

# マルチスケール非適合有限要素法による MR エラストグラフィ

京都大学大学院情報学研究科 前川 秀

Suguru Maekawa

Graduate School of Informatics, Kyoto University

**概要.** 本稿では, MR エラストグラフィの実現のために, time harmonic な粘弾性方程式の係数同定問題の数値計算について論じる. 本研究ではこの問題に対して適当なコスト汎関数を考え, その汎関数の最小化問題として係数同定問題を定式化する. この最小化問題に対しては共役勾配法などの適用が考えられるが, 単純な適用では満足な結果が得られなかった. 本稿では, この最小化問題に対してマルチスケールな同定手法を提案し, 既存の手法による数値計算結果との比較を行う.

## 1. はじめに

MR エラストグラフィ [3] とは, 生体組織の剛性率の非侵襲的な測定方法として提案された技術であり, 癌の早期発見や肝硬変の進行度診断のためにその実現が期待されている. 具体的には, MR エラストグラフィは

1. 単振動する振動子により生体表面で加振
2. 加振により生じた生体内部を伝播する波を MRI で観測
3. 得られた波のデータを元に剛性率を再構成

という手順により剛性率を算出する. 生体は粘弾性体であると考えられており, またこの時に生じる生体内部を伝播する波は time harmonic になることが知られているため, 生体内部を伝播する波の数理解モデルとして time harmonic な粘弾性方程式

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\rho\omega^2 u_j = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( (\mu + i\omega\eta) \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right) \\ \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda \operatorname{div} u) & \text{in } \Omega \ (j = 1, 2), \\ u = f & \text{on } \Gamma_D, \\ \sigma(u) = 0 & \text{on } \Gamma_N, \end{cases}$$

が考えられている. ここで,  $u_1, u_2$  は領域  $\Omega$  上の複素数値関数であり,  $u = (u_1, u_2)$  が粘弾性波を表している. また,  $\rho$  は密度,  $\omega$  は加振周波数であり,  $\mu$  が剛性率を表している. これにより, MR エラストグラフィは与えられた観測値  $u = u_0$  から剛性率  $\mu$  を再構成する係数同定問題として記述される. この問題に対して,  $u_G$  を係数推定  $G = (\mu, \lambda, \eta)$  のもとでの粘弾性波として, 次の最小化問題

$$(1.2) \quad \underset{G}{\operatorname{minimize}} J(G) = \frac{\|u_G - u_0\|^2}{2\|u_0\|^2},$$

を解くことで係数を同定する手法が提案されている [5]. 本稿では, この最小化問題の数値計算手法について論じ, それによる係数同定を行う.

この最小化問題は, 適切な処置をした上で勾配法が適用可能であるため, 容易に数値計算できるように見える. しかしながら, 実際に数値計算を行うと, 後述のように最も単純な問題設定であっても満足な結果が得られない. この原因は様々なものが考えられるが, 同定するパラメータの個数を少なくするとそれに応じて良い計算結果が得られたため, 本研究では同定するパラメータの個数の多さ (計算例ではおよそ数万次元) が原因であると考えた.

この困難を解決するために、本研究ではマルチスケールな係数同定手法を考案した。大雑把に言えば、これは領域  $\Omega$  上定数などといった“荒い”係数同定から始め、領域細分とその上での係数同定を繰り返し、十分“細かい”同定結果が得られたところで終了する、というものである。“荒い”係数同定問題、すなわちパラメータの個数の少ない問題であれば高速に数値計算が可能であり、また各段階の数値計算結果は、次の段階の良い初期推定を与えていることが期待される。従って本手法により係数同定の高速化が見込まれる。

本稿では、time harmonic な粘弾性方程式の係数同定問題に対してマルチスケールな係数同定手法を提案し、先行研究 [2] の手法による数値計算結果との比較を行う。

## 2. time harmonic な粘弾性方程式の係数同定問題

本節では、最小化問題 (1.2) に対して既存の最小化手法を適用し、その数値結果の問題点を確認する。特に、本稿では共役勾配法による最小化を試みる。

まず、共役勾配法を適用するために、変数変換により係数の制約条件を外す。これは、物理的要請により各係数  $\mu, \lambda, \eta$  に正値性などの制約条件が課されるため、無制約問題のための最小化手法である共役勾配法はそのままでは適用することができないためである。本稿の計算では、各係数に適当な上限  $\bar{\mu}, \bar{\lambda}, \bar{\eta}$  と下限  $\underline{\mu}, \underline{\lambda}, \underline{\eta}$  を定め、変数変換

$$(2.1) \quad \begin{aligned} F(G) &= (\bar{F}(\mu; \bar{\mu}, \underline{\mu}), \bar{F}(\lambda; \bar{\lambda}, \underline{\lambda}), \bar{F}(\eta; \bar{\eta}, \underline{\eta})), \\ \bar{F}(x; b, a) &= \log(x - a) - \log(b - x) \end{aligned} \quad (a < x < b)$$

