数理解析研究所講究録 第2094巻 2018年 65-72

Banach–Nečas–Babuška の定理と DG time-stepping 法

齊藤 宣一 *
東京大学大学院数理科学研究科

Banach–Nečas–Babuška theorem and the DG time-stepping method

Norikazu SAITO
Graduate School of Mathematical Sciences
The University of Tokyo

1 Banach–Nečas–Babuška の定理

■ Lax–Milgram **の定理**. V を実 Hilbert 空間, $\|\cdot\|$ をそのノルムとする. V の双対空間（V 上の有界双線形形式の全体）を V' で表す. $a(\cdot,\cdot)$ を $V\times V$ 上の有界双線形形式とする. すなわち,

$$\|a\| \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{u,v\in V} \frac{a(u,v)}{\|u\|\cdot\|v\|} < \infty.$$

定理 1. 次を満たす正定数 α の存在を仮定する（強圧性, coercivity）：

$$a(v,v) \ge \alpha\|v\|^2 \quad (v\in V). \tag{1}$$

このとき, 任意の $L\in V'$ に対して, 変分方程式

$$a(u,v) = L(v) \quad (\forall v\in V)$$

の解 $u\in V$ が一意に存在する.

注意 2. 解 u は, $\alpha\|u\| \le \|L\|_{V'} \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{v\in V}\frac{L(v)}{\|v\|}$ を満たす.

* 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 E-mail:norikazu@ms.u-tokyo.ac.jp

この定理は，Lax & Milgram [5] による：

> "The following theorem is a mild generalization of the Fréchet–Riesz Theorem on the representation of bounded linear functionals in Hilbert space."

■ **Lions の定理**．　次に，$T>0$ に対して，$J=(0,T)$ とおく．$\Omega\subset\mathbb{R}^d$ を有界領域として，熱方程式の初期値境界値問題

$$
\textbf{(P)}\quad \begin{cases} \partial_t u-\Delta u &= f \qquad (x\in\Omega,\ t\in J),\\ u &= 0 \qquad (x\in\partial\Omega,\ t\in J),\\ u(x,0) &= u_0(x) \quad (x\in\Omega) \end{cases}
$$

を考える．（実際には，もっと一般的な形が扱えるが，簡単のため，熱方程式のみを扱うことにする．）

$H=L^2(\Omega)$，$V=H_0^1(\Omega)=\{v\in L^2(\Omega)\mid \nabla v\in L^2(\Omega)^d,\ v|_{\partial\Omega}=0\}$ とする．$\langle\cdot,\cdot\rangle={}_{V'}\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ で V' と V の双対積（duality pairing），$(\cdot,\cdot)=(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ で H の内積を表すものとする．さらに，$\mathcal{X}=L^2(J;V)\cap H^1(J;V')$，$\mathcal{Y}=L^2(J;V)\times H$ とおく．ここで，Bochner 積分の表記

$$
\|v\|_{L^2(J;V)}^2=\int_J \|v(t)\|_V^2\ dt
$$

を用いている．

(P) の弱形式として次を採用する．

(WP) 次の "変分方程式" を満たす $u\in\mathcal{X}$ を求めよ：

$$
\underbrace{\int_J [\langle\partial_t u,v_1\rangle+(\nabla u,\nabla v_1)]\ dt+(u(0),v_2)}_{=B(u,v)}
$$
$$
=\underbrace{\int_J \langle f,v_1\rangle\ dt+(u_0,v_2)}_{=L(v)}\qquad \forall v=(v_1,v_2)\in\mathcal{Y}.
$$

注意 3. $\mathcal{X}\subset C^0(\overline{J};H)$（連続）なので，$u(0)=u(\cdot,0)\in H$ は意味を持つ．

定理 4. $f\in L^2(J;V')$ と $u_0\in H$ を仮定する．このとき，**(WP)** には一意な解 $u\in\mathcal{X}$ が存在し，$\|u\|_{\mathcal{X}}\le C(\|u_0\|_H+\|f\|_{L^2(J;V')})$ を満たす．

この定理の証明に，Lax–Milgram の定理は利用できない．普通は，Galerkin 法で証明される．その際には，関数空間は可分（separable）であることが要請される．また，$\mathcal{X}\subset C^0(\overline{J};H)$（コンパクト）も必要になる（Aubin–Lions の定理）．

