数理解析研究所講究録 第2092巻 2018年 15-23

Barnes 2重ゼータ関数およびHurwitz多重ゼータ関数の平均値

名古屋大学大学院多元数理科学研究科　宮川 貴史 (Takashi Miyagawa)
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

Abstract

Riemann ゼータ関数の平均値オーダーの考察は，Lindelöf 予想を解明するための一つのアプローチとして重要な研究テーマとされている．近年では，この平均値オーダーを多重ゼータ関数を対象として考察されるようになり，Euler-Zagier 型や Mordell-Tornheim 型の 2 重ゼータ関数に対する 2 乗平均値の結果が，Riemann ゼータ関数の場合と同様に得られている．今回，筆者は Barnes 2 重ゼータ関数 $\zeta_2(s,\alpha;v,w)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+vm+wn)^{-s}$ や Hurwitz 多重ゼータ関数 $\zeta_r(s,\alpha)=\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty}(\alpha+m_1+\cdots+m_r)^{-s}$ に着目し，$\mathrm{Im}(s)$ に対する 2 乗平均値の結果が得られたので，その結果と証明の概略を合わせて紹介する．

1　背景と導入

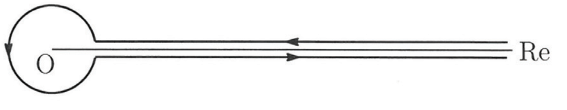
$s=\sigma+it$ $(\sigma,t\in\mathbb{R})$ を複素変数とする．Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ は $\sigma>1$ において

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots \tag{1.1}$$

で定義される複素関数であり，Gamma 関数を含んだ contour 積分表示

$$\zeta(s)=\frac{1}{(e^{2\pi is}-1)\Gamma(s)}\int_C\frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz \tag{1.2}$$

を通して，$\mathbb{C}$ 全体へ有理型に解析接続されることが知られている．ただし，C は以下の図のような積分路である：



$\zeta(s)$ は素数と深い関わりをもち，数論における重要な関数として応用されているが，$\zeta(s)$ 自身も解析的に非常に重要な性質があり，$s=1/2$ を対称軸とした関数等式

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s). \tag{1.3}$$

を持つことや，素数定理

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \to \infty), \tag{1.4}$$

が $\zeta(s)$ の解析的性質から導かれることなど，非常に興味深い関数である．$\zeta(s)$ の解析的性質をさらに深く研究するためには，関数の挙動，すなわち $|\zeta(\sigma+it)|$ のオーダーを調べることが必要となってくる．特に，$\zeta(\sigma+it)$ の t に着目したオーダーは古くから研究対象とされており，中でも critical line $s=1/2$ 上における $\zeta(1/2+it)$ のオーダーはとりわけ重要視され Hardy-Littlewood の $\zeta(1/2+it)=O(|t|^{1/6+\varepsilon})$ 等の評価を始めとして，盛んに改良研究が進められてきた．現段階での最良の結果としては，2017 年の Bourgain [2] による

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = O(|t|^{13/84+\varepsilon})$$

が知られている．ところが $\zeta(\sigma+it)$ のオーダーの研究は，以下の Lindelöf 予想と呼ばれる未解決の難問に阻まれているのが現状である：

Lindelöf 予想

任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\zeta(\sigma+it) = O(|t|^{\varepsilon}) \qquad \left(|t| \geq 2,\ \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1\right)$$

が成り立つ（？）

関数のオーダーを直接考えることは困難であるという観点から，一つ譲歩して $|\zeta(\sigma+it)|$ の t に関する平均値のオーダーを考察する試みが進められた．その出発点として，2 乗平均値に対する

$$\int_2^T |\zeta(\sigma+it)|^2 dt \sim \begin{cases} \zeta(2\sigma)T & (\sigma > 1/2) \\ T\log T & (\sigma = 1/2) \end{cases} \tag{1.5}$$

なる形の結果が得られている．しかし，平均値オーダーを考えることは，単に関数のオーダーが難しすぎるからという理由だけでなく，高次の平均値オーダーを考えることで Lindelöf 予想と同等の結果が得られることが期待されており，平均値オーダーと Lindelöf 予想との関係が次の定理（Theorem 1.1）によって関連付けられている；

