数理解析研究所講究録 第2088巻 2018年 23-26

2人単貧民の必勝判定とその拡張

木谷 裕紀, 小野 廣隆
Hironori Kiya, Hirotaka Ono
名古屋大学大学院情報学研究科数理情報学専攻
Department of Mathematical Informatics, Graduate School of Informatics,
Nagoya University

1 はじめに

大貧民はトランプカードゲームの中でも全国的に認知度, 人気が高い遊びであり, 大富豪という名前でも遊ばれている. このゲームは不完全情報多人数ゲームであるため, 一般には最適戦略が存在しない, あるいは求めることが困難である. 近年, 将棋やオセロなどの完全情報ゲームに関する研究と共に, 大貧民のような不完全情報ゲームの研究も進んでいる. 2006 年度から毎年コンピューター大貧民大会が電気通信大学で開催され, 「強い」大貧民 AI の開発を競う場となっている. 2015 年, プロ棋士に対する勝利宣言が出された将棋コンテスト同様, 日々コンピューター大貧民 AI の実力も向上しているがまだまだ成長の余地がある.

このような大貧民研究の一環として電気通信大学の西野は単貧民というゲームを定義した [1]. 単貧民は大貧民に

- 特殊ルールが一切存在しない,
- 1 枚出しのみを認める,
- 手札は公開で行われる,

という制約を課したものであり, 大貧民を単純化かつ完全情報多人数ゲーム化したものと言える.

本研究では 2 人で行う単貧民について扱う. 二人単貧民は完全情報型の 2 人ゲームとなるため, いずれかのプレイヤーに必勝戦略が常に存在する. しかし, 将棋や囲碁の例からも明らかなように, 完全情報型の 2 人ゲームにおける必勝戦略の存在性とそれを具体的に知ることには大きな隔たりがある. これに対し著者らはこれまで二人単貧民において初期手札が対称の場合 [3] や任意の初期手札における具体的な必勝戦略を与える研究を行ってきた [2].

本研究ではこれまで考えてきた一般化した二人単貧民の任意の時点における必勝戦略保持者を判定する問題を考える. 上述の研究は初期手札に対する勝者判定を扱った. ここではゲーム途中での判定も扱うことになる. この問題に対し, 与えられた手札の組からの必勝プレイヤー判定とその具体的な戦略を札の枚数 n に対してソート済みの手札であれば $O(n)$ 時間で求めることができることを示す.

2　準備

2.1　単貧民のルール

まず二人単貧民を以下のようにモデル化する: 各プレイヤーの**手札集合**を $\{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合の形で与える. 簡単のためそれぞれの手札集合は単純集合として説明するが, 多重集合であっても良い. また, 両プレイヤーが同じ値の札を持っていてもよい. プレイヤーに配布された札 (**手札**と呼ぶ) の札数は必ずしも等しくなくてよい. 札の番号は強さを表し, 大きいほど強いものとする. この設定の下, 以下の形でゲームを進める.

- 先手後手を決め, **先手プレイヤー**, **後手プレイヤー**の順に交代で, 手札から**場**に 1 枚ずつ札を出していく.　なお, ゲームを通して順番は交互に移るが, それぞれの手札を出すタイミングを**手番**と呼ぶ.
- 場は最初, 空である (0 の札がおかれていると考える).
- 手番のプレイヤーは, 手札の中から場の札の値よりも大きい値の札を 1 枚出すことができる. 出した札はそれまで出ていた札の上に置かれる（場に出ている札は今出した札に代わる）. このとき, 手番はもう一人のプレイヤーに移る.
- 手番のプレイヤーは, 手札を出さずに手番をもう一人のプレイヤーに譲ることができる (**パス**する, という). このとき場に出ている札は空になる (改めて, 0 の札がおかれる).
- いずれかのプレイヤーの手札がなくなった時点で終了であり, このとき手札を 0 枚にしたほうが勝ちである.

ある時点で手番が来ているプレイヤーを**手番プレイヤー**, もう一人のプレイヤーを**非手番プレイヤー**と呼ぶ. また場が空の状態からいずれかのプレイヤーがパスをするまでを**巡**と呼ぶ.

以下ではこのゲームの必勝判定を考える.

