数理解析研究所講究録 第2103巻 2019年 14-27

On some relatively cuspidal representations of GL_n over p-adic fields *

加藤 信一 (京都大学 国際高等教育院／理学研究科数学教室)
Shin-ichi Kato
Institute for Liberal Arts and Sciences/Department of Mathematics,
Kyoto University

高野 啓児 (香川大学 教育学部)
Keiji Takano
Faculty of Education, Kagawa University

Abstract

This work provides certain examples of relatively cuspidal representations, attached to symmetric spaces over p-adic fields. We study three concrete examples of symmetric spaces:

- $\mathrm{GL}_n(E)/\mathrm{GL}_n(F)$, Galois involution;
- $\mathrm{GL}_{2m}(F)/\mathrm{GL}_m(E)$, inner involution (I);
- $\mathrm{GL}_n(F)/\big(\mathrm{GL}_{n-r}(F) \times \mathrm{GL}_r(F)\big)$, inner involution (II),

where E/F is a quadratic extension of p-adic fields. Examples are given by inductions from particular kinds of parabolic subgroups stable under the involution.

0 Introduction

p-進体上の対称空間 G/H に付随した群表現の基礎理論として，筆者らは [KT1] で「相対尖点表現」(定義 1.1) の概念を提唱し，「相対版部分表現定理」(定理 1.3) を証明した。それによれば相対尖点表現は対称空間に付随した既約表現すべての ” building blocks” をなすものと位置付けられる。よって相対尖点表現の重要度は高いと思われるが，その実例は多くはない。以前から知られていたものとしては，

- 通常の意味で尖点的かつ distinguished なもの (Hakim, Mao, Murnaghan など)
- 非尖点的な相対尖点表現 ([KT, §8]): $\mathrm{GL}_n/\mathrm{GL}_{n-1} \times \mathrm{GL}_1$ および $\mathrm{GL}_{2n}/\mathrm{Sp}_n$ に付随したもの

がある。その後，後者のような例の類似を Lapid-Mao が $\mathrm{GL}_{2n}/\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n$ に対して，また Offen, Smith が $\mathrm{GL}_n(E)/\mathrm{GL}_n(F)$ に対して幾つか発見している。

* 本研究は JSPS 科研費 JP26400011 の助成を受けたものである。

本研究は，非尖点的な相対尖点表現を系列として得る構成法のひとつの試みである。一般的な構成法として期待する手順（以下の 2.3）を考案し，幾つかの対称空間の具体例でそれが正しいことを確認できた。扱う対称空間は，E/F を p-進体の二次拡大として，

$$\mathrm{GL}_n(E)/\mathrm{GL}_n(F), \quad \mathrm{GL}_{2m}(F)/\mathrm{GL}_m(E), \quad \mathrm{GL}_n(F)/\big(\mathrm{GL}_{n-r}(F)\times\mathrm{GL}_r(F)\big)$$

の３型である。（後者２つは位数 2 の内部自己同型による対称空間である。）これらの例で，ある種の楕円トーラスから生じる特殊な放物部分群，Levi 部分群の尖点的 distinguished 表現を材料にして相対尖点表現を系列として得ることができたので，それを報告する。

1 Distinguished representations and relative cuspidality

1.1. F を非アルキメデス局所体（ただし剰余標数 2 を除く），$\mathbf{G}$ を F 上定義された連結簡約代数群，$\sigma : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ を F 上定義された involution （つまり位数 2 の自己同型）とする。$\mathbf{G}$ の σ-固定点のなす部分群を $\mathbf{H}$, また $\mathbf{G}$ の中心を $\mathbf{Z}$ と表す。また，F-有理点のなす群については $G = \mathbf{G}(F)$, $H = \mathbf{H}(F)$ のように表すこととする。

G の許容表現 π は、H の指標 $\mu : H \to \mathbb{C}^\times$ に対して

$$\mathrm{Hom}_H(\pi, \mu) \neq \{0\}$$

をみたすときに (H, μ)-distinguished であるという。また μ が自明なときにこれをみたすものは H-distinguished であるという。$\Lambda \in \mathrm{Hom}_H(\pi, 1)$ と $v \in \pi$ に対し

$$\varphi_{\Lambda,v}(g) = \langle \Lambda, \pi(g^{-1})v \rangle$$

で G 上の関数 (H-行列成分) $\varphi_{\Lambda,v}$ を定義すると，これは右 H-不変になり，これに関連して同型

$$\mathrm{Hom}_H(\pi, 1) \simeq \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H)), \quad \Lambda \rightsquigarrow \big[v \mapsto \varphi_{\Lambda,v}\big]$$

が成り立つ（Frobenius 相互律）。これにより既約表現が H-distinguished であることはそれが対称空間 G/H 上の関数空間に実現可能なことと同値になる。[KT1] で筆者は，そのような既約表現の分類に向けた基礎理論を構築するために，次に述べる「相対尖点表現」なる概念を導入した。