Theorem 1.1 (Theorem 13.2 in Titchmarsh[12])**.** 任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\int_2^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt = O(T^{1+\varepsilon}) \qquad ({}^{\forall}k \in \mathbb{N}) \tag{1.6}$$

が成り立つことと，Lindelöf 予想が成り立つことは同値である．

このことから，平均値オーダーの考察は Lindelöf 予想解決への一つのアプローチとして重要な研究テーマとされている．しかし，(1.6) の成立が示されているのは，わずか

に $k=1,2$ の場合のみであり，平均値オーダーからのアプローチでも，Lindelöf 予想の解明には未だ遠いのが現状である．

一方，近年では多重ゼータ関数を対象とした平均値の研究が，松本氏，津村氏の共同研究 [9] を筆頭に着目されるようになった．2015 年において松本氏，津村氏は，Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数

$$\zeta_2(s_1, s_2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}(m_1+n_1)^{s_2}}$$

に着目し，2 つ目の変数 $s_2=\sigma_2+it_2$ の虚部 t_2 に関する平均値として，$\sigma_1+\sigma_2>3/2$ におけるある部分領域において

$$\int_2^T |\zeta_2(\sigma_1+it_1, \sigma_2+it_2)|^2 dt_2 \sim \zeta_2^{[2]}(\sigma_1+it_1, 2\sigma_2)T \qquad (T\to\infty) \tag{1.7}$$

の形の結果を与えている．ただし，

$$\zeta_2^{[2]}(s_1,s_2) := \sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{m^{s_1}}\right|^2\frac{1}{k^{s_2}}$$

である．また，池田氏，松岡氏，永田氏の共同研究 [5] によって (1.7) の改良版が与えられ，$\{(\sigma_1,\sigma_2)\,|\,\sigma_1+\sigma_2=3/2, \sigma_2>1/2\}\cup\{(\sigma_1,\sigma_2)\,|\,\sigma_1\geq 1, \sigma_2=1/2\}$ を満たす範囲においては，

$$\int_2^T |\zeta_2(\sigma_1+it_1, \sigma_2+it_2)|^2 dt_2 \asymp T\log T \qquad (T\to\infty) \tag{1.8}$$

の形の結果を与えている．さらに，1 つ目の変数や，双方の変数に着目した平均値

$$\int_2^T |\zeta_2(\sigma+it, s_2)|^2 dt, \qquad \int_2^T |\zeta_2(\sigma_1+it, \sigma_2+it)|^2 dt,$$

についても同様の結果が得られている． 他方，岡本氏と小野塚氏 [11] は，Mordell-Tornheim 型 2 重ゼータ関数

$$\zeta_{MT,2}(s_1,s_2;s) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^s},$$

に着目し，$\sigma_1+\sigma_2+\sigma>3/2$ におけるある部分領域において，(1.7) を特別な場合として含む

$$\int_2^T |\zeta_{MT,2}(s_1,s_2;\sigma+it)|^2 dt \sim \zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1,s_2;2\sigma)T \qquad (T\to\infty) \tag{1.9}$$

の形の結果を与えている．ただし，

$$\zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1,s_2;s) = \sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{m^{s_1}(k-m)^{s_2}}\right|^2\frac{1}{k^s}$$

である．今回，筆者は Barnes 2 重ゼータ関数に対して (1.7) や (1.9) に相当する結果（Theorem 2.1）が得られ，また Hurwitz 多重ゼータ関数に対しては (1.8) の類似の結果（Theorem 3.3）も得られたので，それぞれ次節以降で紹介する．

2 Barnes 2重ゼータ関数の平均値

Definition 1. r を正の整数，$\alpha > 0,\ w_1, w_2, \cdots, w_r > 0$ とし，

$$\zeta_r(s,\alpha;w_1,\ldots,w_r) := \sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+w_1m_1+\cdots+w_rm_r)^s} \tag{2.1}$$

