数理解析研究所講究録 第2092巻 2018年 178-190

素数と平方数の和の短区間中の分布について

(On the sum of a prime and a square in short intervals)

Yuta Suzuki (鈴木雄太)
Graduate School of Mathematics, Nagoya University
(名古屋大学 多元数理科学研究科)

1 平方数がひっかかる

素数と平方数を足すことを考える。Hardy と Littlewood [3, Conjecture H, p.49] によれば、「十分大きな自然数は平方数であるか、さもなくば素数と平方数の和であろう」ということである。これはまだ未解決のまま残されている Hardy–Littlewood 予想というもののひとつであり、素数と平方数の和で書き表せる数のことを "Hardy–Littlewood number" と呼んだりする。この予想は単なる口からでまかせではなく、円周法を用いた heuristics に支持されて提出されたものである。与えられた自然数 N を素数と平方数の和に書く表し方の個数を

$$R(N)=\sum_{p+m^2=N}\log p \tag{1}$$

で測ることにすると、円周法を用いた際の major arc の寄与のみ考えてみれば、

$$R(N)=\mathfrak{S}(N)\sqrt{N}+(\text{error}),\quad (N\text{ は平方数でないとする}) \tag{2}$$

というような漸近式が予想できる。ただしここで、特異級数 $\mathfrak{S}(N)$ は

$$\mathfrak{S}(N)=\prod_{p>2}\left(1-\frac{(N/p)}{p-1}\right),\quad (N/p)\text{: Legendre 記号}$$

で与えられる。この特異級数の収束性は Legendre 記号の打ち消し合いによって担保されるわけであり、すこし取扱いが面倒である。自然数 N に対応して判別式 $D=D(N)$ をうまく取り、その判別式に付随した Kronecker 記号 χ_D を考え、Dirichlet L 関数 $L(s,\chi_D)$ を考えればおおよそ $\mathfrak{S}(N)\approx L(1,\chi_D)^{-1}$ となるので、実は $\mathfrak{S}(N)\gg(\log N)^{-1}$ くらいのことが分かる。詳しい計算は例えば Brünner–Perelli–Pintz [2] の Section 11 あたりを真似するとよい。従って、N が十分大であるとすると、$R(N)$ が非零となり N は素数と平方数の和で書けるということなる。こうして (2) のような漸近式は Hardy–Littlewood 予想を導くということになる。本稿ではこの予想される漸近式 (2) について考察してみたい。

しかし、Hardy–Littlewood 予想は依然として解決されていないわけであり、各 N に対し漸近式 (2) を得ることはまだまだ難しい。そこで代わりに N に渡ってなんらか

の平均を取って漸近式 (2) を考察してみる。例えば、素数と平方数の和で書き表せないような例外的な自然数の個数を評価する問題（例外集合評価）をする場合には

$$\sum_{N\in I}\left|R(N)-\mathfrak{S}(N)\sqrt{N}\right|^2 \tag{3}$$

というような L^2 平均を考えることが必要となる。ただしここで I は例外集合を数えたい区間を表すものとする。各項の $R(N)$ だとか $\mathfrak{S}(N)\sqrt{N}$ は恐らく大体 $\sqrt{N}$ の大きさを持っているだろうから、区間 I の幅を H とすると

$$\sum_{N\in I}\left|R(N)-\mathfrak{S}(N)\sqrt{N}\right|^2 \ll H\sqrt{N}^2=HN$$

というのが自明な評価となる。実数 $X\geq 2$ を我々の主たる変数だとすると、Miech [10] は $I=(X,2X]$ を渡る平均に対して

$$\sum_{X<N\leq 2X}\left|R(N)-\mathfrak{S}(N)\sqrt{N}\right|^2 \ll X^2L^{-A},\quad L:=\log X \tag{4}$$

という評価を得ている。ただし以後 $A>0$ は任意の実数であり、implicit constants は A に依存して良いものとする。この Miech の結果にいわゆる Chebyshev の不等式を用いれば $(X,2X]$ に含まれる例外集合の大きさを評価できることになる。

さて、Miech の評価を改善することを考えよう。例外集合評価という観点からは評価 (4) 自体を改善することが自然であるが、本稿の文脈では各 N に対する漸近式 (2) を譲歩して平均 (3) を考えているわけなので、平均する区間 $I=(X,2X]$ をより短い局所的な区間に置き換える事を試みることにしよう。(実のことを言えば Miech の評価 (4) は Siegel zero の影響によりこれ以上改善することがいまのところ難しい。) つまり X より短い変数 H を導入し、$I=(X,X+H]$ というような区間の上の平均 (3) を考える。どこまで小さい H に対して非自明な評価を与えることが出来るか問うわけである。この問題に対しては三河 [11] ないしは Perelli–Pintz [12] が

$$\sum_{X<N\leq X+H}\left|R(N)-\mathfrak{S}(N)\sqrt{N}\right|^2 \ll HXL^{-A}, \tag{5}$$

