcal{P}_8, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\tau}} = (\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_6, \mathcal{B}_9)(\mathcal{B}_4, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_{10})(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_8, \mathcal{B}_{11})$
(ii) φ は $\mathcal{P}_i$ $(0 \le i \le 2)$ の 3 点と $\mathcal{B}_j$ $(0 \le j \le 2)$ の 3 ブロックを固定する。

以上より G が $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \backslash (L_\infty)$ 上半正則でなくて, $G \backslash \{1\}$ が平面的共線変換を含むならば, π の双対性を無視すると 9 つのタイプが起こることが分かった。

§4 G が π のアファイン点上半正則である場合

この節では仮定 2.1 のもとで次を仮定する。

仮定 4.1　G は $\mathcal{Q}\backslash(L_\infty)$ 上半正則である。

このときすべての $\mu \in G\backslash\{1\}$ は π の L_∞ を軸とする generalized elation である。

補題 4.2　場合 1 は起こらない。

補題 4.3　場合 2 は起こらない。

補題 4.4　もし場合 3 が起こるならば次のタイプが起こる。

タイプ 10　(i) $G = \langle\varphi, \tau\rangle$,
$\widetilde{\varphi} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\varphi}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$,
$\widetilde{\tau} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_6, \mathcal{P}_9)(\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_{10})(\mathcal{P}_5, \mathcal{P}_8, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\tau}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_6, \mathcal{B}_9)(\mathcal{B}_4, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_{10})(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_8, \mathcal{B}_{11})$
(ii) G は $\mathcal{P}$ 上半正則に作用し, $|F_{\mathcal{B}_0}(\tau)| = |F_{\mathcal{B}_0}(\varphi\tau)| = |F_{\mathcal{B}_0}(\varphi^2\tau)| = 3$ である。

補題 4.5　もし場合 4 が起こるならば, 次の 4 つのタイプのどれか一つが起こる。

タイプ 11　(i) $G = \langle\varphi, \tau\rangle$,
$\widetilde{\varphi} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\varphi}} = (\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$,
$\widetilde{\tau} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3)(\mathcal{P}_4)(\mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\tau}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3)(\mathcal{B}_4)(\mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$
(ii) G は $\mathcal{P}$ と $\mathcal{B}$ の両方の上で半正則に作用する。

タイプ 12　(i) $G = \langle\varphi, \tau\rangle$,
$\widetilde{\varphi} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\varphi}} = (\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$,
$\widetilde{\tau} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3)(\mathcal{P}_4)(\mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{11}, \mathcal{P}_{10})$,
$\widetilde{\widetilde{\tau}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3)(\mathcal{B}_4)(\mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{11}, \mathcal{B}_{10})$
(ii) G は $\mathcal{P}$ と $\mathcal{B}$ の両方の上で半正則に作用する。

タイプ 13　(i) $G = \langle\varphi, \tau\rangle$,
$\widetilde{\varphi} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\varphi}} = (\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$,
$\widetilde{\tau} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3)(\mathcal{P}_4)(\mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6)(\mathcal{P}_7)(\mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\tau}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3)(\mathcal{B}_4)(\mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6)(\mathcal{B}_7)(\mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$
(ii) G は $\mathcal{P}$ と $\mathcal{B}$ の両方の上で半正則に作用する。

タイプ 14　(i) $G = \langle \varphi, \tau \rangle$,
$\widetilde{\varphi} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\varphi}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$,
$\widetilde{\tau} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3)(\mathcal{P}_4)(\mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{11}, \mathcal{P}_{10})$,
$\widetilde{\widetilde{\tau}} = (\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3)(\mathcal{B}_4)(\mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{11}, \mathcal{B}_{10})$
(ii) G は $\mathcal{P}$ と $\mathcal{B}$ の両方の上で半正則に作用する。

補題 4.6　もし場合 5 が起こるならば次のタイプが起こる。

タイプ 15　(i) $G = \langle \varphi, \tau \rangle$,
$\widetilde{\varphi} = (\mathcal{P}_0)(\mathcal{P}_1)(\mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5)(\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8)(\mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\varphi}} = (\mathcal{B}_0)(\mathcal{B}_1)(\mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5)(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8)(\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_{11})$,
$\widetilde{\tau} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_6, \mathcal{P}_9)(\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_{10})(\mathcal{P}_5, \mathcal{P}_8, \mathcal{P}_{11})$,
$\widetilde{\widetilde{\tau}} = (\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_6, \mathcal{B}_9)(\mathcal{B}_4, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_{10})(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_8, \mathcal{B}_{11})$
(ii) G は $\mathcal{P}$ と $\mathcal{B}$ の両方の上で半正則に作用する。

