数理解析研究所講究録 第2095巻 2018年 23-28

Extreme points of dual spaces and Banach-Stone type theorems

筑波大学数理物質系数学域　川村一宏
Kazuhiro Kawamura
Institute of Mathematics
University of Tsukuba
kawamura@math.tsukuba.ac.jp

1　序

本稿では Banach-Stone の定理のヴァリエーションとして, 底空間のトポロジーとの関係を考察した結果について報告する. X をコンパクト Hausdorff 空間, E を Banach 空間とする. X 上の E-値連続関数全体に supremum norm $\|\cdot\|_\infty$ を入れた空間を $C(X,E)$ で表す。特に $C(X,\mathbb{C})=C(X)$ とする。

定理 1.1 (Banach-Stone) X,Y をコンパクト Hausdorff 空間、$T:C(X)\to C(Y)$ を複素線形同型写像で $\|\cdot\|_\infty$ に関して等長的であるものとする。このとき連続写像 $\alpha:Y\to\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ と同相写像 $\varphi:Y\to X$ が以下を満たすように存在する：

$$Tf(y)=\alpha(y)f(\varphi(y)),\quad f\in C(X),\ y\in Y.$$

上のような形の作用素を荷重 α, シンボル φ の荷重合成作用素という。定理 1.1 の一つの証明は, 双対空間における単位球の端点集合を調べることでなされる ([5])。

定義 1.2 A を $C(X,E)$ の複素線形部分空間, $x\in X$ とする。A 上の E に値を取る関数 $\delta_x:A\to E$ を $\delta_x(f)=f(x)$ で定義する。

(1)　有界線形汎関数 $\xi:A\to\mathbb{C}$ で $\|\xi\|=1$ を満たすものが双対空間 A^* の単位球 $B(A^*)$ の端点 *(extreme point)* であるとは、

$$\xi=\frac{\alpha+\beta}{2},\alpha,\beta\in A^*,\|\alpha\|,\|\beta\|\leq 1\Rightarrow\xi=\alpha=\beta$$

が成立することである。

(2) *(cf.[2])* A の E に関する *Choquet* 境界を

$$\mathrm{Ch}_E(A)=\{x\in X\mid \xi\in\mathrm{ext}(E^*)\text{ が存在して}\xi\circ\delta_x\in\mathrm{ext}(A^*)\}$$

と定義する.

$\mathrm{Ch}_{\mathbb{C}}(A)$ は通常の A の Choquet 境界 $\mathrm{Ch}(A)$ と一致する. ここでは以下の設定を考える:

設定. X, Y はコンパクト Hausdorff 空間, E は Banach 空間, A, B はそれぞれ $C(X,E), C(Y,E)$ の線形部分空間で以下を満たすとする:

(S1) A, B は任意の定数値関数を含む.

(S2) 任意の $u \in E$ と任意の $x_1 \neq x_2 \in X$ に対し, $f(x_1) = u, f(x_2) = 0$ をみたす $f \in A$ が存在する. B についても同様.

上の条件 (S1),(S2) は部分空間 A, B が連続関数を豊富に含むことを表している。$\mathcal{B}(E)$ で E 上の有界線形作用素全体に strong operator topology を入れた空間を表し, $U(E)$ で E 上の線形等長変換全体のなす $\mathcal{B}(E)$ の部分空間を表す。

問題 1.3 上の設定の下, 線形全射等距離写像 $T: A \to B$ に対して, 連続関数 $V = (V_y) : \mathrm{Ch}_E(B) \to U(E)$ および同相写像 $\varphi : \mathrm{Ch}_E(B) \to \mathrm{Ch}_E(A)$ が, 以下を満たす様に存在するか？

$$Tf(y) = V_y(f(\varphi(y))) \quad y \in \mathrm{Ch}(B).$$

本稿では上の形の作用素を「一般荷重合成作用素」と呼ぶ。$E = \mathbb{C}$ のとき、上の問いが肯定的であるような T, A, B に関する十分条件がいくつか知られている ([1], [4], [6], [11], [13] 等). 例えば:

定理 1.4 ([11]) T, A, B が次のいずれかを満たせば上の問いは肯定的である。

(1) T が複素線形で, 任意の異なる $x_1, x_2 \in X$ に対して $f \in A$ が $|f(x_1)| \neq |f(x_2)|$ を満たすよう取れる. B についても同様.