という評価を条件

$$X^{\theta+\varepsilon}<H\leq X,\quad \theta=\frac{1}{2} \tag{6}$$

の下で得ている。この三河ないしは Perelli–Pintz の結果は現在でも最良である。

同じような問題を今の「素数と平方数の和」についてだけでなく「素数と素数の平方の和」についても考えることが出来る。この問題に対して最初に短区間中の L^2 評価を得たのは Liu–Zhan [9] であり、彼らは (6) において $\theta=3/4$ と取れることを示した。昨年度の RIMS 研究集会「解析的整数論の諸問題と展望」で講演させていただいた研究はこの Liu–Zhan の結果の改善を含み、筆者 [13] は $\theta=1/2$ と取れることを示した。

ここで気になるのは「素数と平方数の和」、方程式で書いてみれば

$$N=p+m^2$$

という方程式を「素数と素数の平方の和」

$$N = p + q^2$$

に置き換えたところで現在最良の指数 θ は $1/2$ となるということであろう。平方数 m^2 を素数の平方 q^2 に変えたところで、現在の手法が直面している困難さには影響がないのである。つまりは漸近公式 (2) の短区間中の L^2 評価に対しての現在最大の壁は平方数自身の分布から来ている、ざっくり言えば「平方数がひっかかっている」ような気がしてくる。ここで短区間 $(X, X+H]$ 中の平方数の個数を数えるという問題は $0 < H \le X^{\frac{1}{2}}$ の範囲においては短区間 $(X, X+H]$ 中の平方数の存在を問う問題と同じことになることにも注意する。そこで本稿では、このどうしてもひっかかる「1/2 の壁」を何らかの意味で乗り越えることを目標にして考えたことを書き残したい。

2 やっぱり平方数がひっかかる

そのまま L^2 平均を考えるのはやはり難しい。そこで、さらにもう一歩譲歩して短区間 $(X, X+H]$ 上のただの平均

$$\sum_{X<N\le X+H} R(N) \tag{7}$$

を考えることにすると、これは L^2 平均 (3) を考えるよりは易しいはずである。しかし、この平均 (7) の漸近挙動に対しては、いまのところ次の結果があるのみであった：

Theorem 1 (Languasco and Zaccagnini [8, Theorem 2]). ある定数 $C > 0$ が存在して、任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して、漸近式

$$\sum_{X<N\le X+H} R(N) = HX^{\frac{1}{2}} + O\left(HX^{\frac{1}{2}} \exp\left(-C\left(\frac{\log X}{\log\log X}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right) \tag{8}$$

が条件

$$X^{\frac{1}{2}} \exp\left(-C\left(\frac{\log X}{\log\log X}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \le H \le X^{1-\varepsilon}, \quad H \ge 2 \tag{9}$$

の下で成り立つ。ただし *implicit constant* は ε のみに依存する。

この結果は我々が直面していた「1/2 の壁」を因子

$$\exp\left(-C\left(\frac{\log X}{\log\log X}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

の分だけ乗り越えることに成功している（!）、と見ることができるわけであるが、しかしやはり指数 $1/2$ は健在であり、「1/2 の壁」を乗り越えるという観点からは満足がいかないともいえる。やはり「1/2 の壁」つまりは平方数においてひっかかるのである。

尚、注意であるが、条件 (9) における条件 $H \le X^{1-\varepsilon}$ は単に近似

$$\sum_{X<N\le X+H} n^{\frac{1}{2}} = HX^{\frac{1}{2}} + O(H^2X^{-\frac{1}{2}} + X^{\frac{1}{2}})$$

が意味を持つ範囲を示しているだけであり、漸近式 (8) を

$$\sum_{X<N\le X+H} R(N) = \sum_{X<N\le X+H} n^{\frac{1}{2}} + O\left(HX^{\frac{1}{2}}\exp\left(-C\left(\frac{\log X}{\log\log X}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right)$$

と書きなおせば、この条件 $H \le X^{1-\varepsilon}$ を外すことが出来る。

上記の Theorem 1 を得るために Languasco と Zaccagnini は円周法の「おもちゃ版」を用いている。ここでは今考えている和 (7) に起こっている現象を理解することを目標に、試しにもう少し直接的に和 (7) を計算してみることにしよう。まず、和 (7) に $R(N)$ の定義 (1) を代入すれば

$$\sum_{X<N\le X+H} R(N) = \sum_{X<p+m^2\le X+H} \log p$$

となる。誤差というのは積もれば積もるほど困るし、基本的に長い和の方が計算しやすい[1]ので、長い和を内側に入れて

$$\sum_{X<N\le X+H} R(N) = \sum_{m^2\le X+H}\ \sum_{X-m^2<p\le X-m^2+H} \log p \qquad (10)$$

