数理解析研究所講究録 第2095巻 2018年 15-22

一般のパラメータに対するモレー空間の複素補間について

澤野嘉宏（首都大学東京）

Abstract

本研究は関数空間の補間についてである．特にモレー空間を調べる．第二補間空間の見える化をすることが目的である．この研究は Denny Ivanal Hakim 氏，Micstyslaw Mastylo 氏，中村昌平氏，曽布川拓也氏との共同研究である．とくに，現時点では投稿中の Micstyslaw Mastylo 氏との研究成果について説明する．

1 モレー空間，複素補間

本稿ではモレー空間の複素補間について考える．

$1 \le q \le p < \infty$ とする．モレーノルム $\|\star\|_{\mathcal{M}^p_q}$ を可測関数 f に対して

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \equiv \sup\left\{|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^q(Q)} : \ Q \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ における立方体}\right\}$$

で定義する．モレー空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ は可測関数 f で $\|f\|_{\mathcal{M}^p_q}$ が有限となるものを集めたものである．

これと対になるのは局所モレーノルムである．局所モレーノルム $\|\star\|_{L\mathcal{M}^p_q}$ を可測関数 f に対して

$$\begin{aligned}&\|f\|_{L\mathcal{M}^p_q}\\ &\equiv \sup\left\{|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^q(Q)} : \ Q \text{ は原点を中心とした } \mathbb{R}^n \text{ における立方体}\right\}\end{aligned}$$

で定義する．局所モレー空間 $L\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ は可測関数 f で $\|f\|_{L\mathcal{M}^p_q}$ が有限となるものを集めたものである．

本項では，二つのモレー空間が与えられたときに特に第二補間について考える．すなわち，$\mathcal{M}^{p_0}_{q_0}(\mathbb{R}^n)$ と $\mathcal{M}^{p_1}_{q_1}(\mathbb{R}^n)$ が与えられたときに，

$$[\mathcal{M}^{p_0}_{q_0}(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}^{p_1}_{q_1}(\mathbb{R}^n)]_\theta$$

と

$$[\mathcal{M}^{p_0}_{q_0}(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}^{p_1}_{q_1}(\mathbb{R}^n)]^\theta$$

を表示することを目的とする．

Definition 1 (カルデロンの 第一複素補間空間). $\overline{X} = (X_0, X_1)$ を of バナッハ空間の両立組とする．

1. $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ を次の条件を満たす $F : \bar{S} \to X_0 + X_1$ 全体のなす集合とする．
   (a) F は $\bar{S}$ 上で有界である．つまり，$\sup_{z \in \bar{S}} \|F(z)\|_{X_0+X_1} < \infty$ である．
   (b) F は S は正則である．，
   (c) $j = 0, 1$ に対して，関数 $t \in \mathbb{R} \mapsto F(j + it) \in X_j$ は $\mathbb{R}$ 上有界かつ連続である．

   空間 $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ はノルム

   $$\|F\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)} \equiv \max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(it)\|_{X_0},\ \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(1+it)\|_{X_1}\right\}.$$

   を備えている．

2. $\theta \in (0, 1)$ とする．(X_0, X_1) に関する複素補間空間 $[X_0, X_1]_\theta$ を $F \in \mathcal{F}(X_0, X_1)$ を用いて $x = F(\theta)$ と表せる $x \in X_0 + X_1$ 全体のなす集合とする．$[X_0, X_1]_\theta$ のノルムは

   $$\|x\|_{[X_0,X_1]_\theta} \equiv \inf\{\|F\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)} : F \in \mathcal{F}(X_0, X_1) \text{ を用いて } x = F(\theta) \text{ とあらわせる.}\}$$

   で与える．空間 $[X_0, X_1]_\theta$ はカルデロンの第一複素補間空間といい，操作 $(X_0, X_1) \mapsto [X_0, X_1]_\theta$ をカルデロンの第一複素補間空間関手という．

Definition 2 (カルデロンの 第二複素補間空間). $\overline{X} = (X_0, X_1)$ をバナッハ空間の両立組とする．

1. $\mathcal{G}(X_0, X_1)$ を以下の条件を満たす $G : \overline{S} \to X_0 + X_1$ の全体として定義する．
   (a) G は $\overline{S}$ 上連続であり，$\sup_{z\in\overline{S}} \left\|\frac{G(z)}{1+|z|}\right\|_{X_0+X_1} < \infty$ を満たす．
   (b) G は S 上正則である．，
   (c) $j = 0, 1$ に対して $t \in \mathbb{R} \mapsto G(j + it) - G(j) \in X_j$ が $\mathbb{R}$ 上でリプシッツ連続である．

