数理解析研究所講究録 第2092巻 2018年 24-31

t 多重ゼータ値のある関係式族について

東北大学大学院 理学研究科　和山裕嗣* (Hirotsugu Wayama)
Mathematical institute, Tohoku University

1　序

多重ゼータ値は Riemann ゼータ関数の正の整数点での値を多重化したものであり, MZV と MZSV の2種類からなる. これらは互いに他の線型和として記述されるものであり, 多重ゼータ値の関係式は MZV, MZSV を用いてさまざまな形で与えられている. また荒川-金子や金子-津村の定義した Riemann ゼータ関数の拡張は, 正の整数点における特殊値を通して多重ゼータ値と深く結びついている.

山本によって導入された t-MZV は MZV と MZSV を補間する多項式である. この多項式に関しては, MZV と MZSV の双方について成り立つ性質が t-MZV でも成り立つかという問題がしばしば考えられており, 実際いくつかの関係式が MZV, MZSV の既知の結果を補間する形で与えられている.

本稿では MZV における Le-村上関係式と MZSV における青木-大野関係式について, これらの t-MZV における対応物に関する筆者の予想を述べる. そして予想の特別な場合を, 荒川-金子, 金子-津村の関数の補間との関係を踏まえて紹介する.

2　多重ゼータ値と荒川-金子型ゼータ関数

2.1　多重ゼータ値の関係式

正の整数の組 $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ を index と呼び, 特に $k_1\geq 2$ のとき $\mathbf{k}$ は admissible という. この admissible index $\mathbf{k}$ に対して, multiple zeta value (MZV) は

$$\zeta(\mathbf{k})=\zeta(k_1,\ldots,k_r)=\sum_{m_1>\cdots>m_r>0}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}$$

で, multiple zeta-star value (MZSV) は

$$\zeta^\star(\mathbf{k})=\zeta^\star(k_1,\ldots,k_r)=\sum_{m_1\geq\cdots\geq m_r>0}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}$$

でそれぞれ与えられる実数である. これらはいずれも Riemann ゼータ値の拡張であるが, Euler によって $r=2$ の場合が扱われ, 一般の r については1990年代頃から Hoffman や Zagier などによって盛んに調べられている. ここで

$$\mathrm{wt}(\mathbf{k})=k_1+\cdots+k_r,\quad \mathrm{dep}(\mathbf{k})=r,\quad \mathrm{ht}(\mathbf{k})=\#\{\,i\mid k_i\geq 2\,\}$$

*e-mail: hwayama.t1@gmail.com

は順に index $\mathbf{k}$ の (あるいは $\zeta(\mathbf{k})$, $\zeta^\star(\mathbf{k})$ の) weight, depth, height と呼ばれ, 多重ゼータ値の性質を述べるうえで重要な量である.

多重ゼータ値の間には非常に多くの $\mathbb{Q}$ 線型関係式の存在が知られており, その全容を解明することは大きな課題の1つである. 今日ではこれら線型関係式のさまざまな族が与えられており, 特に一般複シャッフル関係式 (Extended double shuffle relation) をはじめとするいくつかの関係式族は, 多重ゼータ値の全線型関係式を含むであろうと予想されている. 以下に関係式族の例をいくつか挙げる.

和公式 (sum formula). 正の整数 $k>r$ に対して,

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k,\\ k_1\geq 2,k_2\ldots,k_r\geq 1}} \zeta(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\zeta(k),$$

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k,\\ k_1\geq 2,k_2\ldots,k_r\geq 1}} \zeta^\star(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\binom{k-1}{r-1}\zeta(k).$$

和公式は, 多重ゼータ値のもっとも基本的な線型関係式族の1つである. この和を細分化したものが, 次の巡回和公式である.