により無制約化した。

数値計算のために、 $L^\infty(\Omega)$  の有限次元部分空間  $X$  を適当に定める。また、初期係数推定を  $G_0$  とし、係数推定の動く範囲  $Y$  を  $Y = F^{-1}(X + F(G_0))$  とおく。  $Y$  を変数変換し、初期推定 (の  $F$  による像) の分だけずらした空間で共役勾配法を適用するため、  $Y$  はこのように書かれる。

本節では、次の手順により最小化問題

$$(2.2) \quad \underset{G \in Y}{\text{minimize}} J(G) = \frac{\|u_G - u_0\|^2}{2\|u_0\|^2},$$

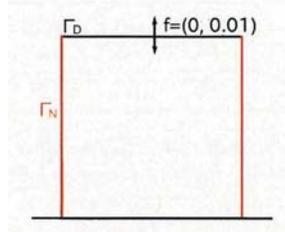
を解く (手法 A と呼ぶ)。

- ① 観測値  $u_0$  を与える。  $G = G_0$  とおく。
- ② 係数推定  $G$  のもとで方程式 1.1 の数値計算を行い、粘弾性波  $u_G$  を計算する。
- ③  $J(G)$  を計算し、停止条件を満たしていれば終了する。
- ④ 共役勾配法により  $G$  を更新し、②へ戻る。

ここで手法 A②について、生体を想定した係数設定においては、通常の有限要素法による方程式 (1.1) の数値計算は困難になるが、このような係数設定の場合は非適合有限要素法による数値計算が有効である [4]。特に本稿では Crouzeix-Raviart 要素 [1] を用いた。

以上の準備のもとで数値計算を行う。以下では、 $\Omega = (0, 192)^2$  とする。境界条件は図 1 に示す通り、底面で  $f = (0, 0)$ 、上面で  $f = (0, 0.01)$  とし、側面は traction free とする。また、 $\omega = 2\pi \times 62.5$ 、 $\rho = 10^{-3}$  を既知とし、 $\mu, \lambda, \eta$  を未知とする。手法 A②のための  $\Omega$  の三角形分割  $\mathcal{T}$  として、 $\Omega$  を格子状に 64 分割し、さらに  $(192, 0)$ 、 $(0, 192)$  を通る直線と平行な方向に切れ目を入れることで得られるものを用いた。また  $X$  として、 $\mathcal{T}$  上の局所定数関数 ( $\mathcal{T}$  の各三角形の内部で定数であるような関数) 全体をとった。

$u_0$  については、次のように構成した。まず、正解とする  $\mu, \lambda, \eta$  を与え、十分細かい三角形分割 (頂点数 331,770) を用いて方程式 (1.1) の数値計算を行い  $u$  を計算する。次に、 $\Omega$  を格子状に 64 分割し (ここでは斜めに切れ目を入れない)、各小正方形上で  $u$  の平均を求め、それを各小正方形上での値としたものを  $u_0$  とする。

図 1. 領域  $\Omega$  と境界条件

以上の設定のもとで、最も単純な問題として  $\Omega$  上一様に  $\mu = 2000, \lambda = 4999 \times 2000, \eta = 2000/4\omega$  の場合について数値計算を行った。初期推定は  $\Omega$  上一様に  $\mu = 1500, \lambda = 4999 \times 1500, \eta = 1500/4\omega$  とした。また、 $\bar{\mu} = 500, \bar{\lambda} = 4999 \times 500, \bar{\eta} = 500/4\omega, \underline{\mu} = 50000, \underline{\lambda} = 4999 \times 50000, \underline{\eta} = 50000/4\omega$  とした。図 2, 3, 4 はそれぞれ  $\mu$  の初期推定, 数値計算結果, 正解の値を示したものである。図に示し