   空間 $\mathcal{G}(X_0, X_1)$ にはノルム

   $$\|G\|_{\mathcal{G}(X_0,X_1)} \equiv \max\left\{\|G(i\star)\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R},X_0)},\ \|G(1+i\star)\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R},X_1)}\right\} \qquad (1)$$

   が備わっている．

2. $\theta \in (0,1)$ とする．(X_0, X_1) に関する複素補間空間 $[X_0, X_1]^\theta$ を $G \in \mathcal{G}(X_0, X_1)$ を用いて $x = G'(\theta)$ と表せる $x \in X_0 + X_1$ 全体のなす集合とする．$[X_0, X_1]^\theta$ のノルムは

$$\|x\|_{[X_0,X_1]^\theta} \equiv \inf\{\|G\|_{\mathcal{G}(X_0,X_1)} : G \in \mathcal{G}(X_0, X_1) \text{ を用いて } x = G'(\theta) \text{ とあらわせる.}\}.$$

で与える．空間 $[X_0, X_1]^\theta$ をカルデロン第二複素補間空間といい，操作 $(X_0, X_1) \mapsto [X_0, X_1]^\theta$ をカルデロンの第二複素補間関手という．

モレー空間の複素補間の歴史は１９６５年の [15] にさかのぼる．この論文で，作用素の有界性に関する肯定的な結果を得ることができた．[3] でこの考え方は補強された．この部分的な結果の逆を得たいが，これは不可能なことが [1] で示された．特殊なパラメータに関する複素補間の結果は [10] で得られている．

2　モレー空間の複素補間の記述

それでは本題に入ろう．カルデロン積により，

$$\begin{aligned}&[\mathcal{M}^{p_0}_{q_0}(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}^{p_1}_{q_1}(\mathbb{R}^n)]^\theta \\ &= \{f \in L^0(\mathbb{R}^n) : f = g|f_0|^{1-\theta}|f_1|^\theta, g \in L^\infty(\mathbb{R}^n) f_0 \in \mathcal{M}^{p_0}_{q_0}(\mathbb{R}^n), f_1 \in \mathcal{M}^{p_1}_{q_1}(\mathbb{R}^n)\}\end{aligned}$$

となる．ノルムは

$$\|f\|_{[\mathcal{M}^{p_0}_{q_0}(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}^{p_1}_{q_1}(\mathbb{R}^n)]^\theta} = \inf \|g\|_{L^\infty}$$

で与えられる．ただし，f_0, f_1, g の条件は上記の分解に加えて，$\|f_0\|_{\mathcal{M}^{p_0}_{q_0}} \le 1$, $\|f_1\|_{\mathcal{M}^{p_1}_{q_1}} \le 1$ が付け加わる．この右辺を具体的に計算する．

Theorem 3. $f \in [\mathcal{M}^{p_0}_{q_0}(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}^{p_1}_{q_1}(\mathbb{R}^n)]^\theta$ のノルムが 1 以下であるための必要十分条件は各立方体 Q に対して，関数 $f^{(0)}_Q, f^{(1)}_Q$ が存在して，

$$|f|\chi_{Q_1 \cap Q_2} \le (f^{(0)}_{Q_1})^{1-\theta}(f^{(1)}_{Q_2})^\theta, \quad \|f^{(0)}_Q\|_{L^{q_0}(Q)} \le |Q|^{\frac{1}{q_0}-\frac{1}{p_0}}, \quad \|f^{(1)}_Q\|_{L^{q_1}(Q)} \le |Q|^{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}}.$$

が成り立つことである．

Proof. f が与えられると，条件が満たされることはカルデロン積の公式から明らかである．仮にこのような関数の集まり関数 $f^{(0)}_Q, f^{(1)}_Q$ が存在すれば，

$$f_0(x) = \inf_{x \in Q \in \mathcal{D}} |f^{(0)}_Q|, \quad f_1(x) = \inf_{x \in Q \in \mathcal{D}} |f^{(1)}_Q|$$

とおくと，f_0, f_1 はそれぞれモレー空間 $\mathcal{M}^{p_0}_{q_0}$, $\mathcal{M}^{p_1}_{q_1}$ に属することがわかる．ここで，$\mathcal{D}$ は 2 進立方体で，

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \simeq \sup\left\{|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^q(Q)} : Q \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ における 2 進立方体}\right\}$$