(2) T が実線形で, 任意の $x \in X$ と x の任意の近傍 U, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $f \in A$ が $\|f\|_\infty = f(x) = 1$ かつ $\|f|X \setminus U\|_\infty < \epsilon$ を満たすよう取れる. B についても同様.

しかし上の問題は一般には否定的であることを示す例が、古清水・三浦・高木・高橋各氏によって与えられた [11]。

例 1.5 $\mathbb{T}$ 上の一次関数のなす関数空間 $A = \{az + b \mid a, b \in \mathbb{C}\}$ を考え、線形作用素 $S: A \to A$ を $S(az + b) = az + \bar{b}$ によって定義する。S は実線形等長変換であるが一般荷重合成作用素でない.

さらに三浦氏は, 一般荷重合成作用素でない実線形等長変換を許容する関数空間 A の Choquet 境界 $\mathrm{Ch}(A)$ は, $\mathbb{T}$ と同相な空間を含まなければならないことを示した ([12])。従って X が円周のコピーを含まない空間であるとき，$C(X)$ の部分空間 A が (S1)(S2) を満たせば、任意の実線形等距離変換 $S: A \to A$ は一般荷重合成作用素である。この結果は A, B の仮定は最少に留めておく代わりに, 底空間のトポロジーを規定することで Banach-Stone 型の定理を導くという意味で新しい。三浦氏と筆者は, [12] の議論をより詳しく行うことにより, いくつかの結果を得た ([10]). 本稿で述べる結果はこれらの結果の延長上にある。

2 Extreme point method と得られた結果

$C(X,E)$ の部分空間 A の双対空間 A^* の単位球上の端点集合を $\mathrm{ext}(A^*)$ で表す. Banach 空間 E に対する $\mathrm{ext}(E^*)$ も同様である.

Proposition 2.1 写像

$$\Phi_{X,E} : \mathrm{ext}(E^*) \times X \to A^*, \quad \Phi_{X,E}(\xi, x) = \xi \circ \delta_x, \quad \xi \in \mathrm{ext}(E^*),\ x \in X$$

は単射で, A^* の *weak* topology* に関して連続である.

ここで $\mathcal{E}_{X,E} = \mathrm{Im}(\Phi_{X,E})$ とおく. [3] から $\mathrm{ext}(A^*) \subset \mathcal{E}_{X,E}$ が成り立ち, 従って

$$\Phi_{X,E}^{-1}(\mathrm{ext}(A^*)) \subset \mathrm{ext}(E^*) \times \mathrm{Ch}_E(A)$$

が成り立つ. そこで以下の条件を考える:

(ext) $\Phi_{X,E}^{-1}(\mathrm{ext}(A^*)) = \mathrm{ext}(E^*) \times \mathrm{Ch}_E(A)$.

例 2.2 例えば以下のような場合に (ext) が満たされる.

(i) $E = \mathbb{C}$.

(ii) A が $C(X)$-加群.

(iii) (*(i)* の拡張) E が *Hilbert* 空間, 単位球面 $S(E)$ に推移的に作用する $\Gamma \subset U(E)$ が存在して A は Γ-不変部分空間, 即ち $\gamma \in \Gamma, f \in A \Rightarrow \gamma \cdot f \in A$ が成り立つ.

A, B が (S1),(S2),(ext) を満たすとする。全射線形等長写像 $T : A \to B$ の双対写像 $T^* : B^* \to A^*$ がまた等長写像であることを用いて以下の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc}
B^* & \xrightarrow{T^*} & A^* \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{ext}(B^*) & \xrightarrow{T^*} & \mathrm{ext}(A^*) \\
{\scriptstyle \Phi_Y}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Phi_X} \\
\mathrm{ext}(E^*) \times \mathrm{Ch}_E(B) & \xrightarrow{\tau_T} & \mathrm{ext}(E^*) \times \mathrm{Ch}_E(A)
\end{array}$$

同相写像 $\tau_T = \Phi_X^{-1} \circ T^* \circ \Phi_Y$ を以下の様に表示する：

$$\tau_T(\eta, y) = (\alpha(\eta, y), \varphi(\eta, y)), \quad \eta \in \mathrm{ext}(E^*),\ y \in \mathrm{Ch}_E B, \tag{1}$$

ここで $\alpha : \mathrm{ext}(E^*) \times \mathrm{Ch}_E(B) \to \mathrm{ext}(E^*)$, $\varphi : \mathrm{ext}(E^*) \times \mathrm{Ch}_E(B) \to \mathrm{Ch}_E(A)$ は連続全射.