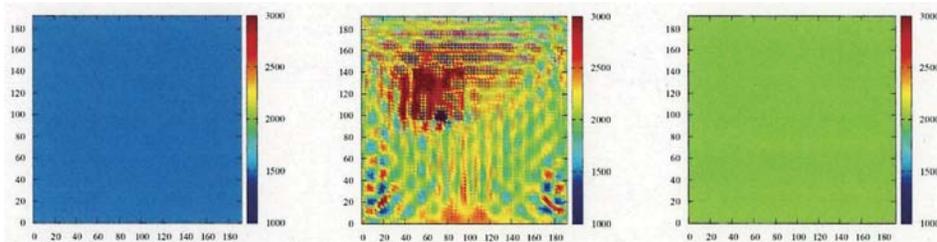
図 2. 初期推定 ( $\mu = 1500$ )

図 3. 数値計算結果

図 4. 正解 ( $\mu = 2000$ )

た通り、この数値計算結果には、初期推定にも正解にもない値の振動や、著しく値の大きな領域が現れている。医療技術への応用を見据えた本研究において、このような数値計算結果は病変として捉えられかねず、誤診断に繋がるため満足な結果であるとは言えない。変数変換 (2.1) の取り方には自由度があるが、他の変数変換を複数試みたものの類似の結果が得られたため、このような単純な適用では満足な結果が得られないと考えられる。

満足な結果が得られない原因の一つとして、 $\dim X$  の大きさが考えられる。上述の設定においては  $\dim X = 24576$  であるが、例えば  $\Omega$  上の定数関数全体を  $X$  とおいた場合 (この時  $\dim X = 3$ ) には、上図のような不都合は生じない。 $\Omega$  を格子状に 2 分割し、その上の局所定数関数全体を  $X$  として数値計算を行った場合 ( $\dim X = 12$ ) についても、不都合は生じない。これらの例のように、 $\dim X$  が十分小さい場合には満足な結果が得られるが、当然ながら一般には各係数が領域上定数などのような単純なものであるとは限らない。変数係数の場合に対しても信頼性のある係数同定を実現するために、次節で述べるマルチスケールな係数同定手法を考案した。

### 3. マルチスケールな係数同定手法

前節での考察から、 $X$  として最初に定数関数全体などの次元の低いものをもって係数同定を行い、その結果を利用して徐々に次元の高いものに取り替えていけば変数係数に対しても信頼性のある係数同定が実現できるのではないかと、という発想に著者は至った。本節では、この発想に基づく係数同定手法を提案する。

上述の空間の取り替えのために、 $L^\infty(\Omega)$  の有限次元部分空間の有限列  $X_i (i = 1, \dots, N), \dim X_i < \dim X_{i+1}$  をとる。本稿で提案するマルチスケールな係数同定手法とは、次の手順により最小化問題 (1.2) を解く手法である。

- ① 観測値  $u_0$  及び初期係数推定  $G_0$  を与える。  $i = 1$  とおく。

②'  $Y_i = F^{-1}(X_i + F(G_{i-1}))$  とおき, 最小化問題

$$(3.1) \quad \underset{G_i \in Y_i}{\text{minimize}} J(G_i) = \frac{\|u_{G_i} - u_0\|^2}{2\|u_0\|^2},$$

を手法 A により解く.

③'  $J(G_i)$  を計算し, 停止条件を満たしていれば終了する.

④'  $i$  の値を 1 つ増やし, ②' へ行く.

$\dim X_i$  が十分小さければ,  $i = 1$  のときに  $Y_1$  での高精度な係数同定  $G_1$  が得られる. また, 列  $X_i$  を適当に定めることで, 各  $G_i$  が次の空間での係数同定  $G_{i+1}$  に対する良い初期推定を与えていることが期待される. 空間列の生成方法として, 本稿では特に  $\Omega$  を格子状に  $2^{i-1}$  分割し, その上の局所定数関数全体を  $X_i$  とすることを提案する. この場合の概略図を図 5 に示す.