であることを用いた．さらに，

$$|f(x)| \le f_0(x)^{1-\theta} f_1(x)^\theta$$

であることもわかる． $\square$

3 一般化

この証明を見ると，一般化ができることがわかる．例えば，$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする．Λ を可算添え字集合として，$\mathfrak{B} = \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を λ によってパラメータ付けされた集合 E_λ 上の関数空間を考える．

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$$

上の関数空間 $\mathfrak{B}^* \subset L^0(X)$ を

$$\|f\|_{\mathfrak{B}^*} = \sup_{\lambda \in \Lambda} \|f|E_\lambda\|_{B_\lambda}$$

で定める．このようにして作られたバナッハ空間について次のことが言える．

Theorem 4. Λ を可算添え字集合として，$\mathfrak{B}_0 = \{B_{\lambda_0}\}_{\lambda \in \Lambda}$ と $\mathfrak{B}_1 = \{B_{\lambda_1}\}_{\lambda \in \Lambda}$ を λ によってパラメータ付けされた集合 E_λ 上の関数空間として，

$$[\mathfrak{B}_0^*, \mathfrak{B}_1^*]^\theta = (\mathfrak{B}_0^*)^{1-\theta} (\mathfrak{B}_1^*)^\theta$$

は次のようにして特徴づけられる．

$$[\mathfrak{B}_0^*, \mathfrak{B}_1^*]^\theta = \bigcup_{f_0 \in \mathfrak{B}_0^*, f_1 \in \mathfrak{B}_1^*} \{f \in L^0(X) : |f| \le |f_0|^{1-\theta} |f_1|^\theta\}$$

たとえば，[7, 5] の結果はこの枠組みに収まる．また，Hakim の研究した L^∞ とモレー空間の補間もこの枠組みに収まる．また，[12] のような測度つきのモレー空間も扱える．

モレー空間の複素補間はルマリエリウセにより，モレー空間では閉じていないことが示されている．[9] しかしながら，この定理を用いると局所モレー空間に対しては，複素補間が閉じていることが示される．実際に，次の定理が成り立つからである．

Theorem 5. $1 \le q < p < \infty$ とする．可測関数 f に対して

$$\|f\|_{L\mathcal{M}_q^p} \equiv \sup\left\{ |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(2Q \setminus Q)} : Q \text{ は原点を中心とした } \mathbb{R}^n \text{ における 2 進立方体} \right\}$$

原点を中心とした $\mathbb{R}^n$ における2進立方体とは便宜上

$$[-2^m, 2^m]^n$$

の形の立方体である．どうしてこれでパラメータの仮定が不要かというと，原点を中心とした $\mathbb{R}^n$ における2進立方体が空間を分割しているからである．

[6] ではパラメータに余計な仮定を付けたが，これは不要であった．実際に，

$$\frac{p_0}{q_0} \neq \frac{p_1}{q_1}$$

でないと，複素補間は閉じていないが，このことは [13] で考案された「フラクタル」集合を用いて確認できる．ルマリエリウセは実際にフラクタルと別の議論を組み合わせた．その議論を再現する．$R > 2$ は $R^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}}2^{\frac{n}{q}} = 1$ を満たすとする．

$$E \equiv \{y + (R-1)(a_1 + Ra_2 + \cdots) : \{a_j\}_{j=1}^{\infty} \in (\{0,1\}^n)^{\mathbb{N}} \cap (\ell^1)^n, y \in [0,1]^n\}$$

とおく．$E_j \equiv E \cap [0,R]^n$ は 2^{jn} 個の体積1の立方体からなる．[13] と類似の論法によると，E の特性関数 χ が $\mathcal{M}^p_r$ に属するための必要十分条件は $r \leq q$ である．以後，簡単のために $p = 4$, $q = 2$ とする．いかなる $0 < \theta < 1$ に対しても χ が $\mathcal{M}^4_1$ と $\mathcal{M}^4_3$ の複素補間 $[\mathcal{M}^4_1, \mathcal{M}^4_3]^\theta$ に属さないことを示そう．仮にこの空間に属したとすると、$f \in \mathcal{M}^4_1$, $g \in \mathcal{M}^4_3$ が存在して，$\chi_E \leq |f|^{1-\theta}|g|^\theta$ が成り立つ．f, g を定数倍して，f の $\mathcal{M}^4_3$ ノルムは1であるとしてよい．E の各連結成分上で平均を取ることにより，f, g は E の各連結成分上で定数であるとしてよい．ここまで帰着させると，

$$\|f\|_{\mathcal{M}^4_1} \geq \sup|f| \sim (\sup|f|)\|\chi\|_{\mathcal{M}^4_1}$$