1.2. G, H などを上の通りとする。

定義 1.1　G の H-distinguished な表現 π が H-相対尖点的であるとは、すべての $\Lambda \in \mathrm{Hom}_H(\pi, 1)$ と $v \in \pi$ に対して H-行列成分 $\varphi_{\Lambda,v}$ のサポートが ZH を法としてコンパクトであることをいう。

[KT1] の主結果のひとつは、distinguished 表現の相対尖点性を σ-分裂な放物部分群に沿った Jacquet 加群の性質で特徴付けるものであった ([KT1, Theorem 6.9])。ここで，G

の放物部分群 Q が σ-分裂とは, $\sigma(Q)$ と Q が opposite であるとき, すなわち $L := \sigma(Q)\cap Q$ が Q の Levi 部分群となるときにいう。(以後 σ-分裂放物部分群の Levi 部分群としては常にこの L をとることとする。) ここでは，特徴付け定理の系として得られる次のものを記録しておく。

定理 1.2 (**[KT1]**)　G の H-distinguished な表現 π について，もしすべての極大 σ-分裂放物部分群 Q に沿った Jacquet 加群 π_Q が $L\cap H$-distinguished でないならば，π は H-相対尖点的である。

1.3. G の H-distinguished 表現の分類に向けた基礎定理として，[KT1] のもうひとつの主結果が以下のものであった。

定理 1.3 (**相対版部分表現定理,** [KT1])　G の任意の既約 H-distinguished 表現 π に対し，σ-分裂な放物部分群 Q とその Levi 部分群 L の既約 $L\cap H$-相対尖点的な表現 ρ が存在して，$\pi \hookrightarrow \mathrm{Ind}_Q^G(\rho)$ となる。

この定理により，相対尖点表現がすべての既約 H-distinguished 表現の構成のためのいわば"building blocks" と考えられることとなり，その理論上の重要性が分かる。しかしながら，相対尖点表現の具体例はあまり多くは知られていない。本研究の主たる内容は，幾つかの具体的な対称空間において相対尖点表現の系列を，ある意味で統一的な構成法によって提供するものである。

1.4. ところで通常の意味で尖点的な表現が distinguished であれば，それは相対尖点的になる ([KT1, Proposition 8.1])。そのような具体例ならば Hakim, Mao, Murnaghan らによって以前から調べられていた。最初の最も簡単な例は、有限体上の同じタイプの対称空間で distinguished な尖点表現があるときにそこからの inflation で得られるものであった ([HMa])。そこでの方法は本稿の扱う 3 つの対称空間でも (少なくとも二次拡大 E/F が不分岐なときならそのままの形で) 同様に機能する。より議論を深め，より広い例を提供する研究も幾つか進められてきた ([HMu] など)。

いっぽう，幾つかの対称空間では尖点的で distinguished になるものが全く存在しないことも観察されていた：$\mathrm{GL}_{2n}(F)/\mathrm{Sp}_n(F)$ の場合の Heumos-Rallis の研究，および $\mathrm{GL}_n(F)/\big(\mathrm{GL}_{n-r}(F)\times\mathrm{GL}_r(F)\big)$, $n-r\neq r$ の場合の Matringe の研究 ([Mat1]) である。そのような場合であっても，相対尖点表現ならば必ず存在するものと考えられる。特に後者の対称空間に対しては，本研究で尖点的でないが相対尖点的な表現の実例を新たに与えることとなる。

2 Overview of our construction

2.1. 本研究の相対尖点表現の構成法について，そのアウトラインを述べる。まずは σ-安定な放物部分群からの誘導表現で distinguished な表現を得る簡単な方法から始める。

σ-安定な放物部分群 P は必ず σ-安定な Levi 部分群をもつ。そのようなペア (P, M) に対し, $M \cap H$ の指標 $\mu = \mu_{P,M}$ を

$$\mu_{P,M} := \delta_P|_{M\cap H}^{-1/2} \cdot \delta_{P\cap H}$$

で定義する。ただしここで δ_P, $\delta_{P\cap H}$ は P, $P\cap H$ それぞれのモデュラス指標を表す。

命題 2.1　P を σ-安定な放物部分群，M をその σ-安定な Levi 部分群とする。ρ が M の $(M\cap H, \mu_{P,M})$-distinguished な表現ならば，誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ は H-distinguished になる。

証明　具体例では [F] などで知られていたが，上の形への一般化も容易である。$\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ 上の線形汎関数 Λ を

$$\langle \Lambda, \varphi\rangle = \int_{P\cap H\backslash H} \langle \lambda, \varphi(\dot{h})\rangle \, d\dot{h} \quad (\varphi \in \mathrm{Ind}_P^G(\rho))$$

で与えればよい。[O2] も参照。 □

2.2. 単純に言うと，上の命題でさらに ρ が尖点的であるときに誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ が相対尖点的になることを期待するのだが，当てはまらない例もすぐに見つかる：Group case つまり $G = G_0 \times G_0$ で involution σ を $\sigma(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$ で考えるとき，G の既約 H-distinguished 表現は G_0 の既約表現 π_0 を用いた $\pi_0 \otimes \widetilde{\pi}_0$ の形であり，それが H-相対尖点的なのは π_0 が通常の意味で尖点的なときである。この対称空間では上の構成法で得られる表現は $\mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho_0) \otimes \mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\widetilde{\rho_0})$（ただし P_0 は G の放物部分群，ρ_0 はその Levi 部分群の既約尖点表現）の形となってしまい，これは相対尖点的になっていない。