■ **Banach–Nečas–Babuška の定理**. (WP) の形の変分方程式に適用できる "Lax–Milgram 型" の定理も知られている．V を実 Banach 空間，W を回帰的 (reflexive) 実 Banach 空間とする．

定理 5. $V \times W$ 上の有界双線形形式 $a(\cdot,\cdot)$ に対して，次の (i)–(iii) は**同値**である．

(i) 任意の $L \in W'$ に対して次を満たす $u \in V$ が一意に存在する：

$$a(u,w) = L(w) \quad (\forall w \in W).$$

(ii) 次の (BNB1) と (BNB2) が成り立つ：

$$\exists \beta > 0, \quad \inf_{v\in V} \sup_{w\in W} \frac{a(v,w)}{\|v\|_V \|w\|_W} = \beta; \tag{BNB1}$$

$$w \in W,\ (\forall v \in V,\ a(v,w) = 0) \ \Rightarrow\ (w = 0). \tag{BNB2}$$

(iii) 次の (BNB3) が成り立つ：

$$\exists \beta_1, \beta_2 > 0,$$
$$\inf_{v\in V} \sup_{w\in W} \frac{a(v,w)}{\|v\|_V \|w\|_W} = \beta_1, \quad \inf_{w\in W} \sup_{v\in V} \frac{a(v,w)}{\|v\|_V \|w\|_W} = \beta_2. \tag{BNB3}$$

注意 6. 1. $\beta = \beta_1 = \beta_2$ が成り立つ．

2. (i) の解 u は，$\|u\|_V \le \frac{1}{\beta}\|L\|_{W'}$ を満たす．

3. (BNB1) は，次のように書いても良い：

$$\exists \beta > 0, \quad \sup_{w\in W} \frac{a(v,w)}{\|w\|_W} \ge \beta \|v\|_V \quad (\forall v \in V).$$

4. (BNB2) は，次のように書いても良い：

$$\sup_{v\in V} |a(v,w)| > 0 \quad (\forall w \in W, w \ne 0).$$

5. $W = V$ のとき，(1) から (BNB3) が従う．すなわち，定理 1 は定理 5 の系である．

Ern & Guermond [3] では，この定理を Banach–Nečas–Babuška の定理と呼んでおり，この論文でもそれに従う．（しかし，[3] の前身である [2] では "Nečas の定理" と呼んでいる．）他には，一般化 Lax–Milgram の定理，Babuška–Lax–Milgram の定理などと呼ばれる．(BNB1) は，Babuška–Brezzi 条件，inf-sup 条件などと呼ばれる．この定理に関わる個人的な理解を [7] で述べた．

2 DG 時間離散化手法

V と H は（実）Hilbert 空間であり，$V \subset H$ は稠密で，単射が連続であるようなものとする．V' と H' をその双対空間とし，通常のように H と H' を同一して，$V \subset H \subset V'$ を考える．$(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_H$，$\|\cdot\| = \|\cdot\|_H$ と表し，さらに，$\langle\cdot,\cdot\rangle = {}_{V'}\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ で V' と V の双対積を表すことにする．$T > 0$ に対して，$J = (0,T)$ とおく．$t \in J$ に対して，線形作用素 $A(t) : V \to V'$ を考え，

$$\langle A(t)w, v\rangle \le M\|w\|_V\|v\|_V, \quad \langle A(t)v, v\rangle \ge \alpha\|v\|_V^2 \quad (w, v \in V,\ \text{a.e. } t \in J)$$

を仮定する．ただし，M と α は $t \in J$ とは無関係な正定数である．

次の形の放物型発展方程式の初期値問題を考える：

$$u' + A(t)u = F(t), \quad t \in J; \qquad u(0) = u_0. \tag{2}$$

ここで，$u' = du(t)/dt$ と書いている．$F : J \to V'$ と $u_0 \in H$ は与えられた関数である．

方程式 (2) を扱うための枠組みは，複数知られているが，本研究では，J. L. Lions による変分法的な枠組みを採用する．それが，後で考える離散化手法の解析に有利だからである．関数空間 $\mathcal{X} = L^2(J;V) \cap H^1(J;V')$，$\mathcal{Y} = L^2(J;V) \times H$ を用いる．ノルムは，それぞれ，$\|w\|_{\mathcal{X}}^2 = \|w\|_{L^2(J;V)}^2 + \|w'\|_{L^2(J;V')}^2$，$\|(v_1,v_2)\|_{\mathcal{Y}}^2 = \|v_1\|_{L^2(J;V)}^2 + \|v_2\|^2$ とする．