を Barnes r 重ゼータ関数という．級数は $\mathrm{Re}(s) > r$ において絶対収束する．この関数は，$\mathbb{C}$ 全体へ有理型に解析接続され，極は $s = 1, 2, \ldots r$ における一位の極のみをもち，それ以外の点では正則であることが示されている．

今回の研究において，筆者は Barnes 2 重ゼータ関数

$$\zeta_2(s,\alpha;v,w) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+vm+wn)^s} \tag{2.2}$$

に着目し，2 乗平均値の結果が以下のように得られた：

Theorem 2.1 (M [10]). (i) $\sigma > 2$ に対して，

$$\int_1^T |\zeta_2(s,\alpha;v,w)|^2 dt = \zeta_2^{[2]}(\sigma,\sigma,\alpha;v,w)T + O(1) \qquad (T \to +\infty).$$

(ii) $3/2 < \sigma \le 2$ に対して，

$$\int_1^T |\zeta_2(s,\alpha;v,w)|^2 dt$$
$$= \zeta_2^{[2]}(\sigma,\sigma,\alpha;v,w)T + O(T^{4-2\sigma}\log T) + O(T^{1/2}) \qquad (T \to +\infty).$$

ただし，

$$\zeta_2^{[2]}(s_1,s_2,\alpha;v,w) := \sum_{\substack{m_1,n_1,m_2,n_2\ge 0\\ vm_1+wn_1=vm_2+wn_2}}\frac{1}{(\alpha+vm_1+wn_1)^{s_1}(\alpha+vm_2+wn_2)^{s_2}} \tag{2.3}$$

である．

Remark 1. 級数 (2.3) は $\mathrm{Re}(s_1+s_2) > 2$ のとき絶対収束する．また，v と w が $\mathbb{Q}$ 上線型独立ならば，$\zeta_2^{[2]}(s_1,s_2,\alpha;v,w) = \zeta_2(s_1+s_2,\alpha;v,w)$ すなわち，$\zeta_2^{[2]}$ は Barnes 2 重ゼータ関数となる．

(Theorem 2.1 の証明の概要)

(i) $\sigma > 2$ のとき，

$$|\zeta_2(s,\alpha;v,w)|^2 = \sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+vm_1+wn_1)^{\sigma+it}}\sum_{m_2=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+vm_2+wn_2)^{\sigma-it}}$$

となるが，$vm_1+wn_1=vm_2+wn_2$ を満たす項と $vm_1+wn_1\neq vm_2+wn_2$ を満たす項に分けて計算すると，

$$
\begin{aligned}
&|\zeta_2(s,\alpha;v,w)|^2\\
&=\zeta_2^{[2]}(\sigma,\sigma,\alpha;v,w)\\
&\quad+\sum_{\substack{m_1,n_1,m_2,n_2\geq 0\\ vm_1+wn_1\neq vm_2+wn_2}}\frac{1}{(\alpha+vm_1+wn_1)^\sigma(\alpha+vm_2+wn_2)^\sigma}\left(\frac{\alpha+vm_2+wn_2}{\alpha+vm_1+wn_1}\right)^{it}.
\end{aligned}
$$

のように変形すると，その積分は

$$
\begin{aligned}
\int_1^T|\zeta_2(s,\alpha;v,w)|^2dt&=\zeta_2^{[2]}(\sigma,\sigma,\alpha;v,w)(T-1)\\
&+\sum_{\substack{m_1,n_1,m_2,n_2\geq 0\\ vm_1+wn_1\neq vm_2+wn_2}}\frac{1}{(\alpha+vm_1+wn_1)^\sigma(\alpha+vm_2+wn_2)^\sigma}\\
&\times\frac{e^{iT\log\{(\alpha+vm_2+wn_2)/(\alpha+vm_1+wn_1)\}}-e^{i\log\{(\alpha+vm_2+wn_2)/(\alpha+vm_1+wn_1)\}}}{i\log\{(\alpha+vm_2+wn_2)/(\alpha+vm_1+wn_1)\}}.
\end{aligned}
$$

となり，(Second term) $\ll 1$ となるので (i) の結果を得る．

(ii) $3/2<\sigma\leq 2$ のとき，(2.2) の右辺は発散するので，級数表示は使えない．そこで，2 重級数を有限和で切った次の近似公式を用いる；