2.3. 本研究では，相対尖点表現の構成のために適切な σ-安定ペア (P, M) として以下の手順で生じるものを想定した。(これは有限体上の簡約群の表現論からの示唆によるものである。)

- G の極大 σ-分裂トーラス S で G の中心 Z を法として F-anisotropic なものをとる。
- その S を含む極大 F-トーラス T をとる。
- T の F-分裂部分を T_d として，$M := Z_G(T_d)$ とおく。
- この M は，何らかの σ-安定放物部分群 P の Levi 部分群となる。

ここで，G の部分トーラス S は $\sigma(s) = s^{-1}\,(\forall\, s \in S)$ をみたすとき σ-分裂であるといわれる。上記のような S と T のいろいろな取り方から生じる (P, M) に対して，以下のことを期待している：

(期待 1)　上のように (P, M) をとるとき，M には確かに $(M \cap H, \mu_{P,M})$-distinguished な既約尖点表現 ρ が存在するであろう。(T が M の楕円トーラスで S を含むものであることに注意。)

(期待 2)　そのような ρ（ただしある種の regularity をみたすもの）から構成した $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ は，H-相対尖点的になるであろう。

本研究で取り上げる３つのタイプの対称空間では，(期待 1) の存在に関して [HMu] （および [HMa] の手法の適用）で実例が挙げられている。Levi 部分群のそれらの表現を材料として，(期待 2) が確かに成立することを示すのが本研究の主たる内容となる。

2.4. 上記のような誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ の相対尖点性を示すために，３つの具体例いずれでも以下の手順を踏むこととなる。

まず、定理 1.2 により，すべての極大 σ-分裂放物部分群 Q に対し

$$\mathrm{Hom}_{L\cap H}\left((\mathrm{Ind}_P^G(\rho))_Q, 1\right) = \{0\}$$

となることを示せばよい。次に放物誘導の Jacquet 加群 $(\mathrm{Ind}_P^G(\rho))_Q$ を分析する Bernstein-Zelevinsky の geometric lemma ([BZ]) によって，この Jacquet 加群には各部分商が

$$\mathcal{F}_w(\rho) := \mathrm{Ind}_{L\cap wPw^{-1}}^L({}^w\rho)$$

の形であるような filtration がある。（ここで w は両側剰余類 $Q\backslash G/P$ の代表元のある部分集合を動く。）よってあとは、すべての w に対して

$$\mathrm{Hom}_{L\cap H}\left(\mathcal{F}_w(\rho), 1\right) = \{0\}$$

を示せばよいこととなる。

実際には，放物部分群をスタンダードな系列で考える便宜のために，involution σ をそれと $\mathrm{Int}(G)$-共役な σ' に取り替え，すべての極大 σ'-分裂な放物部分群 Q に対してこれらの手順を踏む。それにより得られるのは直接には σ'-固定点の部分群を H' として H'-相対尖点性である。この σ' は，何らかの $\gamma \in G$ に対して

$$\sigma' = \mathrm{Int}(\gamma) \circ \sigma \circ \mathrm{Int}(\gamma^{-1})$$

の形で定めるもので，このとき H' は γ により H と共役になることから

$$\pi \text{ が } H\text{-相対尖点的} \iff \pi \text{ が } H'\text{-相対尖点的}$$

が成り立つ。よって H'-相対尖点性が得られれば H-相対尖点性も導けたこととなる。

3 The case of Galois involution on GL_n

3.1. E/F を非アルキメデス局所体の二次拡大とし，$G = G_n = \mathrm{GL}_n(E)$ 上で σ を

$$\sigma(g) = \overline{g} \ \bigl(= (\overline{g_{ij}}) \text{ if } g = (g_{ij})\bigr)$$

で定まるものとする。固定点の部分群は $H = H_n = \mathrm{GL}_n(F)$ となる。

n の分割 $(n_1, \ldots, n_k)$ に対し，スタンダード放物部分群 P およびスタンダード Levi 部分群 M を

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & x_k \end{pmatrix} \;\middle|\; x_i \in G_{n_i} \, (i = 1, \ldots, k) \right\},$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & x_k \end{pmatrix} \;\middle|\; x_i \in G_{n_i} \, (i = 1, \ldots, k) \right\}$$