定理 2.3 ([8]) *(1)* $y \in \mathrm{Ch}_E(B)$ に対して $V_y : E \to E$ を

$$V_y(u) = Tc_u(y),\ u \in E$$

とおくと, 写像 $\mathrm{Ch}_E(B) \to \mathcal{B}(E), y \mapsto V_y$ は連続で, かつ

$$V_y^*|\mathrm{ext}(E^*) = \alpha(\cdot, y).$$

(2) 任意の $y \in \mathrm{Ch}_E(B)$ に対して $\varphi(\cdot, y) : \mathrm{ext}(E^*) \to \mathrm{Ch}_E(A)$ が定値写像とする. $\varphi(y) := \varphi(\cdot, y)$ とおくと, φ は連続全射でかつ

$$Tf(y) = V_y(f(\varphi(y))),\quad f \in A,\ y \in \mathrm{Ch}_E(B).$$

(3) E が *reflexive* かつ E^* が *strictly convex* とする. *(2)* の仮定が成り立つとき, $V_y \in U(E)$ かつ $\varphi : \mathrm{Ch}_E(B) \to \mathrm{Ch}_E(A)$ は同相写像である.

従って E が reflexive, E^* が strongly convex, A, B が (S1), (S2), (ext) を満たすとするとき, $T : A \to B$ が一般荷重合成作用素であるためには、任意の $y \in \mathrm{Ch}_E(B)$ に対して

$$\text{(Stab)}\quad \varphi(\cdot, y) : \mathrm{ext}(E^*) \to \mathrm{Ch}_E(A) \text{ が定値写像}$$

が成立すればよい. 上の枠組みを用いて, 以下のような [7] の類似を得る.

定理 2.4 ([8]) E は *reflexive* かつ E^* が *strongly convex* とする. A, B は（*S1), (S2),*（*ext)* を満たし, さらに次が満たされるとする*:*

任意の $x \in \mathrm{Ch}_E(A)$, 任意の x の開近傍 U, 任意の $u \in E$ に対して $f \in A$ が以下を満たすように存在する：

$$\|f\|_\infty = \|u\|,\ f(x) = u,\ f|X \setminus U \equiv 0.$$

B についても同様.

このとき任意の全射線形 $\|\cdot\|_\infty$-等長写像 $T : A \to B$ にたいして条件 $(Stab)$ が成り立ち、したがって T は一般荷重合成作用素である.

注 上のタイプの定理を得るためには, 値域の Banach 空間 E に対して何らかの仮定を置かねばならない ([14]).

[8, 4 節] において, 底空間の位相次元に関わる Banach-Stone 型定理を考察した。そこでの議論をもう少し詳しく行って, 以下の定理を得ることができる。

定理 2.5 X, Y はコンパクト距離空間, E は可分 *Hilbert* 空間, $A \subset C(X, E), B \subset C(Y, E)$ は *(S1), (S2), (ext)* を満たす部分空間とし, 更に X の位相次元 $\dim X$ は有限と仮定する. 以下のいずれかの条件が成り立つとき, 任意の全射線形等長写像 $T : A \to B$ に対して *(Stab)* が成立し、従って T は一般荷重合成作用素である。

(1) $\dim_{\mathbb{R}} E = 1.$

(2) $\dim_{\mathbb{R}} E \geq 3$ かつ $\dim_{\mathbb{R}} E \geq 2\dim X + 1$.

(3) $\dim_{\mathbb{R}} E = \infty > \dim X$.

$T : A \to B$ に対して (1) により定まる写像 $\varphi : S(E^*) \times \mathrm{Ch}_E(B) = \mathrm{ext}(E^*) \times \mathrm{Ch}_E(B) \to \mathrm{Ch}_E(A)$ をとり, 任意に固定した $y \in \mathrm{Ch}_E(B)$ に対して

$$\phi_y : S(E^*) \to \mathrm{Ch}_E(B), \quad \phi_y(\eta) = \varphi(\eta, y) \quad \eta \in \mathrm{ext}(E^*)$$

とおく。条件 (Stab) は各 $y \in \mathrm{Ch}_E(A)$ に対して ϕ_y が定値写像であることに他ならない。上の定理の証明は, 定値写像でない ϕ_y の存在から導かれる条件を考察することでなされる。[8] 同様, 以下の Hurewicz の定理を用いる.