Theorem 2.2 (M [10]). $1<\sigma_1<\sigma_2,\ x\geq 1, C>1$ に対して，$\sigma_1<\sigma<\sigma_2, |t|\leq 2\pi x/C$ とする．このとき $x\to\infty$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\zeta_2(s,\alpha;v,w)&=\sum_{0\leq m\leq x}\sum_{0\leq n\leq x}\frac{1}{(\alpha+vm+wn)^s}\\
&+\frac{(\alpha+vx)^{2-s}+(\alpha+wx)^{2-s}-(\alpha+vx+wx)^{2-s}}{vw(s-1)(s-2)}+O(x^{1-\sigma})
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

Theorem 2.2 において，$C=2\pi, x=t$ ととると，

$$\zeta_2(s,\alpha;v,w)=\sum_{m\leq t}\sum_{n\leq t}\frac{1}{(\alpha+vm+wn)^s}+O(t^{1-\sigma}) \tag{2.4}$$

を得る．右辺の第 1 項目を $\Sigma(s)$ と表し，2 乗積分を計算すると

$$
\begin{aligned}
\int_1^T|\zeta_2(\sigma+it,\alpha;v,w)|^2dt&=\int_1^T|\Sigma(s)+O(t^{1-\sigma})|^2dt\\
=\int_1^T|\Sigma(s)|^2dt&+O\left(\int_1^T|\Sigma(s)|t^{1-\sigma}dt\right)+O\left(\int_1^T t^{2-2\sigma}dt\right).
\end{aligned}
$$

が得られる．最右辺の第 1 項目は (i) と同様の計算を行い，第 2 項目は Cauchy-Schwarz の不等式を用いて評価する．以上より (ii) の結果を得る．

□

3 Hurwitz 多重ゼータ関数の平均値

$\alpha > 0$ とする．Hurwitz 多重ゼータ関数を級数

$$\zeta_r(s,\alpha) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + m_1 + \cdots + m_r)^s} \quad (\mathrm{Re}(s) > r).$$

で定義する，これは，Barnes 多重ゼータ関数 (2.1) を $w_1 = \cdots = w_r = 1$ に限定した特別な場合の関数である．Hurwitz 多重ゼータ関数 $\zeta_r(s,\alpha)$

$$\zeta_r(s,\alpha) = \sum_{j=0}^{r-1} p_{r,j}(\alpha)\zeta(s-j,\alpha),$$

$$p_{r,j}(\alpha) = \frac{1}{(r-1)!}\sum_{l=j}^{r-1}(-1)^{r+1-j}\binom{l}{j}S(r,l+1)\alpha^{l-j}$$

を満たし，1 重の Hurwitz ゼータ関数の線形和で表示することができる．ただし，$p_{r,j}(\alpha)$ に含まれる $S(r,l+1)$ は，第 1 種 Stirling 数を表す．

例えば，$r=2, r=3$ の場合はそれぞれ

$$\begin{aligned}\zeta_2(s,\alpha) &= (1-\alpha)\zeta(s,\alpha) + \zeta(s-1,\alpha),\\ \zeta_3(s,\alpha) &= \frac{1}{2}(1-\alpha)(2-\alpha)\zeta(s,\alpha) + \frac{1}{2}(3-2\alpha)\zeta(s-1,\alpha) + \frac{1}{2}\zeta(s-2,\alpha)\end{aligned}$$

のようになる．これをもとに，$\zeta_2(s,\alpha)$ の 2 乗平均値を計算していくと

$$\begin{aligned}\int_1^T |\zeta_2(s,\alpha)|^2 dt &= \int_1^T |(1-\alpha)\zeta(s,\alpha) + \zeta(s-1,\alpha)|^2 dt\\ &= (1-\alpha)^2\int_1^T |\zeta(s,\alpha)|^2 dt + \int_1^T |\zeta(s-1,\alpha)|^2 dt\\ &\qquad +2(1-\alpha)\mathrm{Re}\left(\int_1^T \zeta(s,\alpha)\overline{\zeta(s-1,\alpha)}dt\right)\end{aligned}$$