以上より G が $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \backslash (L_\infty)$ 上半正則であるならば 6 つのタイプが起こることが分かった。

§5 タイプ 1,2,···,9

この節ではタイプ 1 からタイプ 9 までが起こらないことを示す。これは各タイプにおいて $\mathrm{STD}_1[12,12]$ の結合行列の一部分 (位数 3 の部分平面に対応する部分) を考えることによって示される。タイプ 1 についてのみ示し, 残りは省略する。

§5.1 タイプ 1

補題 3.3 のタイプ 1 から, φ と τ の $\mathcal{P}$ と $\mathcal{B}$ 上における作用を明確に決定することが出来る。

補題 5.1.1
$\varphi = (x_0)(x_1)(x_2)(x_3, x_4, x_5)(x_6, x_7, x_8)(x_9, x_{10}, x_{11})$
$(x_{12})(x_{13})(x_{14})(x_{15}, x_{16}, x_{17})(x_{18}, x_{19}, x_{20})(x_{21}, x_{22}, x_{23})$
$(x_{24})(x_{25})(x_{26})(x_{27}, x_{28}, x_{29})(x_{30}, x_{31}, x_{32})(x_{33}, x_{34}, x_{35})$
$(x_{36}, x_{48}, x_{60})(x_{37}, x_{49}, x_{61})(x_{38}, x_{50}, x_{62})(x_{39}, x_{51}, x_{63})$
$(x_{40}, x_{52}, x_{64})(x_{41}, x_{53}, x_{65})(x_{42}, x_{54}, x_{66})(x_{43}, x_{55}, x_{67})$
$(x_{44}, x_{56}, x_{68})(x_{45}, x_{57}, x_{69})(x_{46}, x_{58}, x_{70})(x_{47}, x_{59}, x_{71})$
$(x_{72}, x_{84}, x_{96})(x_{73}, x_{85}, x_{97})(x_{74}, x_{86}, x_{98})(x_{75}, x_{87}, x_{99})$
$(x_{76}, x_{88}, x_{100})(x_{77}, x_{89}, x_{101})(x_{78}, x_{90}, x_{102})(x_{79}, x_{91}, x_{103})$
$(x_{80}, x_{92}, x_{104})(x_{81}, x_{93}, x_{105})(x_{82}, x_{94}, x_{106})(x_{83}, x_{95}, x_{107})$
$(x_{108}, x_{120}, x_{132})(x_{109}, x_{121}, x_{133})(x_{110}, x_{122}, x_{134})(x_{111}, x_{123}, x_{135})$
$(x_{112}, x_{124}, x_{136})(x_{113}, x_{125}, x_{137})\ (x_{114}, x_{126}, x_{138})(x_{115}, x_{127}, x_{139})$
$(x_{116}, x_{128}, x_{140})(x_{117}, x_{129}, x_{141})\ (x_{118}, x_{130}, x_{142})(x_{119}, x_{131}, x_{143})$,

$\tau = (x_0, x_1, x_2)(x_3, x_6, x_9)(x_4, x_7, x_{10})(x_5, x_8, x_{11})$
$(x_{12}, x_{13}, x_{14})(x_{15}, x_{18}, x_{21})(x_{16}, x_{19}, x_{22})(x_{17}, x_{20}, x_{23})$
$(x_{24}, x_{25}, x_{26})(x_{27}, x_{30}, x_{33})(x_{28}, x_{31}, x_{34})(x_{29}, x_{32}, x_{35})$
$(x_{36}, x_{61}, x_{50})(x_{37}, x_{62}, x_{48})(x_{38}, x_{60}, x_{49})(x_{39}, x_{64}, x_{53})$

$(x_{40}, x_{65}, x_{51})(x_{41}, x_{63}, x_{52})(x_{42}, x_{67}, x_{56})(x_{43}, x_{68}, x_{54})$
$(x_{44}, x_{66}, x_{55})(x_{45}, x_{70}, x_{59})(x_{46}, x_{71}, x_{57})(x_{47}, x_{69}, x_{58})$
$(x_{72}, x_{85}, x_{98})(x_{73}, x_{86}, x_{96})(x_{74}, x_{84}, x_{97})(x_{75}, x_{88}, x_{101})$
$(x_{76}, x_{89}, x_{99})(x_{77}, x_{87}, x_{100})(x_{78}, x_{91}, x_{104})(x_{79}, x_{92}, x_{102})$
$(x_{80}, x_{90}, x_{103})(x_{81}, x_{94}, x_{107})(x_{82}, x_{95}, x_{105})(x_{83}, x_{93}, x_{106})$
$(x_{108}, x_{121}, x_{134})(x_{109}, x_{122}, x_{132})(x_{110}, x_{120}, x_{133})(x_{111}, x_{124}, x_{137})$
$(x_{112}, x_{125}, x_{135})(x_{113}, x_{123}, x_{136})(x_{114}, x_{127}, x_{140})(x_{115}, x_{128}, x_{138})$
$(x_{116}, x_{126}, x_{139})(x_{117}, x_{130}, x_{143})(x_{118}, x_{131}, x_{141})(x_{119}, x_{129}, x_{142})$,
ここで $x \in \{p, B\}$ である。