(2) の変分法的な定式化は次のようになる．与えられた $F \in L^2(J;V')$ と $u_0 \in H$ に対して，次を満たす $u \in \mathcal{X}$ を求めよ：

$$\begin{aligned} B(u,v) &\overset{\text{def.}}{=} \int_J [\langle u', v_1\rangle + \langle A(t)u, v_1\rangle]\ dt + (u(0), v_2) \\ &= \int_J \langle F, v_1\rangle\ dt + (u_0, v_2) \qquad (\forall v = (v_1,v_2) \in \mathcal{Y}). \end{aligned} \tag{3}$$

ここで，$u \in \mathcal{X}$ に対して，$u(0) \in H$ は well-defined であることに注意されたい．(3) の解の一意存在は，普通，Galerkin 法によって問題を常微分方程式系で近似し，極限移行をすることで証明される．

ここでは，別のアプローチに着目したい．双線形形式 B は，$\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ で有界である．さらに，次の 2 つが成り立つことが知られている（例えば，[3, Theorem 6.6] や [8, (32)]）：

$$\exists\beta > 0, \quad \inf_{w\in\mathcal{X}} \sup_{v\in\mathcal{Y}} \frac{B(w,v)}{\|w\|_{\mathcal{X}}\|v\|_{\mathcal{Y}}} = \beta; \tag{4a}$$

$$v \in \mathcal{Y}, \quad (\forall w \in \mathcal{X},\ B(w,v) = 0) \quad \Longrightarrow \quad (v = 0). \tag{4b}$$

したがって，Banach–Nečas–Babuška 定理が応用できて，結果として，(3) の解 $u \in \mathcal{X}$ の一意存在が結論できる．この解 u が，

$$\|u\|_{\mathcal{X}} \le C\left(\|F\|_{L^2(J;V')} + \|u_0\|\right)$$

を満たすことは (4a) の簡単な結果である．ここで，C は，M と α にのみ依存する（T には依存しない）正定数である．

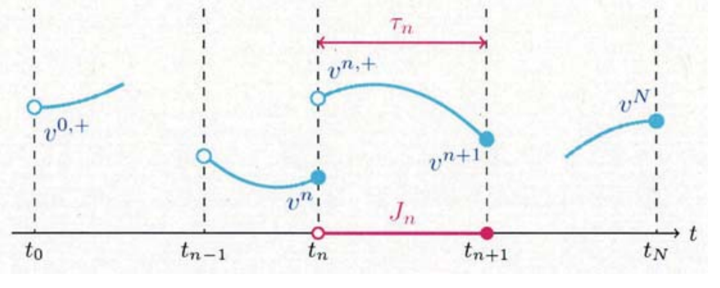
(3) を数値計算するために，まずは，時間変数の離散化について考えたい．$[0,T]$ 内に点 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ を配置し，$J_n = (t_n, t_{n+1}]$，$\tau_n = t_{n+1} - t_n$，$\tau = \max_{0 \le n \le N-1} \tau_n$ とおく．標準的な時間離散スキームでは，時間節点 t_n 上での解の値 $u(t_n)$ の近似値 U_n を計算する．U_{n+1} が U_n と既知の値のみから計算できる場合，そのスキームは一段法と呼ばれる．一方で，楕円型偏微分方程式に対する有限要素法のように，近似を，区分的な多項式のような関数の形で求めたいことも多い．すなわち，Galerkin 法によって離散スキームを導入する．そのために，整数 $q \ge 0$ に対して，

$$\mathcal{S}_\tau = \{v \in L^\infty(J;H) \mid v|_{J_n} \in \mathcal{P}^q(J_n;V),\ 0 \le n \le N-1\}$$