と変形してみる。すると、内側の和は素数を短区間中で数え上げていることになる。短区間中の素数定理の現在最良のものは

$$\sum_{X<p\le X+H} \log p = H + O(HL^{-A}), \quad X^{\frac{7}{12}+\varepsilon} \le H \le X \qquad (11)$$

くらいのことを言っている（Huxley–Ingham の零点密度評価による。）ので、これを (10) に入れてみると、$X^{\frac{7}{12}+\varepsilon} \le H \le X$ の範囲で (7) の漸近式を得ることが出来るが、これはそもそも「1/2 の壁」より成立範囲が狭くなってしまっている。

しかし、上の計算は分解 (10) の内側の和を各点評価しているわけであり、解析数論での常套手段である「平均的評価でなんとかくぐり抜ける」を使う余地がある。もちろん周知の通り、Huxley–Ingham の零点密度評価を使えば

$$\int_X^{2X} \left| \sum_{x<n\le x+H} \log p - H \right|^2 dx \ll XH^2L^{-A}, \quad X^{\frac{1}{6}+\varepsilon} \le H \le X \qquad (12)$$

という短区間中の素数定理の平均版も得られる。これを直接、分解 (10) に代入すれば $X^{\frac{1}{6}+\varepsilon} \le H \le X$ の範囲で漸近式が得られそうなものであるが、実際に計算してみると次のように思い違いに気づくのである。まず、分解 (10) には外側の m に渡る平均があると言えどこれは離散的な平均なので、連続的な平均 (12) を使うためには、内側の和の変位を考える必要がある。分解 (10) の外側の和は整数点上で平均を取っているので、$m \le x \le m+1$ といったような状況を考えればよく、この範囲において

$$\left| \sum_{X-m^2<p\le X-m^2+H} \log p - \sum_{X-x^2<p\le X-x^2+H} \log p \right| \ll mL$$

[1] 案外思い込みというのは危険であり、そもそもこの最初のステップが上手くないのかもしれない。

という評価が得られる。従って、$m \le x \le m+1$ で平均を取り、

$$\sum_{X-m^2<p\le X-m^2+H} \log p = \int_m^{m+1} \left(\sum_{X-x^2<p\le X-x^2+H} \log p \right) dx + O(mL)$$

を得るが、さらに分解 (10) へと代入し

$$\begin{aligned}
&\sum_{X<N\le X+H} R(N) \\
&= \int_1^{[\sqrt{X}]+1} \left(\sum_{X-x^2<p\le X-x^2+H} \log p \right) dx + O(H^2 X^{-\frac{1}{2}} L + XL) \\
&= HX^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{X-1} \left(\sum_{x<p\le x+H} \log p - H \right) \frac{dx}{\sqrt{X-x}} + O(H^2 X^{-\frac{1}{2}} L + XL)
\end{aligned}$$

を得る。右辺第二項目は Cauchy–Schwarz 不等式と (12) により、$X^{\frac{1}{6}+\varepsilon} \le H \le X$ の下

$$\ll \left(\int_0^{X-1} \left| \sum_{x<p\le x+H} \log p - H \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \ll HX^{\frac{1}{2}} L^{-A}$$

程度で抑えられるだろう。こうして、

$$\sum_{X<N\le X+H} R(N) = HX^{\frac{1}{2}} + O(HX^{\frac{1}{2}} L^{-A} + XL)$$

を範囲 $X^{\frac{1}{6}+\varepsilon} \le H \le X^{1-\varepsilon}$ で得られたわけであるが、よく見てみると誤差項に XL という項が現れており、この項が $HX^{\frac{1}{2}}L^{-A}$ くらいになるためには $X^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \le H$ 程度の条件が必要になる。やっぱり「平方数がひっかかる」のである。

3 明示公式で解きほぐす

前節での計算はどちらかというと短区間中の素数定理を単に代入しただけであり、もっと explicit に短区間中の素数定理の誤差を見るということを怠っている。そこで Riemann–von Mangoldt 明示公式

$$\sum_{n\le x} \Lambda(n) = x - \sum_{|\gamma|\le T} \frac{x^\rho}{\rho} + O(XT^{-1}L^2) \tag{13}$$

をそのまま代入しよう。ただしここで、各変数は $0 \le x \le X$ および $2 \le T \le 2X$ の範囲を動き、$\rho = \beta + i\gamma$ は Riemann zeta 関数の零点を重複度込みで渡る。まず、もともとの和 (7) は von Mangoldt 関数ではなく $\log p$ で与えられているので、その差である