巡回和公式 (cyclic sum formula). index $(k_1,\ldots,k_r)$ は1でない成分を含むものとし, $k=k_1+\cdots+k_r$ とおく. このとき,

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_l-1}&\zeta(k_l-j+1,k_{l+1},\ldots,k_r,k_1,\ldots,k_{l-1},j)\\ &=\sum_{l=1}^{n}\zeta(k_l+1,k_{l+1},\ldots,k_r,k_1,\ldots,k_{l-1}),\end{aligned}$$

$$\sum_{l=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_l-1}\zeta^\star(k_l-j+1,k_{l+1},\ldots,k_r,k_1,\ldots,k_{l-1},j)=k\,\zeta(k+1).$$

ここで左辺内側の和はともに, $k_l=1$ のときは0とする.

上では和公式や巡回和公式として, MZV による表示と MZSV による表示の2つを紹介したが, 次に述べる MZV と MZSV の書き換えにより2つの表示は同値, すなわち関係式の族として一致することが確かめられている:

weight の等しい index $\mathbf{k}$ と $\mathbf{k}'$ に対して, 関係 $\mathbf{k}'\preceq\mathbf{k}$ を

$$\mathbf{k}'\preceq\mathbf{k} \overset{\text{def.}}{\iff} \begin{array}{l}\mathbf{k}' \text{ は } \mathbf{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_r) \text{ の } r-1 \text{ 個の “,” の}\\ \text{いくつかを “+” に置き換えることで得られる}\end{array}$$

で定める. 例えば, $(3,1)=(1+2,1)\preceq(1,2,1)$, $(2,2)\preceq(2,2)$ が成り立つ. このとき MZV と MZSV の定義から次の関係式がわかる.

命題 1 (cf. [11])**.** admissible index $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対して,

$$\zeta^\star(\mathbf{k})=\sum_{\mathbf{k}'\preceq\mathbf{k}}\zeta(\mathbf{k}),\qquad \zeta(\mathbf{k})=\sum_{\mathbf{k}'\preceq\mathbf{k}}(-1)^{r-\mathrm{dep}(\mathbf{k}')}\zeta^\star(\mathbf{k}).$$

本稿で注目するのは, weight と height を固定した和に関する次の 2 つの関係式である. それらを述べるため, 正の整数 k, s に対して

$$I_0(k,*,s) := \{\,\mathbf{k} : \text{admissible} \mid \mathrm{wt}(\mathbf{k}) = k, \mathrm{ht}(\mathbf{k}) = s\,\}$$

とおいておく.

Le-村上関係式. 正の整数 k, s が $k \geq s$ を満たすとき,

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_0(2k,*,s)} (-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\,\zeta(\mathbf{k}) = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\sum_{r=0}^{k-s}\binom{2k+1}{r}(2-2^{2r})B_{2r}\right)\pi^{2k}. \tag{2.1}$$

ここで $\{B_n\}_{n\geq 0}$ は, 次の母関数で定まる関-Bernoulli 数である:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \frac{xe^x}{e^x-1}.$$

この関係式の最初の証明は Le-村上 [6] によるものであり, 結び目理論の不変量を 2 通りに計算することで得られた. その後, 大野-Zagier [10] により weight, height に関する左辺の母関数を計算することで別証明が与えられた. またこの右辺は, 正の偶数点での Riemann ゼータ値に関する Euler の有名な公式

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1}}{2}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2\pi)^{2k}$$

から (有理数) $\times\,\zeta(2k)$ の形に書けることがわかる.

注意 2. 奇数 weight について同様の和を計算すると

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_0(2k-1,*,s)} (-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\zeta(\mathbf{k}) = 0$$

となることが知られている. これは大野-Zagier の計算のほか, MZV における双対公式によっても分かる. そこで以下では, この奇数 weight に関する結果も併せて Le-村上関係式と呼ぶことにする.

青木-大野関係式. 正の整数 k, s が $k \geq s$ を満たすとき,

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,*,s)} \zeta^{\star}(\mathbf{k}) = 2\binom{k-1}{2s-1}(1-2^{1-k})\,\zeta(k). \tag{2.2}$$

これも大野-Zagier の別証明と同様, weight, height に関する左辺の母関数を計算することで得られた. この右辺も Le-村上関係式と同じく (有理数) $\times\,\zeta(k)$ と書けている.