が得られる．よって，f を $\chi \sup|f|$ や χ で置き換えることができる．したがって，

$$\chi \leq \chi \cdot |g|^{1-\theta}$$

が得られた．これより，$\chi \leq |g|$ なので，これは [13] に書いてあることに矛盾する．

4 閉部分空間とシェスタコフの補題

U を $L^0(\mathbb{R}^n)$ の線形部分空間で，束の性質を持っているとする．つまり，$f \in U$ かつ $|g| \leq |f|$ を満たす $f, g \in L^0(\mathbb{R}^n)$ につき，$g \in U$ が成り立つとする．$U\mathcal{M}^p_q$ を $U \cap \mathcal{M}^p_q$ の $\mathcal{M}^p_q$ 内での閉包としたとき，一般の p_0, q_0, p_1, q_1 に対して，$[U\mathcal{M}^{p_0}_{q_0}, U\mathcal{M}^{p_1}_{q_1}]_\theta$, $[U\mathcal{M}^{p_0}_{q_0}, U\mathcal{M}^{p_1}_{q_1}]^\theta$ を特徴付けるのは現在進行中の研究である．$U = L^\infty$ の場合の $U\mathcal{M}^p_q$ [2] において定義されたことに注意する．

$$\overline{\mathcal{M}}^p_q = L^\infty \mathcal{M}^p_q$$

と定める．$\dfrac{p_0}{q_0} = \dfrac{p_1}{q_1}$ の場合は [7] を参考のこと．この形の補間空間の研究の先駆的なものは [16] である．ここでは，ロシア語で書かれたシェスタコフの命題を日本語で証明とともに記録しておく．[14]

Theorem 6. X_0, X_1 を測度空間 $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ 上のバナッハ関数空間として，それぞれの閉部分空間 U_0, U_1 で束になっているものを考える．$\varphi : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ が次の条件を満たしているとする．

1. $\varphi(0,0) = 0$
2. φ は各変数について凹である．
3. $\varphi(ax, ay) = a\varphi(x,y)$ がすべての $a, x, y \geq 0$ について成り立つ．
4. ある定数 $\alpha > 1$ が存在して，任意の $x, y \geq 0$ に対して，

$$\varphi(x,y) \leq \varphi(2x, \alpha^{-1}y), \varphi(x,y) \leq \varphi(\alpha^{-1}x, 2y)$$

   が成り立つ．

また，関数 $f \in L^0(\Omega)$, $g_0 \in U_0$, $g_1 \in U_1$ が $|f| \leq \varphi(g_0, g_1)$ を満たしているとする．このとき，

$\inf\{\lambda > 0 : |f| \leq \lambda\varphi(|h_0|, |h_1|)$ となるノルム 1 の $h_0 \in U_0$, $h_1 \in U_1$ が存在する．
$= \inf\{\lambda > 0 : |f| \leq \lambda\varphi(|f_0|, |f_1|)$ となるノルム 1 の $f_0 \in X_0$, $f_1 \in X_1$ が存在する．

が成り立つ．

このような関数 φ については [11, p. 136] も参考のこと．

Proof. 集合の大小関係から

$\inf\{\lambda > 0 : |f| \leq \lambda\varphi(|h_0|, |h_1|)$ となるノルム 1 の $h_0 \in U_0$, $h_1 \in U_1$ が存在する．
$\geq \inf\{\lambda > 0 : |f| \leq \lambda\varphi(|f_0|, |f_1|)$ となるノルム 1 の $f_0 \in X_0$, $f_1 \in X_1$ が存在する．

は明らかである．したがって，逆向きの不等号を示したい．右辺を Λ_0 として，$\Lambda > \Lambda_0$ を任意にとる．すると，少なくとも

$$|f| \leq \Lambda\varphi(|f_0|, |f_1|)$$

となるノルム 1 の $f_0 \in X_0$, $f_1 \in X_1$ が存在する．一方で，

$$|f| \leq \varphi(|g_0|, |g_1|) \leq \min(\varphi(\alpha^{-m}|g_0|, 2^m|g_1|)$$

が成り立つ．このふたつのことと，

$$\varphi(\alpha^{-m}|\dot{g}_0| + \Lambda|f_0|, \min(2^m|g_1|, \Lambda|f_1|))$$
$$\in \{\varphi(\alpha^{-m}|g_0| + \Lambda|f_0|, 2^m|g_1|), \varphi(\alpha^{-m}|g_0| + \Lambda|f_0|, \Lambda|f_1|)\}$$

であることから，

$$|f| \le \varphi(\alpha^{-m}|g_0| + \Lambda|f_0|, \min(2^m|g_1|, \Lambda|f_1|))$$