二次以上の素べきを注意する必要がある[2]が、これは Jacobi の 2 平方和定理による

$$\sum_{X<p^2+m^2\le X+H} \log p \ll L \sum_{X<n\le X+H} \sum_{\ell^2+m^2=n} 1 \ll HX^{\varepsilon}L$$

という評価および

$$\sum_{\nu=3}^{O(L)} \sum_{X<p^\nu+m^2\le X+H} \log p \ll L \sum_{\nu=3}^{O(L)} \sum_{X<n\le X+H} n^{\frac{1}{\nu}} \ll L^2 \sum_{X<n\le X+H} n^{\frac{1}{3}} \ll HX^{\frac{1}{3}}L^2$$

という評価により正当化できる。すると、分解 (10) は

$$\sum_{X<N\le X+H} R(N) = \sum_{m^2\le X} \sum_{X-m^2<\ell\le X-m^2+H} \Lambda(\ell) + O(H^2X^{-\frac{1}{2}}L + HX^{\frac{1}{3}}L^2)$$

と書き換えられる。条件 $H \le X^{1-\varepsilon}$ を仮定して、ここに明示公式 (13) を代入すれば、

$$\sum_{X<N\le X+H} R(N) = HX^{\frac{1}{2}} - E + O((HX^{\frac{1}{2}-\varepsilon} + X^{\frac{3}{2}}T^{-1})L^2) \tag{14}$$

ただし

$$E = \sum_{m^2\le X} \sum_{|\gamma|\le T} \frac{(X+H-m^2)^\rho - (X-m^2)^\rho}{\rho} \tag{15}$$

を得る。

このような零点に渡る和を評価するために Huxley–Ingham の零点密度定理を使おう。まず、実数 $1/2 \le \alpha \le 1$ と $T>0$ に対して、$N(\alpha, T)$ で Riemann zeta 関数の零点 $\rho = \beta + i\gamma$ であって $\alpha \le \beta \le 1$ かつ $|\gamma| \le T$ なるものの個数を表すことにする。

Theorem 2 (Huxley–Ingham の零点密度定理 [5, 6]). 実数 $1/2 \le \alpha \le 1$ と $T>0$ に対し、

$$N(\alpha,T) \le T^{c(\alpha)}L^C, \quad c(\alpha) = \begin{cases} \frac{12}{5}(1-\alpha) & (\textit{if } 3/4 \le \alpha \le 1), \\ \frac{3(1-\alpha)}{2-\alpha} & (\textit{if } 1/2 \le \alpha \le 3/4), \end{cases}$$

ただし $C>0$ はある絶対定数。

さらに次の Korobov–Vinogradov の非消滅領域を思い出しておく。

Theorem 3 (Korobov–Vinogradov の非消滅領域 [7, Theorem 6.1]). 絶対定数 $c_0>0$ が存在して、領域

$$\{s \in \mathbb{C} \mid s = \sigma + it,\ \sigma > 1 - c_0(\log\tau)^{-\frac{2}{3}}(\log\log\tau)^{-\frac{1}{3}}\}, \quad \tau = |t| + 4$$

において $\zeta(s) \ne 0$.

この 2 つを合わせて次の評価を得る。

---

[2]実際、明示公式 (13) は $X^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \le T$ の範囲で $\Lambda(n)$ を $\log p$ に置き換えることはできない。

Lemma 1. 実数 $1 \le K \le X$ に対して、

$$\sum_{K<|\gamma|\le 2K} X^{\beta} \ll (KX^{\frac{1}{2}} + K^{\frac{3}{4}}X^{\frac{11}{16}} + K^{\frac{12}{5}\Theta}X^{1-\Theta})L^C,$$

ただしここで、$\Theta = c_1(\log X)^{-\frac{2}{3}}(\log\log X)^{-\frac{1}{3}}$ であり、$c_1, C > 0$ は絶対定数。

Proof. まず、明らかに $\beta \ge 1/2$ なる部分のみ考えればよい。すると、部分総和法と Korobov–Vinogradov 非消滅領域により、

$$\sum_{\substack{K<|\gamma|\le 2K \\ \beta\ge 1/2}} X^{\beta} = -\int_{1/2}^{1-\Theta} X^{\alpha} dN(\alpha, 2K) = KX^{\frac{1}{2}}L + L\int_{1/2}^{1-\Theta} X^{\alpha}N(\alpha, 2K)d\alpha \qquad (16)$$

となる。Huxley–Ingham の零点密度定理において、$c(\alpha)$ を上から線形関数で抑えて、

$$N(\alpha, T) \le T^{\tilde{c}(\alpha)}L^C, \quad \tilde{c}(\alpha) = \begin{cases} \frac{12}{5}(1-\alpha) & (\text{if } 11/16 \le \alpha \le 1), \\ \frac{5-4\alpha}{3} & (\text{if } 1/2 \le \alpha \le 11/16), \end{cases}$$