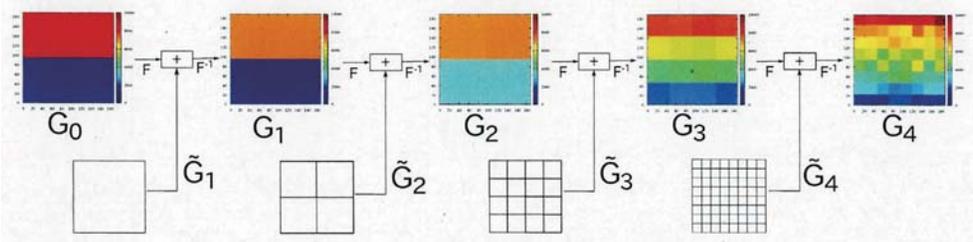


図 5. マルチスケールな係数同定手法の概略図

#### 4. 数値計算例

本節では, 2 節と同じ設定のもとで, いくつかの  $\mu, \lambda, \eta$  の例に対してマルチスケールな係数同定手法を適用した場合の数値計算結果を示す. また, 併せて先行研究 [2] の手法による数値計算結果も示す.

以下の数値計算結果では, 正解とする  $\lambda$  及び  $\eta$  は全て  $\mu$  の定数倍とした. 具体的には,  $\lambda = 4999\mu$ ,  $\eta = \mu/4\omega$  とした. また, 停止条件は全て  $\frac{J(G_{i+1}) - J(G_i)}{J(G_i)} < 10^{-3}$  とした. さらに, 提案手法②' で手法 A を用いるが, この手法 A②' の全体での実行回数を数値計算結果の Step 数と呼ぶことにする.

はじめに, 横軸を  $x$ , 縦軸を  $y$  として,  $\mu(x, y) = 6000y/192 + 2000$  の場合 (Case. 1) の数値計算結果を示す.  $\lambda$  及び  $\eta$  の初期推定は, それぞれ  $\mu$  の初期推定の 4999 倍,  $1/4\omega$  倍とした.

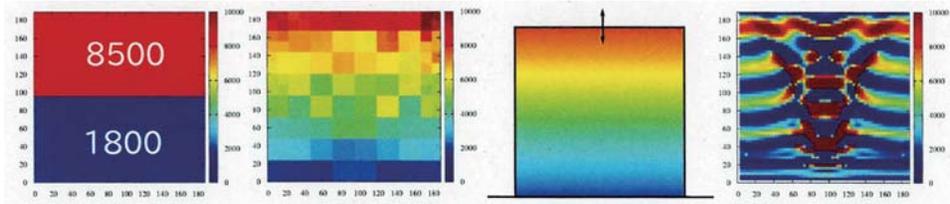


図 6. 初期推定

図 7. 結果 (112 Steps)

図 8. 正解

図 9. 先行結果

図 6, 7, 8, 9 はそれぞれ  $\mu$  の初期推定, 提案手法による数値計算結果, 正解, 先行研究の手法による結果を示したものである. これ以降の数値計算も同様の順で  $\mu$  の分布を示す. 図に示した通り, 手法 A の数値計算結果で生じていた値の振動は, 提案手法の数値計算結果では生じていない. 加えて, 先行研究による数値計算結果と比較しても, 極めて良好な結果を得た. このように, 従来困難であった係数同定が, 提案手法により可能となった.

次に、 $y < 96$  で一様に  $\mu = 2000$ 、 $y \geq 96$  で一様に  $\mu = 8000$  の場合 (Case. 2) の数値計算結果を示す。この計算例では、 $\lambda$  の初期推定は  $\mu$  の 4999 倍であり、 $\eta$  の初期推定は  $y < 96$  で一様に  $\eta = 1$  (正解は  $\eta = 2000/4\omega = 1.274\dots$ )、 $y \geq 96$  で一様に  $\eta = 5$  (正解は  $\eta = 8000/4\omega = 5.095\dots$ ) とした。

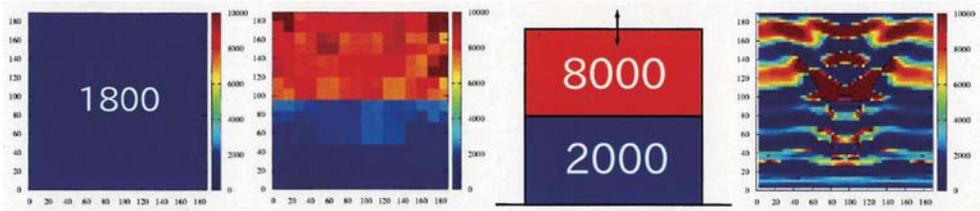


図 10. 初期推定

図 11. 結果 (135 Steps)