2.2 荒川-金子型ゼータ関数の関係式

荒川-金子 [1] と金子-津村 [5] は正の整数 k に対して, $\mathrm{Re}(s) > 0$ で絶対収束する積分

$$\xi_k(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty x^{s-1} \frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-x})}{e^x - 1}\, dx,$$
$$\eta_k(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty x^{s-1} \frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{x})}{1 - e^x}\, dx$$

を導入した. ただし index $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対して多重ポリログ $\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ は

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z) := \sum_{m_1 > \cdots > m_r > 0} \frac{z^{m_1}}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}$$

で与えられる. 本稿ではこれら2つの関数をまとめて荒川-金子型ゼータ関数と呼ぶ. 両者はいずれも Riemann ゼータ関数の拡張であり, 実際 $\xi_1(s) = \eta_1(s) = s\zeta(s+1)$ が成り立つ. これらの関数の正の整数点における値は荒川-金子, 金子-津村, 大野, 山本などにより, 多重ゼータ値を用いて明示的に与えられている.

定理 3 (荒川-金子 [1], 金子-津村 [5], 大野 [8], 山本 [15]). 正の整数 k, m に対して,

$$\begin{aligned}
\xi_k(m) &= \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_k=m-1 \\ \forall a_j \geq 0}} (a_k+1)\zeta(a_1+1, \ldots, a_{k-1}+1, a_k+2) \\
&= \zeta^\star(k+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-1}), \\
\eta_k(m) &= \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_k=m-1 \\ \forall a_j \geq 0}} (a_k+1)\zeta^\star(a_1+1, \ldots, a_{k-1}+1, a_k+2) \\
&= \sum_{\substack{a_1 \geq \cdots \geq a_k > 0 \\ \parallel \\ b_m \geq \cdots \geq b_1 > 0}} \frac{1}{a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_m}.
\end{aligned}$$

特に, これらから得られる次の結果はおもしろい.

系 4. 正の整数 $k \geq 2$ に対して,

$$\sum_{r=1}^{k-1} (-1)^r \eta_r(k-r) = \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k,*,1)} (-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\, \zeta(\mathbf{k}),$$
$$\sum_{r=1}^{k-1} \xi_r(k-r) = \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k,*,1)} \zeta^\star(\mathbf{k}).$$

上の2つの式の右辺は順に, height が1の場合の Le-村上関係式, 青木-大野関係式の左辺に一致する.

3　t 多重ゼータ値による補間

山本 [14] は2-1 公式と呼ばれる MZSV の関係式を調べるため, admissible index $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対して t 多重ゼータ値 (t-MZV) と呼ばれる次の多項式を定義した.

$$\zeta^t(\mathbf{k}) := \sum_{\mathbf{k}' \preceq \mathbf{k}} t^{r-\mathrm{dep}(\mathbf{k}')} \zeta(\mathbf{k}').$$

これは定義から $\zeta^0 = \zeta$ を, 命題 1 から $\zeta^1 = \zeta^\star$ を満たすので, MZV と MZSV の補間となっていることがわかる. いくつかの研究ではこの補間の性質に注目し, MZV や MZSV について知られている関係式を t-MZV に対しても考える試みがなされている. 例えば山本 [14] では, t-MZV に対する和公式と巡回和公式として次が示された:

(和公式)
$$\sum_{\mathbf{k} \in I_0(k,r,*)} \zeta^t(\mathbf{k}) = \left(\sum_{j=0}^{r-1} \binom{k-1}{j} t^j (1-t)^{r-1-j} \right) \zeta(k),$$

(巡回和公式)
$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_l-1} &\zeta^t(k_l - j + 1, k_{l+1}, \ldots, k_r, k_1, \ldots, k_{l-1}, j) \\ &= \sum_{l=1}^{n} (1-t) \zeta^t(k_l + 1, k_{l+1}, \ldots, k_r, k_1, \ldots, k_{l-1}) + t^n k \zeta(k+1).\end{aligned}$$

これらは $t = 0, 1$ とすることで, 従来の式を復元する. 他にも t-MZV で成り立つ関係式として, Hoffman 関係式, 川島関係式, 一般複シャッフル関係式が Li-Qin [7], 田中-若林 [12], 若林 [13] によって得られている.