を得る。この評価を (16) に代入して、

$$\sum_{K<|\gamma|\le 2K} X^{\beta} \ll \left(KX^{\frac{1}{2}} + \int_{1/2}^{1-\Theta} X^{\alpha}K^{\tilde{c}(\alpha)}d\alpha \right) L^C$$

となるが、

$$X^{\alpha}K^{\tilde{c}(\alpha)} = \exp(\alpha\log X + \tilde{c}(\alpha)\log K)$$

は区間 $[1/2, 11/16]$ および $[11/16, 1-\Theta]$ それぞれで α に関する線形関数になっているので、最大値を $\alpha = 1/2, 11/16, 1-\Theta$ のいずれかでとる。従って Lemma 1 を得る。 □

すると、短区間中の素数定理 (11) に対応して、パラメター $U \le X^{\frac{5}{12}-\varepsilon}$ に対し、

$$\sum_{m^2\le X}\sum_{|\gamma|\le U} \frac{(X+H-m^2)^{\rho} - (X-m^2)^{\rho}}{\rho} \ll HX^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon\Theta} \qquad (17)$$

くらいのことが言える。実際、この左辺は

$$= \sum_{m^2\le X-H}\sum_{|\gamma|\le U}\int_{X-m^2}^{X+H-m^2} u^{\rho-1}du + O\left(\sum_{X-H<m^2\le X}\sum_{|\gamma|\le U} \frac{H}{|\gamma|} \right)$$
$$\ll H\sum_{m^2\le X-H}\sum_{|\gamma|\le U}(X-m^2)^{\beta-1} + HX^{\frac{1}{2}-\varepsilon}L^2 \ll HX^{-\frac{1}{2}}\sum_{|\gamma|\le U} X^{\beta} + HX^{\frac{1}{2}-\varepsilon}L^2$$

であり、Lemma 1 を用いれば、これはさらに

$$\ll HX^{\frac{1}{2}}(UX^{-\frac{1}{2}} + U^{\frac{3}{4}}X^{-\frac{5}{16}} + U^{\frac{12}{5}\Theta}X^{-\Theta})L^C + HX^{\frac{1}{2}-\varepsilon}L^2$$

となり、$U \le X^{\frac{5}{12}-\varepsilon}$ の下でこの右辺は $\ll HX^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon\Theta}$ である。

そこで以後 U は $U \leq X^{\frac{5}{12}-\varepsilon}$ の範囲を動くこととして、

$$E(U) = \sum_{m^2 \leq X} \sum_{U < |\gamma| \leq T} \frac{(X+H-m^2)^\rho - (X-m^2)^\rho}{\rho} \tag{18}$$

を考える。今行いたいのは、変数 m に渡る和の引き起こす打ち消し合いなので、

$$S_\rho(Q) = \frac{1}{\rho} \sum_{m^2 \leq X} (Q-m^2)^\rho, \quad X \leq Q \leq X+H \tag{19}$$

とおいて

$$E(U) = \sum_{U < |\gamma| \leq T} \{S_\rho(X+H) - S_\rho(X)\} \tag{20}$$

と書き直しておこう。

4　平方数に渡る打ち消し合い

さて、これから和 (19) にどのくらい打ち消し合いが起こるか評価をしたい。そこで、Poisson 和公式を使って和 (19) を展開する。まず、和を

$$S_\rho(Q) = \frac{1}{\rho} \sum_{m^2 \leq Q} (Q-m^2)^\rho + O\left(\frac{H^{\frac{3}{2}}}{|\gamma|}\right)$$

と変形しておく。いわゆる鋸状波 $\psi(x) = \{x\} - 1/2$ を考え、部分総和法によって

$$\begin{aligned} S_\rho(Q) &= \frac{1}{\rho} \int_0^Q (Q-u)^\rho d[u^{\frac{1}{2}}] + O\left(\frac{H^{\frac{3}{2}}}{|\gamma|}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\frac{3}{2})} Q^{\rho+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\rho} \int_0^Q (Q-u)^\rho d\psi(u^{\frac{1}{2}}) + O\left(\frac{H^{\frac{3}{2}}}{|\gamma|}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\frac{3}{2})} Q^{\rho+\frac{1}{2}} - \int_0^{Q-1} (Q-u)^{\rho-1} \psi(u^{\frac{1}{2}}) du + O\left(\frac{H^{\frac{3}{2}} + X^\beta}{|\gamma|}\right) \end{aligned}$$

とする。ここで Fourier 展開

$$\psi(x) = -\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{e(nx)}{2\pi i n} \quad (x \notin \mathbb{Z})$$