とおく．$\mathcal{P}^q(J_n;V)$ は，J_n 上の q 次以下の V 値多項式全体の集合である．一般に，$v \in \mathcal{P}^q(J_n;V)$，あるいは，$v \in L^2(J_n;V) \cap H^1(J_n;V')$ に対して，

$$v^{n,+} = \lim_{t \downarrow t_n} v(t), \qquad v^{n+1} = v(t_{n+1})$$

と書く．



このとき，(3) に対する，不連続 Galerkin 時間離散化法（DG time-stepping method，dG(q) 法）は次で与えられる（この方法は，[6] で，常微分方程式系に対して提案された）．

dG(q) 法 次を満たす $u_\tau \in \mathcal{S}_\tau$ を求めよ：

$$\sum_{n=0}^{N-1} \int_{J_n} \left[(\partial_t u_\tau, v) + \langle A(t) u_\tau, v\rangle\right] dt + (u_\tau^{0,+}, v^{0,+})$$
$$+ \sum_{n=1}^{N-1} (u_\tau^{n,+} - u_\tau^n, v^{n,+}) = \int_J \langle f, v\rangle\, dt + (u_0, v^{0,+}) \qquad (\forall v \in \mathcal{S}_\tau). \quad (5)$$

局所的な表現を導くため，u_τ^n が得られているとする．このとき，$J_n=(t_n,t_{n+1}]$ での $U=u_\tau|_{J_n}$ は，次で求められる：

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} [(\partial_t U,\phi)+\langle A(t)U,\phi\rangle]\ dt+(U^{n,+}-U^n,\phi^{n,+})$$
$$=\int_{t_n}^{t_{n+1}}\langle f,\phi\rangle\ dt \qquad (\forall\phi\in\mathcal{P}^q(J_n;V)).$$

これより，この方法は一段法としての定式化が可能であることがわかる．実際，dG(0) 法は，（微分作用素の近似に関しては）後退 Euler 法に一致する．$q\geq 1$ の際も，陰的 Runge–Kutta 法の一つとみなせる．その場合の精度は $2q+1$ 次である（これらのことも，本質的には [6] で報告されている）．dG(q) 法は，Space-Time 法での離散化に向いており，流体構造連成問題の計算によく応用されている（例えば，[4] など）．

dG(q) 法の収束については，いろいろな結果が知られている．そのほとんどは，問題を一段法と解釈し，時間節点 t_n での V ノルムや，H ノルムでの誤差を調べている（例えば，[9] など）．

本研究では，dG(q) 法に対して，BNB 定理に基づいた変分法的な解析を遂行し，$L^2(J;V')$ ノルムや $L^2(J;V)$ ノルムでの最適誤差評価の導出に成功した．以下，本研究の主結果の一部を紹介する（詳細は [8] を参照されたい）．

まず，(4a) の離散版が成り立つ．すなわち，次を満たす正定数 c_1 が存在する：

$$\inf_{w_\tau\in\mathcal{S}_\tau}\sup_{v_\tau\in\mathcal{S}_\tau}\frac{B_\tau(w_\tau,v_\tau)}{\|w_\tau\|_{\mathcal{X},\tau}\|v_\tau\|_{\mathcal{Y},\tau,\#}}=c_1. \tag{6}$$

ただし，$\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ と $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$ に対応する DG ノルムとして次を採用している：

$$\|v_\tau\|_{\mathcal{X},\tau}^2=\sum_{n=0}^{N-1}\int_{J_n}\left[\|v_\tau'\|_{V'}^2+\|v_\tau\|_V^2\right]\ dt+\|v_\tau^{0,+}\|^2+\sum_{n=1}^{N-1}\|v_\tau^{n,+}-v_\tau^n\|^2,$$
$$\|v_\tau\|_{\mathcal{Y},\tau,\#}^2=\sum_{n=0}^{N-1}\int_{J_n}\|v_\tau\|_V^2\ dt+\|v_\tau^{0,+}\|^2+\sum_{n=1}^{N-1}\tau_n\|v_\tau^{n,+}\|^2.$$

(6) を用いれば，標準的な議論を経て，

$$\|u-u_\tau\|_{\mathcal{X},\tau}\leq\left(1+\frac{M_1}{c_1}\right)\inf_{w_\tau\in\mathcal{S}_\tau}\|u-w_\tau\|_{\mathcal{X},\tau,\star} \tag{7}$$