以上で述べたように, MZV と MZSV で互いに対応関係にある関係式に対して, t-MZV で補間するような結果が多く得られている. そこで weight と height を固定した和である Le-村上関係式と青木-大野関係式についても, t-MZV における類似物が期待される. 今回いくつかの数値実験を行い, 次の予想を得た.

予想 5. 正の整数 k, s が $k \geq 2s$ を満たすとき,

$$\sum_{\mathbf{k} \in I_0(k,*,s)} (2t-1)^{k-\mathrm{dep}(\mathbf{k})-s} \zeta^t(\mathbf{k}) \overset{?}{\in} \mathbb{Q}[t] \cdot \zeta(k). \tag{3.1}$$

左辺について, 和を走る admissible index は weight, height が固定されており, $t = 0$ としたときは MZV の depth に関する交代和, $t = 1$ のときには MZSV の和となっている. またこれは等式ではないものの, 右辺は $t = 0, 1$ のときに (有理数) $\times\, \zeta(k)$ の形になっている. したがってこの予想式は, Le-村上関係式と青木-大野関係式の補間に相当することがわかる.

この予想の成立は, 一般複シャッフル関係式を用いた計算により $k \leq 6$ のときに確かめられている. また $k = 2s$ のとき予想の左辺は $\zeta^t(\underbrace{2, \ldots, 2}_{k})$ に等しいが, Hoffman [4] の結

果を用いてこれを計算すると

$$\zeta^t(\underbrace{2,\dots,2}_{s}) = \sum_{r=1}^{s} t^{s-r} \sum_{j=0}^{s-r} (-1)^{s-r-j} \binom{s-j}{r} \zeta^\star(\underbrace{2,\dots,2}_{j})\zeta(\underbrace{2,\dots,2}_{s-j})$$

が分かる．この t べきの各係数は (有理数) $\times\,\zeta(2k)$ であることが知られているので，予想は $k=2s$ で正しい．

さて今回得られた次の結果は，予想 5 における height が 1 の場合である．

定理 6. 正の整数 $k \geq 2$ に対して，

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,*,1)} (2t-1)^{k-\mathrm{dep}(\mathbf{k})-1}\,\zeta^t(\mathbf{k}) = 2(1-2^{1-k})\left(\sum_{l=0}^{k-2}(2t-1)^l\right)\zeta(k). \tag{3.2}$$

この証明は，k に関する左辺の母関数を変形していくことで達成される．その式変形の際，筆者が大野との共同研究 [9] で定義した次の関数が重要な役割を果たす．

定義 7. 正の整数 k と変数 t に対して，

$$\xi_k^t(s) := \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty x^{s-1}\frac{\mathrm{Li}_k^t(1-e^{-x})}{e^x-1}\,dx \quad (\mathrm{Re}(s)>0).$$

ただし

$$\mathrm{Li}_k^t(z) := \sum_{\mathrm{wt}(\mathbf{k})=k} t^{\mathrm{dep}(\mathbf{k}')-1}\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z).$$

これは荒川-金子型ゼータ関数の補間となっている．実際，定義から $\xi^0=\xi$ が得られ，また多重ポリログに関する Landen 型接続公式から $\xi^1=\eta$ が分かる．大野との研究では，この関数の正の整数点における値が次のように書けている．

定理 8. 正の整数 k, m に対して，

$$\xi_k^t(m) = \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_k=m-1\\ \forall a_j\geq 0}} (a_k+1)\zeta^t(a_1+1,\dots,a_{k-1}+1,a_k+2), \tag{3.3}$$

$$\xi_k^t(m) = \sum_{\substack{a_1\geq\cdots\geq a_k>0\\ \| \\ b_m\geq\cdots\geq b_1>0}} \frac{t^{\sum_{i=0}^{k-1}(1-\delta(a_i,a_{i+1}))}}{a_1\cdots a_k b_1\cdots b_m}. \tag{3.4}$$