と対応させる。

3.2. 上のような P, M は明らかにみな σ-stable である。さらに以下のようにして，いずれも 2.3 の手順で生じるものであることがわかる：n の任意の分割 $(n_1, \ldots, n_k)$ に対し，各 i で F の n_i 次拡大 $\mathbf{k}_i/F$ を，$\mathbb{K}_i := \mathbf{k}_i \cdot E$ が $\mathbf{k}_i/F$ の二次拡大となるようにとる。すると $\mathbb{K}_i$ は E の n_i 次拡大なのでその乗法群を G_{n_i} に楕円トーラスとして埋め込むことができる。埋め込みは，その像の上で σ が $\mathbb{K}_i/\mathbf{k}_i$ の Galois 自己同型として作用するようにとることができる。

$$M \simeq G_{n_1} \times \cdots \times G_{n_k}$$

のなかで

$$\mathbb{K}_1^\times \times \cdots \times \mathbb{K}_k^\times$$

の像を考え，これを T とする。その σ-分裂部分 S はノルム写像の核

$$\{ z \in \mathbb{K}_i^\times \mid z \cdot \overline{z} = 1 \}$$

の直積となるので F-anisotropic だが，さらに次元も考えるとそれは G の σ-分裂トーラスとして極大になることもわかる。最後に，T_d は対角ブロックごとに F-係数のスカラー行列となるので，その中心化群 $Z_G(T_d)$ が当初の M に一致することとなる。

3.3. 任意のスタンダートなペア (P, M) が我々の考察の対象ということになる。2.3 の手順に乗せるために 2.1 の指標 $\mu_{P,M}$ を計算すると，

$$\mu_{P,M} \equiv 1$$

が分かる。δ_P は

$$\delta_P\begin{pmatrix} x_1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & x_k \end{pmatrix} = \prod_{1\leqq i<j\leqq k} \left|\det(x_i)\right|_E^{n_j}\cdot\left|\det(x_j)\right|_E^{-n_i}$$

で計算され, $\delta_{P\cap H}$ も同様の式で, E を F に代えて与えられる。絶対値の関係 $\left|\cdot\right|_E^{1/2}=\left|\cdot\right|_F$ により $\delta_P^{1/2}=\delta_{P\cap H}$ となるから $\mu_{P\cap H}$ は自明となる。

3.4. この Galois case での主結果を述べる。

定理 3.1　n の任意の分割 $(n_1,\ldots,n_k)$ に対し，対応するスタンダード放物および Levi 部分群 を P, M とする。各 i で既約尖点的 H_{n_i}-distinguished な G_{n_i} の表現 ρ_i をとり，M の表現 $\rho=\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_k$ を考える。このとき，各 $i\neq j$ で $\rho_i\not\cong\rho_j$ であれば $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ は H-distinguished, 既約で H-relatively cuspidal となる。

証明　既約性の議論は容易なので省き, ここでは相対尖点性の証明の概略を述べる。$\sigma'=\sigma'_n$ を

$$\sigma'(g)=w_0\sigma(g)w_0^{-1},\quad w_0=\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}$$

で定義するとこれが σ と $\mathrm{Int}(G)$-共役になる。極大 σ'-分裂な放物部分群 Q は $1\leqq\ell\leqq[n/2]$ に対する type $(\ell,n-2\ell,\ell)$ のスタンダードなもので与えられる。そのスタンダード Levi 部分群 L 上で σ' の作用は

$$\sigma'\begin{pmatrix} x_1 & & O \\ & x_2 & \\ O & & x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma'_\ell(x_3) & & O \\ & \sigma'_{n-2\ell}(x_2) & \\ O & & \sigma'_\ell(x_1)\end{pmatrix}$$

となっているので，$G=G_n$ での σ'_n-固定点の部分群を $H'=H'_n$ とおくと

$$L\cap H'=\left\{\begin{pmatrix} x & & O \\ & y & \\ O & & \sigma'_\ell(x)\end{pmatrix}\ \middle|\ x\in G_\ell,\, y\in H'_{n-2\ell}\right\}.$$

あとは 2.4 によって，$\mathcal{F}_w(\rho):=\mathrm{Ind}_{L\cap wPw^{-1}}^L({}^w\rho)$ が $L\cap H'$-distinguished にならないことを示せばよい。これを $L\simeq G_\ell\times G_{n-2\ell}\times G_\ell$ への誘導表現として $I_1\otimes I_2\otimes I_3$ と表すとして，$L\cap H'$ の形をみると $I_1\otimes I_2\otimes I_3$ が $L\cap H'$-distinguished であるためには自明でない G_ℓ-準同型 $I_1\to\widetilde{\left({}^{\sigma'}I_3\right)}$ が存在せねばならない。I_1, I_3 は誘導データとして $\{\rho_1,\ldots,\rho_k\}$ のなかから幾つかを重なりなく選んで得られるはずであるが，Galois case では既約 H-distinguished 表現 π に対して ${}^{\sigma'}\pi\simeq\widetilde{\pi}$ が成り立つという [F] の結果を用いると，自明でない G_ℓ-準同型 $I_1\to I_3$ が存在することになってしまい，当初の仮定（すべての $i\neq j$ で $\rho_i\not\cong\rho_j$）に矛盾する。 □

注意: より限定的な P の取り方のもとで，同様の結果が [O1] および [S] でも得られていた。

4 The case of inner involutions on GL_n (I)

4.1. 以降は $G=G_n=\mathrm{GL}_n(F)$ とする。この群での位数 2 の内部自己同型は、ε^2 がスカラー行列となるような ε により与えられる。以下の 2 つのタイプに分けて調べる。