補題 5.1.2 (i) $\{0,1\}$ 上の 3×3 行列 $X = \begin{pmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,0} & x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix} = (x_{i,j})_{0\le i,j\le 2}$ と $f, g \in \mathrm{Sym}\{0,1,2\}$ に対して，$X^{(f,g)} = (y_{i,j})_{0\le i,j\le 2}$ を $y_{i,j} = x_{i^{f^{-1}}, j^{g^{-1}}}$ $(0 \le i, j \le 2)$ で定義する。特に $r, s \in \{1,2\}$ に対して $X^{(f^r, f^s)} = X^{(r,s)}$ とおく。ここで $f = (0,1,2)$ である。

(ii) Φ_1 を $\{0,1\}$ 上の 12×12 行列 $\left(\begin{array}{c|ccc} C_0 & O_3 & O_3 & O_3 \\ \hline O_3 & C_1 & C_2 & C_3 \\ O_3 & C_3 & C_1 & C_2 \\ O_3 & C_2 & C_3 & C_1 \end{array}\right)$ 全体からなる集合とする。ここで C_i $(0 \le i \le 3)$ は 3×3 巡回行列である。

(iii) Φ_2 を $\{0,1\}$ 上の 12×12 行列 $\begin{pmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ {X_0}^{(1,1)} & {X_1}^{(1,1)} & {X_2}^{(1,1)} & {X_3}^{(1,1)} \\ {X_0}^{(2,2)} & {X_1}^{(2,2)} & {X_2}^{(2,2)} & {X_3}^{(2,2)} \end{pmatrix}$ 全体からなる集合とする。ここで C_i $(0 \le i \le 3)$ は巡回行列で X_i $(0 \le i \le 3)$ は 3×3 行列である。

(iv) Φ_3 を $\{0,1\}$ 上の 12×12 行列 $\begin{pmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ {X_0}^{(2,1)} & {X_1}^{(2,1)} & {X_2}^{(2,1)} & {X_3}^{(2,1)} \\ {X_0}^{(1,2)} & {X_1}^{(1,2)} & {X_2}^{(1,2)} & {X_3}^{(1,2)} \end{pmatrix}$ 全体からなる集合とする。ここで C_i $(0 \le i \le 3)$ は巡回行列で X_i $(0 \le i \le 3)$ は 3×3 行列である。

(v) $X = (x_{i,j})_{0\le i,j\le 11}$ と $f \in \mathrm{Sym}\ \{0,1,\cdots,11\}$ に対して，$\{0,1\}$ 上の 12×12 行列 $X^f = (y_{i,j})_{0\le i,j\le 11}$ を $y_{i,j} = x_{i^{f^{-1}}, j}$ $(0 \le i, j \le 11)$ で定義する。

補題 5.1.3 点とブロックの番号付け $p_0, \cdots, p_{143}$, $B_0, \cdots, B_{143}$ に対応するタイプ 1 の $\mathcal{D}$ の結合行列の最初の 36 行は

$$H_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} S_0 & S_1 & S_2 & A_0 & {A_0}^f & {A_0}^{f^2} & A_1 & {A_1}^f & {A_1}^{f^2} & A_2 & {A_2}^f & {A_2}^{f^2} \\ S_3 & S_4 & S_5 & B_0 & {B_0}^f & {B_0}^{f^2} & B_1 & {B_1}^f & {B_1}^{f^2} & B_2 & {B_2}^f & {B_2}^{f^2} \\ S_6 & S_7 & S_8 & C_0 & {C_0}^f & {C_0}^{f^2} & C_1 & {C_1}^f & {C_1}^{f^2} & C_2 & {C_2}^f & {C_2}^{f^2} \end{array}\right)$$