が得られる．$m \in \mathbb{N}$ は任意であるから，

$$\begin{aligned}&\inf\{\lambda > 0 : |f| \le \lambda\varphi(|h_0|, |h_1|) \text{ となるノルム } 1 \text{ の } h_0 \in U_0,\ f_1 \in X_1 \text{ が存在する．}\\ &\quad \le \inf\{\lambda > 0 : |f| \le \lambda\varphi(|f_0|, |f_1|) \text{ となるノルム } 1 \text{ の } f_0 \in X_0,\ f_1 \in X_1 \text{ が存在する．}\end{aligned}$$

が分かった．この不等号の逆向きは先ほどと同じように集合の大小関係から明らかであるから，

$$\begin{aligned}&\inf\{\lambda > 0 : |f| \le \lambda\varphi(|h_0|, |f_1|) \text{ となるノルム } 1 \text{ の } h_0 \in U_0,\ f_1 \in X_1 \text{ が存在する．}\\ &\quad = \inf\{\lambda > 0 : |f| \le \lambda\varphi(|f_0|, |f_1|) \text{ となるノルム } 1 \text{ の } f_0 \in X_0,\ f_1 \in X_1 \text{ が存在する．}\end{aligned}$$

が得られる．このようにして，右辺にある X_0 を U_0 に置き換えてもよいことが分かった．同様にして，X_1 を U_1 に置き換えることができる． □

特に，重要なケースは複素補間に相当する

$$\varphi(s, t) = s^{1-\theta}t^\theta$$

の場合である．

5 Acknowledgement

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

References

[1] O. Blasco, A. Ruiz and L. Vega, (1999), Non-interpolation in Morrey-Campanato and block spaces, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **28**, 31–40.

[2] L. Caso, R. D'Ambrosio, and S. Monsurrò, Some remarks on spaces of Morrey type, Abstr. Appl. Anal., Art. ID 242079, 22 pp (2010).

[3] F. Cobos, J. Peetre and L. E. Persson,, On the connection between real and complex interpolation of quasi-Banach spaces, Bull. Sci. Math. **122** (1998), 17–37.

[4] S. V. Guliyev, G. S. Hasanov and Y. Sawano, Decompositions of local Morrey-type spaces, Positivity **21** (2017), no. 3, 1223–1252.

[5] D. I. Hakim, M. Izuki and Y. Sawano, Complex interpolation of grand Lebesgue spaces, Monatshefte für Mathematik, Monatsh Math **184** (2017), 245–272.

[6] D. I. Hakim, S. Nakamura, Y. Sawano and T. Sobukawa, Complex interpolation of B^u_w-spaces, Complex Variables and Elliptic Equations, online.

[7] D.I. Hakim and Y. Sawano, Calderón's First and Second Complex Interpolations of Closed Subspaces of Morrey Spaces, J. Fourier Analysis and Applications, **23** (2017), no. 5, 1195–1226.

[8] D. I. Hakim, T. Nogayama and Y. Sawano, Complex interpolation of smoothness Triebel-Lizorkin-Morrey spaces, to appear in Math. J. Okayama Univ.

[9] P.G. Lemarié-Rieusset, Multipliers and Morrey spaces, Potential Anal. **38**, no. 3, 741–752, (2013).

[10] Y. Lu, D. Yang, and W. Yuan, Interpolation of Morrey Spaces on Metric Measure Spaces, Canad. Math. Bull. **57** (2014), 598–608.

[11] P. Nielsen, Interpolation of Banach lattices, Studia Math. **32** (1985), 135–154.

[12] Y. Sawano and H. Tanaka, Morrey spaces for non-doubling measures, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **21** (2005), no. 6, 1535–1544.

[13] Y. Sawano, S. Sugano and H. Tanaka, Generalized fractional integral operators and fractional maximal operators in the framework of Morrey spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), no. 12, 6481–6503.

[14] V. A. Shestakov, *On complex interpolation of Banach spaces of measurable functions*, Vestnik Leningrad. Univ. **19** (1974), 569–577.

[15] G. Stampacchia, The spaces $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}, N^{(p,\lambda)}$ and interpolation. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (1965) **19**, 443–462.

[16] D. Yang, W. Yuan, and C. Zhuo, Complex interpolation on Besov-Type and Triebel-Lizorkin-Type Spaces, Anal. and Appl., (2013), 45pp.

[17] W. Yuan, W. Sickel and D. Yang, Interpolation of Morrey-Campanato and Related Smoothness Spaces, Sci. China Math. **58**, no. 9, 1835–1908, (2015).