(I): $\varepsilon^2=\tau\cdot 1_n$ で $\tau\in F$ が non-square の場合

この場合は n が必ず偶数となる。$n=2m$ とおいて，ε は $\varepsilon_1=\varepsilon_1^{(m)}:=\begin{pmatrix} O & 1_m \\ \tau\cdot 1_m & O\end{pmatrix}$ に G-共役となる。$\mathrm{Int}(\varepsilon_1)$-固定点の部分群 $H_1=H_1^{(m)}$ は $E=F(\sqrt{\tau})$ とおいて

$$H_1=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ \tau b & a\end{pmatrix}\in G \;\middle|\; a,b\in \mathrm{Mat}_{m\times m}(F)\right\}\simeq \mathrm{GL}_m(E)$$

と与えられる。ただし上の同型は $\begin{pmatrix} a & b \\ \tau b & a\end{pmatrix}\rightsquigarrow a+\sqrt{\tau}b$ で与えられ，$\mathrm{Mat}_m(E)\simeq \mathrm{Mat}_{2m}(F)$ なる同一視のもとで $\mathrm{GL}_m(E)\subset \mathrm{GL}_{2m}(F)$ と見るときと同等でもある。

(II): $\varepsilon^2=c^2\cdot 1_n$, $c\in F$ の場合

この場合はスカラー倍で調節して $\varepsilon^2=1_n$ のときを考えればよい。そのような ε は何らかの r に対しての $\varepsilon_1:=\begin{pmatrix} 1_{n-r} & O \\ O & -1_r\end{pmatrix}$ に G-共役であり，$\mathrm{Int}(\varepsilon_1)$-固定点の部分群 H_1 は

$$H_1=\left\{\begin{pmatrix} a & O \\ O & b\end{pmatrix}\in G \;\middle|\; a\in G_{n-r},\, b\in G_r\right\}\simeq G_{n-r}\times G_r$$

と与えられる。H の形をみれば，以後は $1\leqq r\leqq [n/2]$ と仮定してよい。

4.2. 本節ではタイプ (I) を扱い，タイプ (II) は次節に回す。

$\varepsilon_1=\left(\begin{smallmatrix} O & 1_m \\ \tau\cdot 1_m & O\end{smallmatrix}\right)$ に G-共役な ε に対し，$\sigma=\mathrm{Int}(\varepsilon)$ が $2m$ の分割 $(n_1,\ldots,n_k)$ に対応するスタンダードペア (P,M) を stable にする場合を考えると，

$$\varepsilon\in N_G(P)\cap N_G(M)=P\cap N_G(M)=M$$

となる。そこで $\varepsilon=\begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \varepsilon^{(k)}\end{pmatrix}$, $\varepsilon^{(i)}\in G_{n_i}$ とおくと，$\varepsilon^2=\tau\cdot 1_{2m}$ から各 i で $\left(\varepsilon^{(i)}\right)^2=\tau\cdot 1_{n_i}$ となり，各 n_i が偶数でなければならない。つまり，まず stable なペアを対象とする時点で，$2m$ の偶数だけへの分割に対応したものに限定されることとなる。

これらの (P,M) が 2.3 の手順で得られるかどうか，また 2.1 での指標 $\mu_{p,m}$ がどうなるか，セクション 3 と比べるとやや複雑となるためここでは詳細を省く。結果のみ述べれば，$\varepsilon=\begin{pmatrix} \varepsilon^{(m_1)} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \varepsilon^{(m_k)}\end{pmatrix}$ に対する $\sigma=\mathrm{Int}(\varepsilon)$ を考えるなら、

- $2m$ の偶数だけへの分割 $(2m_1, \ldots, 2m_k)$ に対応するスタンダードなペア (P, M) はみな 2.3 の手順で（極大 σ-分裂, F-anisotropic なトーラスから）得られ,
- それらの (P, M) に対しては $\mu_{P.M} \equiv 1$.

詳細は [KT2] を参照されたい。

4.3. m の分割 $(m_1, \ldots, m_k)$ に対し，$G = G_{2m} = \mathrm{GL}_{2m}(F)$ のタイプ $(2m_1, \ldots, 2m_k)$ のスタンダード放物および Levi 部分群 P, M を考える。$\sigma = \mathrm{Int}(\varepsilon)$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^{(m_1)} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \varepsilon^{(m_k)} \end{pmatrix}$ とすると σ がペア (P, M) を stable にしており，σ-固定点の部分群を H とすると

$$M \simeq G_{2m_1} \times \cdots \times G_{2m_k}$$

のなかで $M \cap H$ は

$$M \cap H \simeq H_1^{(m_1)} \times \cdots \times H_1^{(m_k)}$$

の形となる。本節の $\mathrm{GL}_{2m}(F)/\mathrm{GL}_m(E)$ についての主結果は以下の通りである。

定理 4.1　上のような P, M に対し、各 i で既約尖点的 $H_1^{(m_i)}$-distinguished な G_{2m_i} の表現 ρ_i をとり，M の表現 $\rho = \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_k$ を考える。このとき，各 $i \neq j$ で $\rho_i \not\cong \rho_j$ であれば誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ は H-distinguished, 既約で H-相対尖点的となる。