2.2　準備

任意の手番 t に対して, 以下のような二部グラフを定義する:

$$G_X[t] = (X[t], \bar{X}[t], E_X[t]),$$

ただし,

$$E_X[t] = \{\{i, j\} \mid i \in X[t], j \in \bar{X}[t], i > j\}.$$

つまり, $G_X[t]$ は, プレイヤー X と $\bar{X}$ の手札の各札を点としたグラフであり, プレイヤー X の各手札から, その札が勝てるプレイヤー $\bar{X}$ の手札へ辺を引く形で定義されている.

また, 端点を共有しない辺集合をマッチング辺と呼ぶ.

このように定義したグラフ $G_X[t]$ においてマッチング辺は, プレイヤー $\bar{X}$ が出した札に対してプレイヤー X が札を出す関係を表しており, ゲームが進むことはそれぞれのグラフにおいてマッチング辺が抜かれていく状況を表している. 本研究で提案する判定法ではこれを利用するため, $G_X[t]$ の最大マッチング辺のサイズ $\mu_X[t]$ を定義する．この他に, 大貧民では比較的弱い, しかし使いようによっては順当に消費できる札を有効に切ることが重要になる．このような性質の札を定義するためいくつかの記号を導入する：

$$X^+[t] = \{v \in X[t] \mid d_{G_X[t]}(v) > 0\}.$$

ただし, $d_G(v)$ はグラフ G における点 v の次数を表す. これを用いて以下を定義する.

$$\begin{aligned} d^*(X^+[t]) &= \min\{d_{G_X[t]}(v) \mid v \in X^+[t]\}, \\ \min X^+[t] &= \{v \in X^+[t] \mid d_{G_X[t]}(v) = d^*(X^+[t])\}. \end{aligned}$$

以上を用いて次の値を定義する：

$$\nu_X[t] = d^*(X^+[t]) - |\min X^+[t]|.$$

つまり, $\nu_X[t]$ は $G_{X[t]} = \{V, E_a\}$ において孤立点でない頂点 $(X^+[t])$ のうち最も次数が小さいノードの次数 $(d^*(X^+[t]))$ からそのような頂点の数 $(|\min X^+[t]|)$ を引いたものを表す. また, マッチングがないときつまり $\mu_X[t]$=0 のとき $\nu_X[t] > 0$ とする. これらの値はいずれもそれぞれの手札がソートされていれば貪欲的な方法を用いることによって $O(n)$ 時間で計算ができる. (二部マッチングアルゴリズム等を用いる必要はない). 本研究ではこれらの値を用いた必勝プレイヤー判定アルゴリズムを設計する.

2.3 空場での必勝判定法

定理 1. ある巡の開始時 t の手番プレイヤーを X とする. X は以下のいずれかを満たすとき, またそのときに限り, 必勝プレイヤーである.

- $\mu_X[t] > \mu_{\bar{X}}[t]$,
- $\mu_X[t] \geq \mu_{\bar{X}}[t]$, $\nu_X[t] > 0$,
- $\mu_X[t] \geq \mu_{\bar{X}}[t]$, $\nu_{\bar{X}}[t] = 0$,
- $\mu_X[t] + 1 = \mu_{\bar{X}}[t]$, $\nu_X[t] > 0$, $\nu_{\bar{X}}[t] = 0$.

この定理は，巡に関する帰納法により示すことができる. この定理から次が直ちに言える.

系 1. $\mu_A[0], \mu_B[0], \nu_A[0], \nu_B[0]$ を計算することにより，ソート後 $O(n)$ 時間で二人単貧民の必勝プレイヤーとその必勝戦略を求めることができる.

表 1 ではこの勝利判定の条件をまとめている.

	$\mu_X[t] > \mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t] + 1 = \mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t] + 1 = \mu_{\bar{X}}[t]$
$\nu_X[t], \nu_{\bar{X}}[t] = 0$	X 必勝	X 必勝	$\bar{X}$ 必勝	$\bar{X}$ 必勝
$\nu_X[t] = 0, \nu_{\bar{X}}[t] > 0,$	X 必勝	$\bar{X}$ 必勝	$\bar{X}$ 必勝	$\bar{X}$ 必勝
$\nu_X[t] > 0, \nu_{\bar{X}}[t] = 0,$	X 必勝	X 必勝	X 必勝	$\bar{X}$ 必勝
$\nu_X[t], \nu_{\bar{X}}[t] > 0$	X 必勝	X 必勝	$\bar{X}$ 必勝	$\bar{X}$ 必勝

表 1: 勝者判定表

3 より簡潔な判定条件と空場への拡張

系 1，定理 1 により，手札が配られ，先手後手が決定した時点 (ゲーム開始時) での高速な勝敗判定，あるいは巡開始時での高速な勝敗判定が可能である.