となり，右辺第 3 項は

$$\int_1^T \zeta(s,\alpha)\overline{\zeta(s-1,\alpha)}dt = \zeta(2\sigma-1,\alpha)T + \begin{cases} O(T^{1/2}) & (3/2 < \sigma \le 2),\\ O((T\log T)^{1/2}) & (\sigma = 3/2),\end{cases}$$

と計算でき，Hurwitz ゼータ関数の平均値の結果（[8] 等を参照）を用いることで，次の結果を得る．

Theorem 3.1 (M). (i) $3/2 < \sigma \le 2$ のとき，

$$\begin{aligned}&\int_1^T |\zeta_2(\sigma+it,\alpha)|^2 dt\\ &\qquad = \{(1-\alpha)^2\zeta(2\sigma,\alpha) + 2(1-\alpha)\zeta(2\sigma-1,\alpha) + \zeta(2\sigma-2,\alpha)\}T\\ &\qquad\quad +O(T^{1/2}) + O(T^{4-2\sigma}) \qquad (T\to\infty).\end{aligned}$$

(ii) $\sigma=3/2$ のとき，

$$\int_1^T \left|\zeta_2\left(\frac{3}{2}+it,\alpha\right)\right|^2 dt$$
$$= T\log T + \left\{(1-\alpha)^2\zeta(3,\alpha)+2(1-\alpha)\zeta(2,\alpha)+\gamma(\alpha)+\frac{\gamma}{\alpha}-1-\log 2\pi\right\}T$$
$$+O((T\log T)^{1/2}) \qquad (T\to\infty).$$

ただし，γ は Euler 定数，$\gamma(\alpha)$ は一般 Euler 定数と呼ばれており，

$$\gamma(\alpha):=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+\alpha}-\log N\right),$$

で定義される．

また，$\zeta_3(s,\alpha)$ に対しても同様に計算することができるのであるが，ここで (2.3) の類似の級数として，

$$\zeta_3^{[2]}(s_1,s_2,\alpha;w_1,w_2,w_3):=\sum_{\substack{m_1,m_2,m_3,n_1,n_2,n_3\geq 0\\ w_1m_1+w_2m_2+w_3m_3=w_1n_1+w_2n_2+w_3n_3}}\frac{1}{(\alpha+w_1m_1+w_2m_2+w_3m_3)^{s_1}(\alpha+w_1n_1+w_2n_2+w_3n_3)^{s_2}},$$

を定めておく．この級数は $\mathrm{Re}(s_1+s_2)>2$ において絶対収束する．また，同様に w_1,w_2,w_3 が $\mathbb{Q}$ 上線型独立ならば,

$$\zeta_3^{[2]}(s_1,s_2,\alpha;w_1,w_2,w_3)=\zeta_3(s_1+s_2,\alpha;w_1,w_2,w_3).$$

となり，Barnes 3 重ゼータ関数に一致する．この級数を用いて，$\zeta_3(s,\alpha)$ に対する 2 乗平均値の結果が以下のように与えられる；

Theorem 3.2 (M).　(i) $5/2<\sigma\leq 3$ のとき，

$$\int_1^T|\zeta_3(\sigma+it,\alpha)|^2dt=\zeta_3^{[2]}(\sigma,\sigma,\alpha;1,1,1)T+O(T^{1/2})+O(T^{4-2\sigma}) \qquad (T\to\infty).$$

(ii) $\sigma=5/2$ のとき，

$$\int_1^T \left|\zeta_3\left(\frac{5}{2}+it,\alpha\right)\right|^2 dt$$
$$=\frac{1}{4}T\log T+\frac{1}{4}\Big\{(1-\alpha)^2(2-\alpha)^2\zeta(5,\alpha)+2(1-\alpha)(2-\alpha)(3-2\alpha)\zeta(4,\alpha)$$
$$+(6\alpha^2-18\alpha+13)\zeta(3,\alpha)+2(3-2\alpha)\zeta(2,\alpha)+\gamma(\alpha)+\frac{\gamma}{\alpha}-1-\log 2\pi\Big\}T$$
$$+O((T\log T)^{1/2}) \qquad (T\to\infty).$$