証明　σ と $\mathrm{Int}(G)$-共役な

$$\sigma' = \sigma'_{2m} = \mathrm{Int}(\varepsilon'), \quad \varepsilon' = \begin{pmatrix} O & w_0 \\ \tau \cdot w_0 & O \end{pmatrix}$$

を考えればすべての極大 σ'-分裂な放物部分群がスタンダードの系列のなかでリストアップできる。それらは $1 \leqq \ell \leqq m$ に対してのタイプ $(\ell, 2m - 2\ell, \ell)$ の放物部分群 Q である。その Levi 部分群 L での σ' の作用は

$$\sigma' \begin{pmatrix} x_1 & & O \\ & x_2 & \\ O & & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 x_3 w_0^{-1} & & O \\ & \sigma'_{2m-2\ell}(x_2) & \\ O & & w_0 x_1 w_0^{-1} \end{pmatrix},$$

の形なので，σ'_{2m}-固定点の部分群を H'_m とすると

$$L \cap H' = \left\{ \begin{pmatrix} x & & O \\ & y & \\ O & & w_0 x w_0^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in G_\ell,\ y \in H'_{2m-2\ell} \right\}.$$

あとは 3.4 とほぼ同様にして証明を完成させることができる。ただし 3.4 で [F] の結果を用いた部分は，[G] のつぎの結果で代替することとなる：既約 $H_1^{(m)}$-distinguished な G_{2m} の表現は self-contragredient になる。 $\square$

5 The case of inner involutions on GL_n (II)

5.1. 本節で 4.1 のタイプ (II) を扱う。自然数 r を $1 \leqq r \leqq [n/2]$ の範囲で固定し，$G = G_n$ のなかで $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1_{n-r} & O \\ O & -1_r \end{pmatrix}$ に共役な ε による $\sigma = \mathrm{Int}(\varepsilon)$, その固定点の部分群 H を考える。$H \simeq G_{n-r} \times G_r$ で，r は対称空間 $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ のランクになっている。

特に $n - r = r$ となっている場合，つまり $G/H = \mathrm{GL}_{2r}(F)/\bigl(\mathrm{GL}_r(F) \times \mathrm{GL}_r(F)\bigr)$ の場合，G/H または (G, σ) を even type であると呼ぶことにする。この場合の記号として

$$\varepsilon_0^{(r)} := \begin{pmatrix} 1_r & O \\ O & -1_r \end{pmatrix} \in G_{2r}, \quad H_0^{(r)} := \left\{ \begin{pmatrix} x & O \\ O & y \end{pmatrix} \;\middle|\; x,\, y \in G_r \right\}$$

とおく。

5.2. このタイプ (II) の対称空間においては，既約尖点的で distinguished な表現の存在に関する Matringe の次の結果が知られている；

命題 5.1（[Mat1], [Mat2]） $\sigma = \mathrm{Int}(\varepsilon)$, $\varepsilon^2 = 1_n$ のとき，σ-固定点の部分群 H の任意の指標 $\mu : H \to \mathbb{C}^\times$ をとる。もし $G = G_n$ に既約尖点的 (H, μ)-distinguished な表現が存在するならば，(G, σ) は even type に限られる。

指標が自明な場合が [Mat1] で与えられた。μ が自明でない場合も [Mat2]（指標付きで離散系列を扱っている）の議論を適用し [Mat1] と同様な証明ができる。なお，even type の場合には既約尖点的 H-distinguished な表現の実例が [HMu] で与えられている。

5.3. $\sigma_1 = \mathrm{Int}(\varepsilon_1)$ を考えればすべてのスタンダードなペア (P, M) が σ_1-stable になるが，$M \cap H$ に様々な形が現われうることも考慮して，スタンダードペア (P, M) を stable にする他の共役な $\sigma = \mathrm{Int}(\varepsilon)$ もとりあげるとする。その場合 4.2 と同様の議論で $\varepsilon \in M$ となる。M が n の分割 $(n_1, \ldots, n_k)$ に対応するとして，$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \varepsilon^{(k)} \end{pmatrix}$, $\varepsilon^{(i)} \in G_{n_i}$ とおく。$\varepsilon^2 = 1_n$ なので各 i で $\bigl(\varepsilon^{(i)}\bigr)^2 = 1_{n_i}$ となり，$(M, \sigma|_M)$ は $\bigl(G_{n_i}, \mathrm{Int}(\varepsilon^{(i)})\bigr)$ の直積となる。

よって (P, M) とそれを stable にする σ に対し 2 節の手順を適用する場合，Matringe の結果から得られる次の系により限定を加えてよいこととなる。

系 5.2 μ を $M \cap H$ の指標とする。M が既約尖点的な $(M \cap H, \mu)$-distinguished 表現をもつならば、$(G_{n_i}, \sigma^{(i)})$ は even type になるか，または $n_i = 1$ となる。

5.4. 上記により，共役を考慮してまず (P, M) としてはタイプ $(2r_1, \ldots, 2r_k, 1, \ldots, 1)$ のも

のを扱えばよい。特に $\sum_i r_i = r$ であって ε が

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_0^{(r_1)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \varepsilon_0^{(r_k)} & \\ & & & 1_{n-2r} \end{pmatrix}$$