で与えられる。ここで $S_0, \cdots, S_8 \in \Phi_1$, $A_0, B_0, C_0 \in \Phi_2$, $A_i, B_i, C_i \in \Phi_3$ $(i = 1, 2)$, $f = (0)(1)(2)(3,4,5)(6,7,8)(9,10,11)$ である。

補題 5.1.4 補題 5.1.3 の行列 H_1 は存在しない。従ってタイプ 1 は起こらない。

証明 $H_1H_1^T = \begin{pmatrix} I_{12} & J_{12} & J_{12} \\ J_{12} & I_{12} & J_{12} \\ J_{12} & J_{12} & I_{12} \end{pmatrix}$ が成り立たなければならない。しかしながらコンピュータを用いてこのような行列 H_1 は存在しないことがわかる。ここで I_{12} は 12 次の単位行列で J_{12} は 12×12 全 1 行列である。 □

同様な議論よりタイプ 2,$\cdots$, タイプ 9 が起こらないことが分かる。

§6 タイプ 10,11,$\cdots$,15

この節ではタイプ 10 からタイプ 15 までを考える。現時点ではタイプ 15 以外は起こらないことが分かっている。特にタイプ 10 が起こらないことを示すことにする。なお現在タイプ 15 について計算中である。

§6.10 タイプ 10

補題 4.4 のタイプ 10 から, φ と τ の $\mathcal{P}$ と $\mathcal{B}$ 上における作用を明確に決定することが出来る。

補題 6.10.1
$\varphi = (x_0, x_1, x_2)(x_3, x_4, x_5)(x_6, x_7, x_8)(x_9, x_{10}, x_{11})$
$(x_{12}, x_{13}, x_{14})(x_{15}, x_{16}, x_{17})(x_{18}, x_{19}, x_{20})(x_{21}, x_{22}, x_{23})$
$(x_{24}, x_{25}, x_{26})(x_{27}, x_{28}, x_{29})(x_{30}, x_{31}, x_{32})(x_{33}, x_{34}, x_{35})$
$(x_{36}, x_{48}, x_{60})(x_{37}, x_{49}, x_{61})(x_{38}, x_{50}, x_{62})(x_{39}, x_{51}, x_{63})$
$(x_{40}, x_{52}, x_{64})(x_{41}, x_{53}, x_{65})(x_{42}, x_{54}, x_{66})(x_{43}, x_{55}, x_{67})$
$(x_{44}, x_{56}, x_{68})(x_{45}, x_{57}, x_{69})(x_{46}, x_{58}, x_{70})(x_{47}, x_{59}, x_{71})$
$(x_{72}, x_{84}, x_{96})(x_{73}, x_{85}, x_{97})(x_{74}, x_{86}, x_{98})(x_{75}, x_{87}, x_{99})$
$(x_{76}, x_{88}, x_{100})(x_{77}, x_{89}, x_{101})(x_{78}, x_{90}, x_{102})(x_{79}, x_{91}, x_{103})$
$(x_{80}, x_{92}, x_{104})(x_{81}, x_{93}, x_{105})(x_{82}, x_{94}, x_{106})(x_{83}, x_{95}, x_{107})$
$(x_{108}, x_{120}, x_{132})(x_{109}, x_{121}, x_{133})(x_{110}, x_{122}, x_{134})(x_{111}, x_{123}, x_{135})$
$(x_{112}, x_{124}, x_{136})(x_{113}, x_{125}, x_{137})(x_{114}, x_{126}, x_{138})(x_{115}, x_{127}, x_{139})$