が結論できる．ただし，$u\in\mathcal{X}$ は (3) の解，$u_\tau\in\mathcal{S}_\tau$ は (5) の解であり，

$$\|v_\tau\|_{\mathcal{X},\tau,\star}^2=\sum_{n=0}^{N-1}\int_{J_n}\left[\|v_\tau'\|_{V'}^2+\|v_\tau\|_V^2\right]\ dt+\|v_\tau^{0,+}\|^2+\sum_{n=1}^{N-1}\tau_n^{-1}\|v_\tau^{n,+}-v_\tau^n\|^2$$

としている．また，M_1 は，$B_\tau(w,v)\leq M_1\|w\|_{\mathcal{X},\tau,\star}\|v\|_{\mathcal{Y},\tau,\#}$ $(w,v\in\mathcal{S}_\tau)$ を満たす M にのみ依存する正定数である．(7) は，左右のノルムが異なるので，厳密な意味で

の最良近似でもなければ，Dupont–Liu [1] の意味での対称評価にもなっていない．しかし，標準的な補間誤差評価と組み合わせることで，最適誤差評価

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1}\|u'-u'_\tau\|^2_{L^2(J_n;V')}\right)^{1/2}\le c_3\tau^q\left(\|u^{(q+1)}\|_{L^2(J;V')}+\|u^{(q)}\|_{L^2(J;V)}\right)$$

や

$$\sup_{1\le n\le N}\|u(t_n)-u_\tau(t_n)\|+\|u-u_\tau\|_{L^2(J;V)}\le c_4\tau^{q+1}\|u^{(q+1)}\|_{L^2(J;V)}.$$

が，ほとんど機械的な計算で得られる．（ただし，$q=0$ のとき，最初の不等式の成立は自明であり，収束に関してなんの情報ももたらさない．）

これらの結果において，定数 c_1,c_3,c_4 は，M と α にのみ依存して定まる正定数であり，特に τ や T とは無関係である．以上の議論では，ひとたび (6) が得らたならば，あとは，楕円型方程式の Galerkin 近似の解析とほぼ同様に考察を進めることができる．すなわち，放物型問題をあたかも楕円型のように扱える．これが，本研究の最大の利点である．

ここまでは時間変数の離散化についてのみ考察してきた．この結果を，具体的な偏微分方程式の全離散スキームへ応用することは容易である．例えば，熱方程式の Dirichlet 境界値問題を，空間変数について，連続かつ区分的 k 次多項式を用いた標準的な有限要素法（これを cG(k) 法と書くことにする）で離散化する．時間連続 cG(k) 法の誤差評価や安定性は，よく研究されているので，その結果と本研究の結果を合わせることで，時間変数を dG(q) 法で離散化した dG(q)cG(k) 法の最適誤差評価が直ちに得られる．詳細は，[8, §4] を参照されたい．

参考文献

[1] T. F. Dupont and Y. Liu. Symmetric error estimates for moving mesh Galerkin methods for advection-diffusion equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(3):914–927, 2002.

[2] A. Ern and J. L. Guermond. *Éléments finis: théorie, applications, mise en œuvre*, Springer, 2002.

[3] A. Ern and J. L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*, Springer, 2004.

[4] Y. Bazilevs, T. Takizawa, and T. E. Tezduyar. *Computational fluid-structure interaction: methods and applications.* Wiley, 2013.

[5] P. D. Lax and A. N. Milgram. Parabolic equations. In *Contributions to the theory of partial differential equations*, Annals of Mathematics Studies, no. 33, pages 167–190. Princeton University Press, 1954.

[6] P. Lasaint and P. A. Raviart. On a finite element method for solving the neutron transport equation. In *Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations* , pages 89–123, Academic Press, 1974.

[7] N. Saito. Notes on the Banach–Nečas–Babuška Theorem and Kato's minimum modulus of operators. `arXiv:1711.01533`

[8] N. Saito. Variational analysis of the discontinuous Galerkin time-stepping method for parabolic equations. `arXiv:1710.10543`

[9] V. Thomée. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, Springer, 2nd edit. 2007.