表 1 に示す通りこの判定条件は 8 通りのパターンへの分類を利用する．これはゲームの性質を考えると十分簡潔であるとも言えるが，本節ではより簡潔な判定条件が存在することを証明する．なお，その新しい判定条件は，巡途中の手札からの判定も可能な一般的な拡張となっている．以下では場に最後に出された札からなる集合を R とする.「最後に出された」札は 1 枚であるため $|R| = 1$ である. まだ札が出されていない空場では仮想的に 0 の札が置かれているものとし，$R = \{0\} = R_0$ とする.

G_X における最大マッチングのサイズを $\mu(X, \bar{X})$ を定義する.

3.1 結果

上記のように定義したとき以下の定理が成立することを示した.

定理 2. X を先手プレイヤー, $\bar{X}$ を非手番プレイヤーとする. このとき以下が成立する. $\mu(X, \bar{X} \setminus \min(\bar{X}) + R) > \mu(\bar{X}, X \setminus \min(X))$ を満たすときそしてそのときのみ X(手番プレイヤー) は必勝戦略をもつ.

二部グラフの最大マッチングの計算には $O(m\sqrt{n})$ 時間のアルゴリズムが知られており [4], これを用いると $O(n)$ 時間でこの条件式のチェックができる. しかし, $G_x[t]$ の辺の引かれ方の特性を利用すると, $G_x[t]$ を実際に構築することなく線形時間で貪欲的に最大マッチングを求めることができる. このグラフの特性を利用すると手札がソートしてさえあれば, 最大マッチングのサイズを $O(n)$ で計算可能である.

以上から, 手札がソートしてある, あるいは基数ソートなどを用いることが妥当である場合, 線形時間で単貧民の勝者判定を行うことができる.

この定理からわかることが以下が分かる.

系 2. 単貧民はゲーム開始以降の任意のタイミングにおいて必勝戦略を持つプレイヤーを求めることが可能である.

また, この結果から単貧民はマッチング構造を利用することによって 2 通りのパターンへの分類のみで必勝判定が可能になっていることが分かる. これは 8 通りのパターン分類を要した以前の手法に比べ [3] 簡潔で且つ汎用性を広い判定法といえる.

4 まとめ

本研究では, 組合せゲームである二人単貧民の必勝プレイヤー判定とその必勝戦略導出を扱った. 単貧民自体は大貧民解析のための足がかりとして定義された簡易版であり, また真の困難性は多人数版にあるが, そういった, より一般化した設定でのアルゴリズム設計に, 本研究で提案したアルゴリズムがサブルーチンとして有効に機能することを期待している.

謝辞

本研究は JSPS 科研費 17H01698，17K19960，26540005 の助成を受けたものである. また, 本研究を進めるにあたり, HEROZ 株式会社の大渡勝己氏には本研究に関する大変有益なコメントをいくつもいただいたことに関してここに謝意を表します.

参考文献

[1] 西野順二: 単貧民における多人数完全情報展開型ゲームの考察 (“An analysis on TANHINMIN game”), ゲームプログラミングワークショップ 2007 論文集, pp. 66-73, 2007.

[2] 木谷裕紀, 小野廣隆: 単貧民における必勝戦略と必勝判定問題に関する考察, 火の国情報シンポジウム 2016 論文集, 3B-3, 2016.

[3] 木谷裕紀, 小野廣隆:　二人単貧民の必勝判定問題, 火の国情報シンポジウム 2017 論文集, B5-4, 2017.

[4] Hopcroft, J. E and Karp, R.M. : An $n^{2.5}$ Algorithm for Maximum Matchings in Bipartite Graphs, SIAM J. comput., Vol. 2, pp. 225-231 1973