$(x_{116}, x_{128}, x_{140})(x_{117}, x_{129}, x_{141})(x_{118}, x_{130}, x_{142})(x_{119}, x_{131}, x_{143})$,
ここで $x \in \{p, B\}$ である。
$\tau = (p_0, p_{12}, p_{24})(p_1, p_{13}, p_{25})(p_2, p_{14}, p_{26})(p_3, p_{15}, p_{27})$
$(p_4, p_{16}, p_{28})(p_5, p_{17}, p_{29})(p_6, p_{18}, p_{30})(p_7, p_{19}, p_{31})$
$(p_8, p_{20}, p_{32})(p_9, p_{21}, p_{33})(p_{10}, p_{22}, p_{34})(p_{11}, p_{23}, p_{35})$
$(p_{36}, p_{72}, p_{108})(p_{37}, p_{73}, p_{109})(p_{38}, p_{74}, p_{110})(p_{39}, p_{75}, p_{111})$
$(p_{40}, p_{76}, p_{112})(p_{41}, p_{77}, p_{113})(p_{42}, p_{78}, p_{114})(p_{43}, p_{79}, p_{115})$
$(p_{44}, p_{80}, p_{116})(p_{45}, p_{81}, p_{117})(p_{46}, p_{82}, p_{118})(p_{47}, p_{83}, p_{119})$
$(p_{48}, p_{84}, p_{120})(p_{49}, p_{85}, p_{121})(p_{50}, p_{86}, p_{122})(p_{51}, p_{87}, p_{123})$
$(p_{52}, p_{88}, p_{124})(p_{53}, p_{89}, p_{125})(p_{54}, p_{90}, p_{126})(p_{55}, p_{91}, p_{127})$
$(p_{56}, p_{92}, p_{128})(p_{57}, p_{93}, p_{129})(p_{58}, p_{94}, p_{130})(p_{59}, p_{95}, p_{131})$
$(p_{60}, p_{96}, p_{132})(p_{61}, p_{97}, p_{133})(p_{62}, p_{98}, p_{134})(p_{63}, p_{99}, p_{135})$
$(p_{64}, p_{100}, p_{136})(p_{65}, p_{101}, p_{137})(p_{66}, p_{102}, p_{138})(p_{67}, p_{103}, p_{139})$
$(p_{68}, p_{104}, p_{140})(p_{69}, p_{105}, p_{141})(p_{70}, p_{106}, p_{142})(p_{71}, p_{107}, p_{143})$,
$\tau = (B_0)(B_1)(B_2)(B_3, B_6, B_9)(B_4, B_7, B_{10})(B_5, B_8, B_{11})$
$(B_{12}, B_{14}, B_{13})(B_{15}, B_{18}, B_{21})(B_{16}, B_{19}, B_{22})(B_{17}, B_{20}, B_{23})$
$(B_{24}, B_{25}, B_{26})(B_{27}, B_{30}, B_{33})(B_{28}, B_{31}, B_{34})(B_{29}, B_{32}, B_{35})$
$(B_{36}, B_{72}, B_{108})(B_{37}, B_{73}, B_{109})(B_{38}, B_{74}, B_{110})(B_{39}, B_{75}, B_{111})$
$(B_{40}, B_{76}, B_{112})(B_{41}, B_{77}, B_{113})(B_{42}, B_{78}, B_{114})(B_{43}, B_{79}, B_{115})$
$(B_{44}, B_{80}, B_{116})(B_{45}, B_{81}, B_{117})(B_{46}, B_{82}, B_{118})(B_{47}, B_{83}, B_{119})$