ただし $\delta(u,v)$ は Kronecker のデルタである．

式 (3.3) において $t=0$, $t=1$ としたものはそれぞれ荒川-金子，金子-津村の結果に一致する．また (3.4) で $t=0$, $t=1$ としたものはそれぞれ大野，山本 [15] の結果である．

次の命題は，上の (3.3) を用いることで得られる．

命題 9. 正の整数 $k\geq 2$, と変数 t_1, t_2 に対して，

$$\sum_{r=1}^{k-1} t_1^{k-r-1}\xi_r^{t_2}(k-r) = \sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,*,1)} t_1^{k-\mathrm{dep}(\mathbf{k})-1}\zeta^{t_1+t_2}(\mathbf{k}).$$

この式において $t_1 = 2t-1$, $t_2 = t$ とすれば

$$\sum_{r=1}^{k-1}(2t-1)^{k-r-1}\xi_r^{1-t}(k-r) = \sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,*,1)}(2t-1)^{k-\mathrm{dep}(\mathbf{k})-1}\zeta^t(\mathbf{k})$$

となって, 系 4 を補間する式を得る. この式と (3.4) により, 定理 6 の左辺の母関数が適切に変形できる.

謝辞

2017 年度 RIMS 研究集会「解析的整数論とその周辺」での講演機会をくださいました世話人の藤田育嗣先生, 見正秀彦先生に心より感謝を申し上げます. 本研究発表には, JSPS 科研費 JP16H06336 の支援を受けました.

参考文献

[1] T. Arakawa and M. Kaneko, *Multiple zeta values, poly-Berboulli numbers, and related zeta functions*, Nagoya Math J., **153** (1999), 189-209.

[2] T. Aoki and Y. Ohno, *Sum relations for multiple zeta values and connection formulas for the Gauss hypergeometric functions*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **48** (2005), 329-337.

[3] 荒川恒男, 金子昌信, 『多重ゼータ値入門』, COE Lecture Note Vol 23, 九州大学, 2010 年.

[4] M. Hoffman, *On multiple zeta values of even arguments*, Int. J. Number Theory **13** (2017), 705-716.

[5] M. Kaneko and H. Tsumura, *Multi-poly-Bernoulli numbers and related zeta functions*, Nagoya Math. J., available from: `https://doi.org/10.1017/nmj.2017.16`.

[6] T. Q. T. Le and J. Murakami, *Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions*, Topology and its Applications **62** (1995), 193-206.

[7] Z.-h. Li and C. Qin, *Some relations of Interpolated multiple zeta values*, Int. J. Math. **28**, no. 5 (2017), 1750033 (25 pages).

[8] Y. Ohno, *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, J. Number Theory **74** (1999), 39-43.

[9] Y. Ohno and H. Wayama, *Interpolation between Arakawa-Kaneko and Kaneko-Tsumura multiple zeta functions*, preprint (2017).

[10] Y. Ohno and D. Zagier, *Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height*, Indeg. Math. (N.S.) **12** (2001), no.4, 483-487.

[11] Y. Ohno and W. Zudilin, *Zeta stars*, Commun. Number Theory Phys. **2** (2) (2008), 325-347.

[12] T. Tanaka and N. Wakabayashi, *Kawashima's relations for interpolated multiple zeta values*, J. Algebra **447** (2016), 424-431.

[13] N. Wakabayashi, *Double shuffle and Hoffman ' s relations for interpolated multiple zeta values*, Int. J. Number Theory **13** (9) (2017), 2245-2251.

[14] S. Yamamoto, *Interpolation of multiple zeta and zeta-star values*, J. Algebra **385** (2013), 102-114.

[15] S. Yamamoto, *Multiple zeta functions of Kaneko-Tsumura type and their values at positive integers*, preprint (2016), arXiv:1607.01978.