定理 2.6 *(Hurewicz の定理)*
$f : M \to N$ を可分距離空間 M, N の間の閉写像とするとき, M, N の位相次元に対して以下が成り立つ

$$\dim M \leq \dim N + \sup_{q \in N} \dim f^{-1}(q).$$

$\dim X = 2, \dim_{\mathbb{R}} E = 3$ のとき, 定理 2.5 の仮定は満たされないが, 写像 $\phi_y : S(E^*) = S^2 \to \mathrm{Ch}_E(A)$ を調べることによって, 以下の定理を得る.

定理 2.7 上と同じ記号の下, X は 2 次元球面・射影平面のいずれをも含まないとする。このとき $A \subset C(X, \mathbb{R}^3), B \subset C(Y, \mathbb{R}^3)$ の間の任意の等距離写像 $T : A \to B$ は *(Stab)* を満たし、従って一般荷重合成作用素である.

$C(X, \mathbb{R}^n), n \geq 4$, に対しても, コンパクト空間族 $\mathcal{C}_n$ を定めて, $A \subset C(X, \mathbb{R}^n), B \subset C(Y, \mathbb{R}^n)$ の間の線形等長写像 $T : A \to B$ に対し,

$$X, Y \text{ は } \mathcal{C}_n \text{ に属する空間のコピーを含まない} \Rightarrow T \text{ は一般荷重合成作用素}$$

が成り立つようにできる. 一方で

例 2.8 X を *2* 次元球面あるいは射影平面とする. $C(X, \mathbb{R}^3)$ の線形部分空間 A と A 上の等長写像 $S : A \to A$ で一般荷重合成作用素として表せないものが存在する。

例 1.5 の構成を四元数に対して行うことによって, $C(S^3, \mathbb{R}^4)$ の部分空間 A 上の全射等距離写像 $S : A \to A$ で一般荷重合成作用素でないものを構成することができる ([9]).

参考文献

[1] J. Araujo and J.J. Font, *Linear isometries between subspaces of continuous fuctions*, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 413-428.

[2] H. Al-Halees and R.J. Fleming, *Extreme point methods and Banach-Stone theorem*, J. Aust. Math. Soc. 75 (2003), 125-143.

[3] B. Browski and F. Dutsch, *On some geoometric properties of suns,* J. Appr. Th. 10 (1974), 245-267.

[4] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras,* Studia Math. 25 (1964-1965), 217-225.

[5] N. Dunford and J. Schwarz, *Linear operators, vol.1, General Theory*, Interscience, New York, (1958)

[6] W. Holszynski, *Continuous mappings induced by isometries of spaces of continuous functions,* Studia Math. 26 (1966), 133-136.

[7] M. Jerison, *The space of bounded maps into Banach space,* Ann. Math. 52 (1950), 309-327.

[8] K. Kawamura, *Linear surjective isometries between vector-valued function spaces*, J. Aust.Math. Soc.100 (2016), 349-373.

[9] K. Kawamura, *Banach Stone Theorem for quaternion-valued continuous function spaces,* Mediterranean J. Math. 13(2016), 4745-4761.

[10] K. Kawamura and T. Miura, *Real-linear surjective isometries between function spaces,* Top. Appl. 226 (2017), 66-85.

[11] H. Koshimizu, T. Miura, H. Takagi and S.-E. Takahasi, *Real-linear isometries between subspaces of continuous functions,* J. Math. Anal. Appl. 413 (2014), 229-241.

[12] T. Miura, *Surjective isometries between function spaces*, Contemp. Math.645, 231-239.

[13] W. Novinger, *Linear isometries of subspaces of spaces of continuous functions*, Studia Math. 53 (1975), 273-276.

[14] K. Sundaresan, *Spaces of continuous functions into Banach spaces,* Studia Math. 48 (1973), 15-22.

[15] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem,* Amer. Math. Monthly 110-7 (2003), 633-635.