を代入し、この Fourier 級数の有界収束性に注意して

$$S_\rho(Q) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\frac{3}{2})} Q^{\rho+\frac{1}{2}} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{I_{n,\rho}(Q)}{2\pi i n} + O\left(\frac{H^{\frac{3}{2}} + X^\beta}{|\gamma|}\right), \tag{21}$$

$$I_{n,\rho}(Q) := \int_0^{Q-1} (Q-u)^{\rho-1} e(nu^{\frac{1}{2}}) du = \int_1^Q u^{\rho-1} e(n(Q-u)^{\frac{1}{2}}) du \tag{22}$$

という展開を得る。

この積分 $I_{n,\rho}(Q)$ を first derivative estimate [7, Lemma 2.1] と second derivative estimate [7, Lemma 2.2] を用いて評価してみることにしよう。関数たち

$$G(u) = u^{\beta-1}, \quad F(u) = n(Q-u)^{\frac{1}{2}} + \frac{\gamma}{2\pi}\log u$$

を導入すれば、

$$I_{n,\rho}(Q) = \int_1^Q G(u)e(F(u))du$$

と書ける。関数 $F(u)$ の導関数を計算すれば

$$F'(u) = -\frac{n}{2(Q-u)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\gamma}{2\pi u}, \quad F''(u) = -\frac{n}{4(Q-u)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\gamma}{2\pi u^2}$$

となる。振動数 n が大きい場合を評価しようとすると、$|n| > Q^{\frac{1}{2}}|\gamma|$ の範囲で

$$|F'(u)| \geq \frac{|n|}{2Q^{\frac{1}{2}}} - \frac{|\gamma|}{2\pi} \geq \left(1 - \frac{1}{\pi}\right)\frac{|n|}{2Q^{\frac{1}{2}}}$$

とできる。従って first derivative estimate により、この範囲は

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ |n|>Q^{\frac{1}{2}}|\gamma|}}^{\infty} \frac{I_{n,\rho}(Q)}{2\pi i n} \ll \sum_{n>Q^{\frac{1}{2}}|\gamma|} \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{n^2} \ll \frac{1}{|\gamma|} \tag{23}$$

と評価できる。残りの部分では、先に dyadic に

$$I_{n,\rho}(Q) \ll L \sup_{1\leq R\leq Q} \left| \int_R^{\min(2R,Q)} G(u)e(F(u))du \right|$$

と分割する。もし γ と n の符号が逆であれば、

$$|F'(u)| \geq \frac{|\gamma|}{2\pi u}$$

なので、first derivative estimate を用いて、

$$\int_R^{\min(2R,Q)} G(u)e(F(u))du \ll R^{\beta-1}\left(\frac{|\gamma|}{R}\right)^{-1} \ll \frac{X^\beta}{|\gamma|} \tag{24}$$

とできる。一方、もし γ と n の符号が同じであれば、

$$|F''(u)| \geq \frac{|\gamma|}{2\pi u^2}$$

なので、second derivative estimate を用いて、

$$\int_R^{\min(2R,Q)} G(u)e(F(u))du \ll R^{\beta-1}\left(\frac{|\gamma|}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \ll \frac{X^\beta}{|\gamma|^{\frac{1}{2}}} \tag{25}$$

とできる。結局、展開 (21) に評価 (23), (24), (25) を代入して

$$S_\rho(Q) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\frac{3}{2})}Q^{\rho+\frac{1}{2}} + O\left(\frac{X^\beta L^2}{|\gamma|^{\frac{1}{2}}} + \frac{H^{\frac{3}{2}}}{|\gamma|}\right) \tag{26}$$

という漸近式を得る。この漸近式が平方数に渡る和のもたらす打ち消し合いを観測していると期待したいわけである。

5 「1/2の壁」を乗り越える

さて、前節で Poisson 和公式を用いて示した漸近式 (26) を実際に (20) に代入してみることにする。すると、

$$E(U) = E_1(U) + O\left((E_2(U) + H^{\frac{3}{2}})L^2\right) \tag{27}$$

ただし

$$E_1(U) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{U<|\gamma|\le T}\frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\frac{3}{2})}\left\{(X+H)^{\rho+\frac{1}{2}} - X^{\rho+\frac{1}{2}}\right\}, \quad E_2(U) = \sum_{U<|\gamma|\le T}\frac{X^\beta}{|\gamma|^{\frac{1}{2}}}$$

を得る。

まず、前半の $E_1(U)$ はさらに

$$E_{11}(U) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{U<|\gamma|\le X/H}\frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\frac{3}{2})}\left\{(X+H)^{\rho+\frac{1}{2}} - X^{\rho+\frac{1}{2}}\right\},$$

$$E_{12}(U) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{X/H<|\gamma|\le T}\frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\frac{3}{2})}\left\{(X+H)^{\rho+\frac{1}{2}} - X^{\rho+\frac{1}{2}}\right\}$$