$(B_{48}, B_{84}, B_{120})(B_{49}, B_{85}, B_{121})(B_{50}, B_{86}, B_{122})(B_{51}, B_{87}, B_{123})$
$(B_{52}, B_{88}, B_{124})(B_{53}, B_{89}, B_{125})(B_{54}, B_{90}, B_{126})(B_{55}, B_{91}, B_{127})$
$(B_{56}, B_{92}, B_{128})(B_{57}, B_{93}, B_{129})(B_{58}, B_{94}, B_{130})(B_{59}, B_{95}, B_{131})$
$(B_{60}, B_{96}, B_{132})(B_{61}, B_{97}, B_{133})(B_{62}, B_{98}, B_{134})(B_{63}, B_{99}, B_{135})$
$(B_{64}, B_{100}, B_{136})(B_{65}, B_{101}, B_{137})(B_{66}, B_{102}, B_{138})(B_{67}, B_{103}, B_{139})$
$(B_{68}, B_{104}, B_{140})(B_{69}, B_{105}, B_{141})(B_{70}, B_{106}, B_{142})(B_{71}, B_{107}, B_{143})$

補題 6.10.2
(i) G は $\mathcal{P}$ 上次の 16 個の軌道を持つ。

$\mathcal{Q}_0 = \{p_0, p_1, p_2, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{24}, p_{25}, p_{26}\}$,
$\mathcal{Q}_1 = \{p_3, p_4, p_5, p_{15}, p_{16}, p_{17}, p_{27}, p_{28}, p_{29}\}$,
$\mathcal{Q}_2 = \{p_6, p_7, p_8, p_{18}, p_{19}, p_{20}, p_{30}, p_{31}, p_{32}\}$,
$\mathcal{Q}_3 = \{p_9, p_{10}, p_{11}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{33}, p_{34}, p_{35}\}$,
$\mathcal{Q}_4 = \{p_{36}, p_{48}, p_{60}, p_{72}, p_{84}, p_{96}, p_{108}, p_{120}, p_{132}\}$,
$\mathcal{Q}_5 = \{p_{37}, p_{49}, p_{61}, p_{73}, p_{85}, p_{97}, p_{109}, p_{121}, p_{133}\}$,
$\mathcal{Q}_6 = \{p_{38}, p_{50}, p_{62}, p_{74}, p_{86}, p_{98}, p_{110}, p_{122}, p_{134}\}$,
$\mathcal{Q}_7 = \{p_{39}, p_{51}, p_{63}, p_{75}, p_{87}, p_{99}, p_{111}, p_{123}, p_{135}\}$,
$\mathcal{Q}_8 = \{p_{40}, p_{52}, p_{64}, p_{76}, p_{88}, p_{100}, p_{122}, p_{124}, p_{136}\}$,
$\mathcal{Q}_9 = \{p_{41}, p_{53}, p_{65}, p_{77}, p_{89}, p_{101}, p_{113}, p_{125}, p_{137}\}$,
$\mathcal{Q}_{10} = \{p_{42}, p_{54}, p_{66}, p_{78}, p_{90}, p_{102}, p_{114}, p_{126}, p_{138}\}$,
$\mathcal{Q}_{11} = \{p_{43}, p_{55}, p_{67}, p_{79}, p_{91}, p_{103}, p_{115}, p_{127}, p_{139}\}$,
$\mathcal{Q}_{12} = \{p_{44}, p_{56}, p_{68}, p_{80}, p_{92}, p_{104}, p_{116}, p_{128}, p_{140}\}$,
$\mathcal{Q}_{13} = \{p_{45}, p_{57}, p_{69}, p_{81}, p_{93}, p_{105}, p_{117}, p_{129}, p_{141}\}$,
$\mathcal{Q}_{14} = \{p_{46}, p_{58}, p_{70}, p_{82}, p_{94}, p_{106}, p_{118}, p_{130}, p_{142}\}$,
$\mathcal{Q}_{15} = \{p_{47}, p_{59}, p_{71}, p_{83}, p_{95}, p_{107}, p_{119}, p_{131}, p_{143}\}$
(ii) G は $\mathcal{B}$ は次の 18 個の軌道を持つ。

$\mathcal{C}_0 = \{B_0, B_1, B_2\}$,
$\mathcal{C}_1 = \{B_{12}, B_{13}, B_{14}\}$,
$\mathcal{C}_2 = \{B_{24}, B_{25}, B_{26}\}$,
$\mathcal{C}_3 = \{B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}\}$,
$\mathcal{C}_4 = \{B_{15}, B_{16}, B_{17}, B_{18}, B_{19}, B_{20}, B_{21}, B_{22}, B_{23}\}$,
$\mathcal{C}_5 = \{B_{27}, B_{28}, B_{29}, B_{30}, B_{31}, B_{32}, B_{33}, B_{34}, B_{35}\}$,
$\mathcal{C}_6 = \{B_{36}, B_{48}, B_{60}, B_{72}, B_{84}, B_{96}, B_{108}, B_{120}, B_{132}\}$,
$\mathcal{C}_7 = \{B_{37}, B_{49}, B_{61}, B_{73}, B_{85}, B_{97}, B_{109}, B_{121}, B_{133}\}$,
$\mathcal{C}_8 = \{B_{38}, B_{50}, B_{62}, B_{74}, B_{86}, B_{98}, B_{110}, B_{122}, B_{134}\}$,
$\mathcal{C}_9 = \{B_{39}, B_{51}, B_{63}, B_{75}, B_{87}, B_{99}, B_{111}, B_{123}, B_{135}\}$,
$\mathcal{C}_{10} = \{B_{40}, B_{52}, B_{64}, B_{76}, B_{88}, B_{100}, B_{122}, B_{124}, B_{136}\}$,
$\mathcal{C}_{11} = \{B_{41}, B_{53}, B_{65}, B_{77}, B_{89}, B_{101}, B_{113}, B_{125}, B_{137}\}$,
$\mathcal{C}_{12} = \{B_{42}, B_{54}, B_{66}, B_{78}, B_{90}, B_{102}, B_{114}, B_{126}, B_{138}\}$,
$\mathcal{C}_{13} = \{B_{43}, B_{55}, B_{67}, B_{79}, B_{91}, B_{103}, B_{115}, B_{127}, B_{139}\}$,
$\mathcal{C}_{14} = \{B_{44}, B_{56}, B_{68}, B_{80}, B_{92}, B_{104}, B_{116}, B_{128}, B_{140}\}$,
$\mathcal{C}_{15} = \{B_{45}, B_{57}, B_{69}, B_{81}, B_{93}, B_{105}, B_{117}, B_{129}, B_{141}\}$,
$\mathcal{C}_{16} = \{B_{46}, B_{58}, B_{70}, B_{82}, B_{94}, B_{106}, B_{118}, B_{130}, B_{142}\}$,
$\mathcal{C}_{17} = \{B_{47}, B_{59}, B_{71}, B_{83}, B_{95}, B_{107}, B_{119}, B_{131}, B_{143}\}$