の形のものを考えよう。G_m のなかの対角行列全体からなる極大トーラスを T_m と表すことにして，この場合の $M \cap H$ は $H_0^{(r_1)} \times \cdots \times H_0^{(r_k)} \times T_{n-2r}$ と同一視される。またこの場合であれば，(P, M) が極大 σ-分裂 F-anisotropic なトーラスから 2.3 の手順で生じうることも確認できる。(ここでは詳細を略す。)

さらにこの場合に 2.1 の指標 $\mu_{P,M}$ を計算すると次のようになる：

補題 5.3

$$\mu_{P,M} \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{smallmatrix} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \begin{smallmatrix} x_k & 0 \\ 0 & y_k \end{smallmatrix} & \\ & & & t \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqq i \leqq k} \mu_{n-2r}^{(r_i)} \left(\begin{smallmatrix} x_i & 0 \\ 0 & y_i \end{smallmatrix} \right) \cdot \delta_{B_{n-2r}}^{1/2}(t).$$

ただしここで，B_m は G_m の上三角行列全体からなる Borel 部分群とし，$\begin{pmatrix} x_i & O \\ O & y_i \end{pmatrix} \in H_0^{(r_i)}$, $t \in T_{n-2r}$ であり，$H_0^{(r)}$ の指標 $\mu_s^{(r)}$ は

$$\mu_s^{(r)} \left(\begin{smallmatrix} x & O \\ O & y \end{smallmatrix} \right) = \left|\det(x)\right|^{s/2} \left|\det(y)\right|^{-s/2}$$

で与えるものとしている。

注意：上記の計算結果は $n - 2r = 0$ のとき，つまりもとの (G, σ) が even type のとき $\mu_{P,M} \equiv 1$ であることも含んでいる。

5.5. 2 節の手順に乗せた本節の主結果を述べる前に，even type の G/H に付随した尖点表現に対する次の補題が必要となる。

補題 5.4　既約尖点的 $H_0^{(r)}$-distinguished な G_{2r} の表現は，任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して $(H_0^{(r)}, \mu_s^{(r)})$-distinguished になる。

証明　[JNQ] により，既約尖点的 $H_0^{(r)}$-distinguished な表現は Shalika model をもつ。その自明でない Shalika functional を用いた [JR] の積分式により $(H_0^{(r)}, \mu_s^{(r)})$-distinction が得られる。 □

5.6. 本節の主結果を述べる。

定理 5.5　$(r_1, \ldots, r_k)$ を r の分割とし，(P, M) はタイプ $(2r_1, \ldots, 2r_k, 1, \ldots, 1)$ のスタンダードペア，$\sigma = \mathrm{Int}(\varepsilon)$ は 5.4 で与えられるものとする。各 i で G_{2r_i} の既約尖点的

$H_0^{(r_i)}$-distinguished な表現 ρ_i をとり，M の表現として

$$\rho := \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_k \otimes \delta_{B_{n-2r}}^{1/2}$$

を定める。このとき，各 $i \neq j$ で $\rho_i \not\cong \rho_j$ であれば誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ は H-distinguished, H-相対尖点的となる。

証明　まず補題 5.3, 5.4 により確かに $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ は H-distinguished になる。相対尖点性の証明のために，分裂放物を記述するのに適切な σ' を

$$\sigma' = \mathrm{Int}(\varepsilon'), \quad \varepsilon' = \begin{pmatrix} & & w_0 \\ & 1_{n-2r} & \\ w_0 & & \end{pmatrix}, \quad w_0 = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in G_r$$

で与える。すると極大 σ'-分裂な放物部分群 Q はスタンダードの系列のなかでタイプ $(\ell, n-2\ell, \ell)$ のものにより尽くされる。ただし ℓ は $1 \leqq \ell \leqq r$ の範囲を動く。Levi 部分群 L 上では

$$\sigma' \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & x_2 & \\ & & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 x_3 w_0^{-1} & & \\ & \sigma'_{n-2\ell}(x_2) & \\ & & w_0 x_1 w_0^{-1} \end{pmatrix}$$

なので

$$L \cap H' = \left\{ \begin{pmatrix} x & & O \\ & y & \\ O & & w_0 x w_0^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in G_\ell,\, y \in H'_{n-2\ell} \right\}.$$

あとは 2.4 の方針によって $\mathcal{F}_w(\rho) := \mathrm{Ind}_{L \cap wPw^{-1}}^L({}^w\rho)$ が $L \cap H'$-distinguished にならないことを示せばよい。$L \simeq G_\ell \times G_{n-2\ell} \times G_\ell$ への誘導表現として $\mathcal{F}_w(\rho) = I_1 \otimes I_2 \otimes I_3$ と表す。上の $L \cap H'$ の形をみれば，仮に $I_1 \otimes I_2 \otimes I_3$ が $L \cap H'$-distinguished なら