と分ける。すると、$E_{11}(U)$ に対しては、Stirling の公式を用いて

$$E_{11}(U) \ll \sum_{U<|\gamma|\le X/H}\frac{1}{|\gamma|^{\frac{1}{2}}}\int_X^{X+H}u^{\rho-\frac{1}{2}}du \ll HX^{-\frac{1}{2}}L\sup_{U<K\le X/H}K^{-\frac{1}{2}}\sum_{K<|\gamma|\le 2K}X^\beta$$

とした後に Lemma 1 を用いて

$$E_{11}(U) \ll \left(H^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}} + H^{\frac{3}{4}}X^{\frac{7}{16}} + HU^{-\frac{1}{2}+\frac{12}{5}\Theta}X^{\frac{1}{2}-\Theta}\right)L^C \ll HX^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon\Theta}$$

という評価を得る。一方、$E_{12}(U)$ に対しては

$$E_{12}(U) \ll \sum_{X/H<|\gamma|\le T}\frac{X^{\beta+\frac{1}{2}}}{|\gamma|^{\frac{3}{2}}} \ll X^{\frac{1}{2}}L\sup_{X/H<K\le T}K^{-\frac{3}{2}}\sum_{K<|\gamma|\le 2K}X^\beta$$

とするが、結局 Lemma 1 を代入すれば、上記 sup で $K = X/H$ のときを考えれば十分とわかり、$E_{12}(U)$ は $E_{11}(U)$ と同じように評価されることが分かる。以上をまとめて、

$$E_1(U) \ll HX^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon\Theta} \tag{28}$$

を得る。

最後に残った $E_2(U)$ を考えよう。まず dyadic に

$$E_2(U) \ll L \sup_{U<K\le T} K^{-\frac{1}{2}} \sum_{K<|\gamma|\le 2K} X^{\beta} \tag{29}$$

と分割する。ここで Lemma 1 を用いるのではなく、Theorem 2 を直接用いよう。部分総和法を Lemma 1 の証明と同様に用いて、

$$K^{-\frac{1}{2}} \sum_{K<|\gamma|\le 2K} X^{\beta} \ll \left(K^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}} + I_1 + I_2\right) L^C \tag{30}$$

ただし

$$I_1 = \int_{1/2}^{3/4} X^{\alpha} K^{\frac{3(1-\alpha)}{2-\alpha}-\frac{1}{2}} d\alpha, \quad I_2 = \int_{3/4}^{1} X^{\alpha} K^{\frac{12}{5}(1-\alpha)-\frac{1}{2}} d\alpha$$

を得る。最初の I_1 においては、被積分関数の K の指数が正なので、$K=T$ の場合の寄与のみ考えればよい。簡単のため $T=X^s$ とおけば、

$$I_1 \ll X^{\frac{5s}{2}} \int_{1/2}^{3/4} X^{\alpha-\frac{3s}{2-\alpha}} d\alpha \ll X^{\frac{5s}{2}+2(1-\sqrt{3s})} \tag{31}$$

と評価できる。一方、I_2 については、被積分関数の X と K の指数が線形関数なので

$$I_2 \ll X^{\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{10}} + XK^{-\frac{1}{2}} \ll X^{\frac{3}{4}+\frac{s}{10}} + XU^{-\frac{1}{2}} \tag{32}$$

と評価できる。従って、(29)、(30)、(31)、(32) より

$$E_2(U) \ll (X^{\frac{5s}{2}+2(1-\sqrt{3s})} + X^{\frac{1}{2}+\frac{s}{2}} + X^{\frac{3}{4}+\frac{s}{10}} + XU^{-\frac{1}{2}})L^C$$

となるが、右辺第 2・3 項目は右辺第 1 項目より小さいので、

$$E_2(U) \ll (X^{\frac{5s}{2}+2(1-\sqrt{3s})} + XU^{-\frac{1}{2}})L^C \tag{33}$$

となる。

以上の (14)、(15)、(17)、(18)、(27)、(28)、(33) より、

$$\sum_{X<N\le X+H} R(N) = HX^{\frac{1}{2}} + O((X^{\frac{5s}{2}+2(1-\sqrt{3s})} + X^{\frac{3}{2}-s} + XU^{-\frac{1}{2}})L^2 + HX^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon\Theta})$$

を条件 $U \le X^{\frac{5}{12}-\varepsilon}$ の下で得る。パラメター s を最適化して $s=\frac{17+4\sqrt{15}}{49}$ と取り、$U=X^{\frac{1}{3}} \le X^{\frac{5}{12}-\varepsilon}$ とでもおいてみると、

$$\sum_{X<N\le X+H} R(N) = HX^{\frac{1}{2}} + O(HX^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon\Theta} + X^{\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon}), \quad \theta = \frac{32-4\sqrt{15}}{49} = 0.3368\cdots$$