$q_0 = p_0$, $q_1 = p_3$, $q_2 = p_6$, $q_3 = p_9$, $q_4 = p_{36}$, $q_5 = p_{37}$,
$q_6 = p_{38}$, $q_7 = p_{39}$, $q_8 = p_{40}$, $q_9 = p_{41}$, $q_{10} = p_{42}$, $q_{11} = p_{43}$,
$q_{12} = p_{44}$, $q_{13} = p_{45}$, $q_{14} = p_{46}$, $q_{15} = p_{47}$,
$C_0 = B_0$, $C_1 = B_{12}$, $C_2 = B_{24}$, $C_3 = B_3$, $C_4 = B_{15}$, $C_5 = B_{27}$,
$C_6 = B_{36}$, $C_7 = B_{37}$, $C_8 = B_{38}$, $C_9 = B_{39}$, $C_{10} = B_{40}$, $C_{11} = B_{41}$,
$C_{12} = B_{42}$, $C_{13} = B_{43}$, $C_{14} = B_{44}$, $C_{15} = B_{45}$, $C_{16} = B_{46}$, $C_{17} = B_{47}$
とおく。$0 \leq i \leq 17$, $0 \leq j \leq 15$ に対して $m_{i,j} = |\mathcal{C}_i \cap (q_j)|$, $D_{i,j} = \{\alpha \in G |\ C_i{}^{\alpha} \in (q_j)\}$ とおく。このとき $m_{i,j} = |D_{i,j}|$ $(0 \leq i \leq 17,\ 0 \leq j \leq 15)$ で

ある。各 $m_{i,j}$ は C_i と q_j の取り方によらず $\mathcal{C}_i$ と $\mathcal{Q}_j$ にのみに依存して決まる。また $M=(m_{i,j})_{0\le i\le 17,\ 0\le j\le 15}$ とおく。

補題 6.10.3　(i) $0\le i,i'(\neq)\le 17$ に対して

$$\sum_{j=0}^{15} D_{i,j}{D_{i',j}}^{(-1)}=\begin{cases}0 & \text{if } \{i,i'\}\in\{\{0,3\},\ \{1,4\},\ \{2,5\}\}\\ G\backslash\{1\} & \text{if } 6\le i,i'(\neq)\le 17\\ G & \text{otherwise}\end{cases}$$

(ii) $0\le i\le 17$ に対して

$$\sum_{j=0}^{15} D_{i,j}{D_{i,j}}^{(-1)}=\begin{cases}12\langle\tau\rangle & \text{if } i=0\\ 12\langle\varphi\tau\rangle & \text{if } i=1\\ 12\langle\varphi^2\tau\rangle & \text{if } i=2\\ 12 & \text{if } 3\le i\le 5\\ 12+G\backslash\{1\} & \text{if } 6\le i\le 17\end{cases}$$

補題 6.10.3 の各等式に自明な指標を施して次の補題を得る。

補題 6.10.4　(i) $0\le i,i'(\neq)\le 17$ に対して

$$\sum_{j=0}^{15} m_{i,j}m_{i',j}=\begin{cases}0 & \text{if } \{i,i'\}\in\{\{0,3\},\ \{1,4\},\ \{2,5\}\}\\ 8 & \text{if } 6\le i,i'(\neq)\le 17\\ 9 & \text{otherwise}\end{cases}$$

(ii) $0\le i\le 17$ に対して

$$\sum_{j=0}^{15} {m_{i,j}}^2=\begin{cases}36 & \text{if } 0\le i\le 2\\ 12 & \text{if } 3\le i\le 5\\ 20 & \text{if } 6\le i\le 17\end{cases}$$

(iii) $0\le i\le 17$ に対して

$$\sum_{j=0}^{15} m_{i,j}=12$$

補題 6.10.5　$0\le i\le 17$ に対して $m_{i,0},m_{i,1},\cdots,m_{i,15}$ は順序を無視して次に一致する。

(i) $0\le i\le 2$ ならば, $\underbrace{0\,0\cdots 0}_{12}\ 3\,3\,3\,3$, $\underbrace{0\,0\cdots 0}_{11}\ 1\,1\,3\,3\,4$, $\underbrace{0\,0\cdots 0}_{10}\ 1\,1\,1\,1\,4\,4$ または $\underbrace{0\,0\cdots 0}_{10}\ 1\,1\,1\,2\,2\,5$