図 12. 正解

図 13. 先行結果

図 10, 11, 12, 13 に示した通り、この場合も Case. 1 と同様に従来困難であった高精度な係数同定を実現した。

その次に、 $x \geq 96$  で一様に  $\mu = 2000$ 、 $x < 96$  で一様に  $\mu = 8000$  の場合 (Case. 3) の数値計算結果を示す。 $\eta$  の初期推定は Case. 2 と同様に  $x \geq 96$  で一様に  $\eta = 1$ 、 $x < 96$  で一様に  $\eta = 5$  とした。

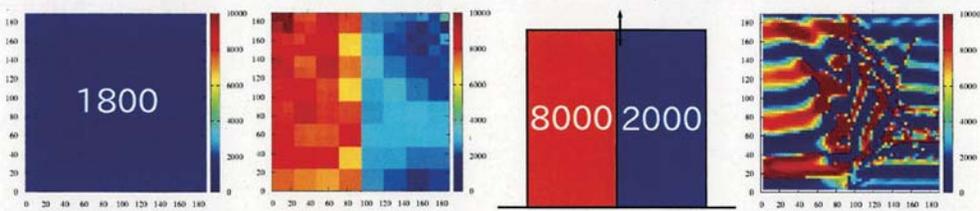


図 14. 初期推定

図 15. 結果 (126 Steps)

図 16. 正解

図 17. 先行結果

この場合についても良好な結果を得た。

最後に、係数同定の失敗例として、 $y \geq 96$  で一様に  $\mu = 2000$ 、 $y < 96$  で一様に  $\mu = 8000$  の場合 (Case. 4) の数値計算結果を示す。 $\eta$  の初期推定は Case. 2 や Case. 3 と同様である。

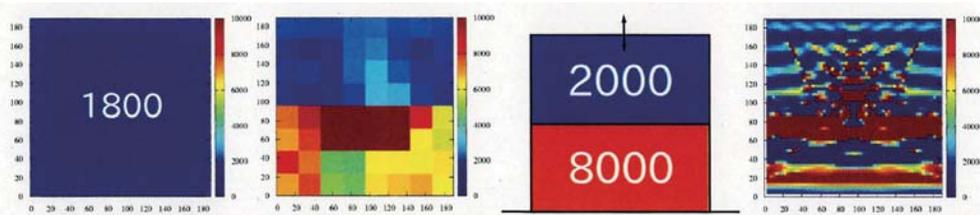


図 18. 初期推定

図 19. 結果 (119 Steps)

図 20. 正解

図 21. 先行結果

図 21, 21, 21, 21 がこの場合の数値計算結果である。Case. 1, 2, 3 と異なり、領域下部において正解の値 8000 に対しておよそ 5000 から 10000 と、同定精度が落ちている。この結果は、例えば停止条件を  $\frac{J(G_{i+1}) - J(G_i)}{J(G_i)} < 10^{-5}$  としても変わらなかった。

この原因について、この問題設定の物理的背景が関係しているのではないかと著者は考えている。というのも、この設定の場合、加振面で励起された波は、柔らかい領域から硬い領域へと伝わる。柔らかい領域では波がゆっくり伝わり、また硬い領域では波が速く伝わるため、この境界面  $y = 96$  で全反射が生じる。これにより高精度な係数同定に十分な波が領域下部へと伝わらず、結果として同定精度が落ちたと考えられる。この問題設定の場合であっても高精度な係数同定を可能にする手法・提案について、現在研究を進めている。

謝辞 本稿の数値計算例について、千葉大学の菅幹生准教授から具体的な値も含めた問題設定を提案

して頂きました。ここに感謝の意を表します。

#### 参考文献

- [1] M. Crouzeix and P. -A. Raviart, Conforming and Nonconforming Finite Element Methods for Solving the Stationary Stokes Equations I, *Revue Française d'Automatique, Informatique, Recherche Opérationnelle. Mathématique*, **7**(1973), pp. 33–75.
- [2] 藤原宏志, 積分型公式による MRE での剛性率の再構成, *理論応用力学講演会 論文講演集*, **57**(2008), OS25-04.
- [3] R. Muthupillai, et al., Magnetic Resonance Elastography by Direct Visualization of Propagating Acoustic Strain Waves, *Science*, **269** (1995), 1854–1857.
- [4] 前川秀, MR エラストグラフィの実現へ向けた非適合有限要素法による数値解析, *理論応用力学講演会 講演論文集*, **64** (2017), OS11-02-04.
- [5] 中村玄, MRE データの逆解析手法, *理論応用力学講演会 講演論文集*, **61** (2012), OS02-01.