を得る。以上をまとめて、次のような Theorem 1 の改善が得られる。

Theorem 4. ある定数 $C>0$ が存在して、任意の実数 $\varepsilon>0$ に対して、漸近式 (8) が

$$X^{\theta+\varepsilon} \le H \le X^{1-\varepsilon}, \quad H \ge 2, \quad \theta = \frac{32-4\sqrt{15}}{49} = 0.3368\cdots$$

の下で成り立つ。ただし *implicit constant* は ε のみに依存する。

6　新たなる謎の壁 1/3

かくして直接の平均 (7) に対しては「1/2 の壁」をきちんと乗り越えることに成功したわけである。ところで、Riemann 予想を仮定した場合は、Languasco と Zaccagnini は次を得ている。

Theorem 5 (Languasco and Zaccagnini [8, Theorem 1]). *Riemann* 予想を仮定する。するとある定数 $C > 0$ が存在して、任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して、漸近式 (8) が

$$X^{\frac{1}{4}+\varepsilon} \le H \le X^{1-\varepsilon}, \quad H \ge 2$$

の下で成り立つ。ただし *implicit constant* は ε のみに依存する。

前節までの我々の手法は Languasco と Zaccagnini の Theorem 1 を改善したわけなので、Riemann 予想を仮定した場合も Theorem 5 と同等かより良い結果を出すだろうと思うのが自然である。前節の計算にでてきた $E_2(U)$ について考えると、Riemann 予想の仮定のもと、

$$E_2(U) = X^{\frac{1}{2}} \sum_{U < |\gamma| \le T} \frac{1}{|\gamma|^{\frac{1}{2}}} \asymp X^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} L$$

となる。明示公式 (14) に現れる誤差 $X^{\frac{3}{2}} T^{-1} L^2$ を見れば $T \ge X/H$ となるように T を取らざるを得ず、

$$E_2(U) \gg X H^{-\frac{1}{2}}$$

となる。これが主項 $HX^{\frac{1}{2}}$ より小さくなるためには $H \ge X^{\frac{1}{3}}$ でなければならないという制約がつく。…しかしこれは上記 Theorem 5 よりすでに悪い条件となっている。Riemann 予想を仮定した場合、我々の手法はいったいどこで Languasco–Zaccagnini の手法より劣る結果を出すようになってしまったのであろうか。筆者の思い違いかもしれないが、藤井が本稿の手法のように直接的に示した結果 [4, Theorem] が Bhowmik と Schlage-Puchta [1, Theorem 1.1] により改善されたことと似た雰囲気を感じる。

謝辞

本研究集会での講演の機会をいただき、研究代表者の藤田育嗣先生ならびに研究副代表者の見正秀彦先生に感謝申し上げます。また、本稿の完成が大幅に遅れましたことについてこの場をお借りしてお詫びさせていただくとともに、藤田先生、見正先生の寛大なご配慮にも再度深く感謝申し上げます。本研究は JSPS 科研費 JP16J00906 の助成を受けたものです。

References

[1] G. Bhowmik and J. C. Schlage-Puchta, *Mean representation number of integers as the sum of primes*, Nagoya Math. J. **200** (2010), 27–33.

[2] R. Brünner, A. Perelli and J. Pintz, *The exceptional set for the sum of a prime and a square*, Acta Math. Hungar. **53** (1989), 347–365.

[3] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some problems of 'Partitio Numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math. **44** (1923), 1–70.

[4] A. Fujii, *An additive problem of prime numbers. II*, Proc. Japan Acad. Ser. A **67** (1991), 248–252.

[5] M. N. Huxley, *On the difference between consecutive primes*, Invent. Math. **15** (1972), 164–170.

[6] A. E. Ingham, *On the estimation of* $N(\sigma, T)$, Q. J. Math. **11** (1940), 291–292.

[7] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function*, (John Wiley & Sons, 1985).

[8] A. Languasco and A. Zaccagnini, *Short intervals asymptotic formulae for binary problems with primes and powers, I: density* 3/2, Ramanujan J. **42** (2017), 371–383.

[9] J. Y. Liu and T. Zhan, *On a theorem of Hua*, Arch. Math. **69** (1997), 375–390.

[10] R. J. Miech, *On the equation* $n = p + x^2$, Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), 494–512.

[11] H. Mikawa, *On the sum of a prime and a square*, Tsukuba J. Math. **17** (1993), 299–310.

[12] A. Perelli and J. Pintz, *Hardy–Littlewood numbers in short intervals*, J. Number Theory **54** (1995), 297–308.

[13] Y. Suzuki, *On prime vs. prime power pairs*, preprint (2016), `arXiv:1610.09084`.

Yuta Suzuki
Graduate School of Mathematics, Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602, Japan
e-mail: m14021y@math.nagoya-u.ac.jp