(ii) $3\le i\le 5$ ならば, $0\,0\,0\,0\ \underbrace{1\,1\cdots 1}_{12}$

(iii)$6\le i\le 17$ ならば, $\underbrace{0\,0\cdots 0}_{8}\ 1\,1\,1\,1\,2\,2\,2\,2$, または $\underbrace{0\,0\cdots 0}_{7}\ \underbrace{1\,1\cdots 1}_{7}\ 2\,3$

補題 6.10.6 M は行と列を適当に入れ替えると次の行列に一致する。

$$M = \left(\begin{array}{cccccccccccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&3&0&3&3\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&3&0&0&3&0&3\\
0&0&0&0&0&0&0&3&3&0&0&0&0&3&3&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&0&1&0\\
1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&0&0&1\\
\hline
0&0&0&0&1&1&2&0&3&1&1&1&1&0&0&1\\
1&1&1&1&0&0&3&1&0&0&0&0&0&1&1&2\\
0&0&0&2&0&2&1&1&0&0&2&0&2&1&1&0\\
0&0&2&0&0&2&1&1&0&2&0&2&0&1&1&0\\
0&0&2&2&2&0&0&0&1&0&0&1&1&2&0&1\\
0&2&0&0&2&0&1&1&0&0&2&2&0&1&1&0\\
0&2&0&2&1&1&0&0&1&2&0&0&0&0&2&1\\
0&2&2&0&0&0&0&2&1&1&1&0&2&0&0&1\\
2&0&0&0&2&0&1&1&0&2&0&0&2&1&1&0\\
2&0&0&2&0&0&0&2&1&1&1&2&0&0&0&1\\
2&0&2&0&1&1&0&0&1&0&2&0&0&0&2&1\\
2&2&0&0&0&2&0&0&1&0&0&1&1&2&0&1
\end{array}\right)$$

補題 6.10.7 補題 6.10.6 の行列 M に対応する $(D_{i,j})_{0\leq i\leq 17,\ 0\leq j\leq 15}$ は存在しない。従ってタイプ 10 は起こらない。

§6.10 におけるのと似た議論よりタイプ 11,$\cdots$, タイプ 14 も起こらないことを示すことが出来る。しかしながらこれらのタイプは, タイプ 10 で得られた行列 M に対応する行列を持たない。

文献

[AS1] K. Akiyama and C. Suetake, The nonexistence of projective planes of order 12 with a collineation group of order 8, J. Combin. Designs 16 (2008), 411-430.

[AS2] K. Akiyama and C. Suetake, On projective planes of order 12 with a collineation group of order 9, Australas. J. Combin. 43 (2009), 133-162.

[HP] D. R. Hughes and F. C. Piper, Projective planes, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[JT] Z. Janko and T. van Trung, Projective planes of order 12 do not posses an elation of order 3, Stud. Sci. Math. 16 (1981), 115-118.

[K] M. J. Kallaher, Affine planes with transitive collineation groups, North Holland, New York, Amsterdam, Oxford, 1982.

[LKT] C. W. H. Lam, G. Kolesova and L. Thiel, A computer search for finite projective planes of order 9, Discrete Math. 92(1991), 187-195.

[LTS] C. W. H. Lam, L. Thiel and S. Swiercz, The nonexistence of finite projective planes of order 10, Canad. J. Math. (1989), 1117-1123.

その後の計算

タイプ 15 を片付けるのに多少手間取ったが, 2018 年 3 月 5 日に計算が終了し最終的な結論が得られたので報告します。

補題　タイプ 15 では非同値な (すなわち, 行と列の入れ替えで一致しない) 行列 $M = (m_{i,j})_{0\le i,j\le 15}$ の総数は 119 である。これらはいずれも対応する $(D_{i,j})_{0\le i,j\le 15}$ $(|D_{i,j}| = m_{i,j},\ D_{i,j} \subseteq \mathbb{Z}[G]\ \ (0 \le i,j \le 15))$ を持たない。ここで, 大半の M は $\{0,1,2\}$ 上の行列であり, 残り 13 個の行列は成分として 3 を含むことを注意しておく。

従って, 次の定理と系を得る。

Theorem　*There are no projective planes of order* 12 *addmitting a collineation group of order* 9.

Corollary　*If G is a collineation group of a projective plane π of order* 12, *then G is cyclic and $|G|$ divides* 3 *or* 4.