(a)　I_1 と $\widetilde{I}_3$ が共通の既約部分商をもち，

(b)　$G_{n-2\ell}$ への誘導表現 I_2 は $H'_{n-2\ell}$-distinguished,

の 2 つが要請される。なお $\delta_{B_{n-2r}}^{1/2}\bigl(\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_{n-2r})\bigr) = \prod_i \chi_i(t_i)$ と表すとき I_1, I_2, I_3 の誘導データは $\{\rho_1, \ldots, \rho_k, \chi_1, \ldots, \chi_{n-2r}\}$ から選ばれる。

3.5 および 4.3 の証明では条件 (a) のみによって矛盾を導くことができた。しかし今は，$n - 2r \geqq 2$ の場合に条件 (a) を実現できるような誘導データの選び方が可能となっている。1 次元トーラスの指標 χ_j たちは互いに逆になっているペアから成るためである。そこで，そのように I_1, I_3 の誘導データを（指標 χ_j たちだけで）選ぶとして，I_2 に関する条件 (b) から矛盾を導かねばならない。そのためには次の主張を示せばよい。

Claim　$G = G_n$, $H \simeq G_{n-r} \times G_r$ において，(P, M) をタイプ $(n_1, \ldots, n_k)$ のペアで n_i は偶数または 1 であるとする。もし M の偶数サイズブロックのサイズの総

和 $\sum_{n_i:\mathrm{even}} n_i$ が $2r$ より大きいならば，M のどの既約尖点表現 ρ に対しても誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ は H-distinguished にならない。

この主張は $P\backslash G/H$ の代表元についての情報と，一般的な $P\backslash G/H$ の "Bruhat theory" をこの具体例に適用することで示される。Offen による Bruhat theory の「精密化」([O2]) を使うことが証明の鍵となるが，ここでは省略する。(詳細は [KT2] を参照されたい。)

定理の証明に戻る。上の I_2 は誘導データに $\rho_1, \ldots, \rho_k$ すべてを含むので偶数ブロックサイズの総和は $2r$ である。しかし $G_{n-2\ell}/H'_{n-2\ell}$ のランクは r よりも真に小さくなっている。よって上記の主張により条件 (b) が矛盾となって証明が完成する。 $\square$

注意 (i): (G, σ) が even type のときは定理の $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ の既約性も証明できる。なお even type のときは同様の結果が [LMa] および [S] で得られている。それ以外の場合の構成例を本研究で与えたが，Matringe の結果 ([Mat1]) によりそれが尖点的 distinguished 表現の存在しない場合の相対尖点表現ということである。

注意 (ii): (G, σ) が even type でないときは，定理の $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ は可約になる。しかしその既約商表現で相対尖点的なものを得ることが可能である。

参考文献

[BZ] I. N. Bernstein and A. V. Zelevinsky, Induced representations of $\mathfrak{p}$-adic groups I, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 10 (1977), 441–472.

[F] Y. Flicker, On distinguished representations, J. reine angew. Math. 418 (1991), 139–172.

[G] J. Guo, Uniqueness of generalized Waldspurger model for $GL(2n)$, Pacific J. Math. 180 (1997), 273–289.

[HMa] J. Hakim and Z. Mao, Supercuspidal representations of $GL(n)$ distinguished by a unitary subgroup, Pacific J. Math. 185 (1998), 149–162.

[HMu] J. Hakim and F. Murnaghan, Two types of distinguished supercuspidal representations, Int. Math. Res. Notices 35 (2002), 1857–1889.

[JR] H. Jacquet and S. Rallis, Uniqueness of linear periods, Compositio Math. 102 (1996), 65–123.

[JNQ] D. Jiang, C. Nien and Y. Qin, Local Shalika models and functoriality, Manuscripta Math. 127 (2008), 187–217.

[KT1] S. Kato and K. Takano, Subrepresentation theorem for p-adic symmetric spaces, Int. Math. Res. Notices 2008(12) (2008), 1–40.

[KT2] S. Kato and K. Takano, Examples of relatively cuspidal representations: Galois and inner involutions on GL_n, in preparation.

[LMa] E. Lapid and Z. Mao, Whittaker-Fourier coefficients of cusp forms on $\widetilde{\mathrm{Sp}}_n$: reduction to a local statement, Amer. J. Math. 139 (2017), 1–55.

[Mat1] N. Matringe, Cuspidal representations of $\mathrm{GL}(n, F)$ distinguished by a maximal Levi subgroup, with F a non-archimedean local field, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 350 (2012), 797–800.

[Mat2] N. Matringe, Linear and Shalika local periods for the mirabolic group, and some consequences, J. Number Theory, 138 (2014), 1–19.

[Mu] F. Murnaghan, Distinguished positive regular representations, Bull. Iranian Math. Soc. 43(4) (2017), 291–311.

[O1] O. Offen, On local root numbers and distinction, J. reine angew. Math, 652 (2011) 165–205.

[O2] O. Offen, On parabolic induction associated with a p-adic symmetric space, J. Number Theory, 170 (2017) 211–227.

[S] J. M. Smith, Relative discrete series representations for two quotients of p-adic GL_n, Canad. J. Mathematics 70 (2018), 1339–1372.