一般の Hurwitz r 重ゼータ関数 $\zeta_r(s,\alpha)$ については，現時点では簡易的な結果のみしか得られていないが，

$$\zeta_r(s,\alpha)=\sum_{j=0}^{r-1}p_{r,j}(\alpha)\zeta(s-j,\alpha)$$

を満たすことを用いて，

$$\int_1^T|\zeta_r(s,\alpha)|^2dt=\sum_{j=0}^{r-1}p_{r,j}(\alpha)^2\int_1^T|\zeta(s-j,\alpha)|^2dt$$
$$+2\sum_{0\le k<l\le r-1}p_{r,k}(\alpha)p_{r,l}(\alpha)\cdot\mathrm{Re}\left(\int_1^T\zeta(s-k,\alpha)\overline{\zeta(s-l,\alpha)}dt\right).$$

の右辺の第 2 項の部分を評価することと，$\sigma=r-1/2$ の場合の主要項が

$$\int_1^T|\zeta(s-r+1,\alpha)|^2dt\sim T\log T.$$

となることを用いて，次の結果が得られる；

Theorem 3.3 (M). (i) $\sigma>r-1/2$ のとき，

$$\int_1^T|\zeta_r(\sigma+it,\alpha)|^2dt\asymp T\qquad(T\to\infty)$$

(ii) $\sigma=r-1/2$ のとき，

$$\int_1^T\left|\zeta_r\left(r-\frac{1}{2}+it,\alpha\right)\right|^2dt=\frac{1}{\{(r-1)!\}^2}T\log T+O(T^{1/2}\log T)\qquad(T\to\infty).$$

Remark 2. Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ では，critical line $\sigma=1/2$ における 2 乗平均値オーダーが $T\log T$ で評価されるが，Theorem 3.1, 3.2, 3.3 の (ii) の結果から，r 重ゼータ関数については直線 $\sigma=r-1/2$ が 2 乗平均値の観点から $\zeta(s)$ の critical line $\sigma=1/2$ に相当しているのではないか，ということが覗える．

Hurwitz 多重ゼータ関数の結果，特に Theorem 3.3 については現時点で詳細な計算まで着手できておらず，簡易的な結果のみしか紹介できなかったが，引き続き細部までの計算を進め，漸近公式や誤差項の改良に努めていきたい．

References

[1] F. V. Atkinson, The mean-value of the Riemann zeta function, Acta. Math., **81** (1949), 353-376.

[2] J. Bourgain, Decoupling, exponential sums and the Riemann zeta-function, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), No. 1, 205-224.

[3] R. Garunkštis, A. Laurinčikas, and J. Steuding, An approximate functional equation for the Lerch zeta-function, Mathematical Notes, Vol. **74**, No. 4 (2003), pp. 469-476.

[4] R. Garunkštis, A. Laurinčikas, and J. Steuding, On the mean square of Lerch zeta-function, Arch. Math. (Basel) **80** (2003), no. 1, 47-60.

[5] S. Ikeda, K. Matsuoka, Y. Nagata, On certain mean values of the double zeta-function, Nagoya Math. J. **217** (2015), 161–190.

[6] Y. Komori, K. Matsumoto, H. Tsumura, Barens multiple zeta-functions, Ramanujan's formula, and relevant series involving hyperbolic functions, J.Ramanujan Math. Soc. **28** (2013), 49–69.

[7] A. Laurinčikas, R. Garunkštis, On the Lerch zeta-function, Lith. Math. J. **36** (1996), 337-346.

[8] A. Laurinčikas, R. Garunkštis, The Lerch zeta-function, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[9] K. Matsumoto, H. Tsumura, Mean value theorems for the double zeta-function, J. Math. Soc. Japan **67** (2015), 383-408.

[10] T. Miyagawa, Mean values of the Barnes double zeta-function, Tokyo J. Math. Vol. **41**, No. 2, (2018) to appear, 13pp.

[11] T. Okamoto, T. Onozuka, Mean value theorems for the Mordell-Tornheim double zeta-functions, Ramanujan J. **37** (2015), 131–163.

[12] E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-function. 2nd ed., Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.