

# 反ド・ジッター空間における無限生成の強不連続性を有さないある不連続群の軌道の数え上げについて

東京大学大学院数理科学研究科 甘中 一輝

Kazuki Kannaka

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

## Abstract

Guéritaud-Kassel[4] により構成された反ド・ジッター空間の不連続群 (を一般化した)  $\Gamma_N^{j,\rho}$  について, その軌道のある「擬球」で数え上げた時, 「擬球」の半径に関する数え上げの増大度をパラメータ  $j, \rho$  を変えることで任意に大きくできる事, また軌道の数え上げの応用として, あるパラメータ  $j, \rho$  では局所反ド・ジッター空間  $\Gamma_N^{j,\rho} \backslash \text{AdS}^3$  には離散スペクトラムが無限個構成できる事を Kassel-小林 [7] の手法を用いて示す.

## 1 はじめに

連結な実線形半単純群  $G$  に対してある対合  $\sigma$  が存在して,  $H$  が  $G^\sigma$  ( $\sigma$  で固定される部分群) の開部分群である時,  $(G, H, \sigma)$  を半単純対称対,  $X = G/H$  を半単純対称空間と呼ぶことにする. 半単純対称空間  $X$  には  $G$  のリー環  $\mathfrak{g}$  のキリング形式から自然に  $G$  不変な (正定値とは限らない) 計量が入り, 測度やラプラス作用素が正定値計量を持つ場合と同様に定義される. ラプラス作用素の, より一般には不変微分作用素環 (この環は可換である) の,  $L^2$  固有値 ( $X$  の離散スペクトラムと呼ぶ) は Flensted-Jensen[3] によって  $\text{rank}(G/H) = \text{rank}(K/H \cap K)$  ( $K$  は  $\sigma$  で安定な  $G$  の極大コンパクト部分群. 以下, この条件を rank 条件と呼ぶ.) の時に (無限個) 構成され, 松木-大島 [13] により Flensted-Jensen が構成したものが全てである (特に rank 条件が成り立たないときは離散スペクトラムが存在しない) 事が示された.

さて,  $G$  の離散部分群  $\Gamma$  で  $X$  に固有不連続かつ自由に作用するものを考えると, 被覆  $X \rightarrow X_\Gamma = \Gamma \backslash X$  によって,  $X_\Gamma$  に計量が誘導され, 測度やラプラス作用素が同様に定義される. また, ラプラス作用素より一般に,  $X$  の不変微分作用素環が誘導する  $X_\Gamma$  の (可換な) 微分作用素環を考える事もできる. そこで, この環の  $L^2$  固有値 ( $X_\Gamma$  の離散スペクトラム) の構成を行う, という問題は小林俊行先生により 1990 年代に開拓され始めた. 小林-Kassel[7] では, rank 条件を満たす半単純対称空間  $X$  について, 「強不連続」な  $\Gamma$  に関しては  $X_\Gamma$  の離散スペクトラムを無限個構成している.(定理 7.1, 注意 7.2 参照.)

では「強不連続性」の仮定を外した際はどうか.  $X$  として 3 次元反ドジッター空間  $\text{AdS}^3 \cong \text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \text{SL}_2(\mathbb{R}) / \text{diagSL}(2, \mathbb{R}) (\cong \text{SL}_2(\mathbb{R}))$ , 「強不連続性」を有さない  $\Gamma$  として

Guéritaud-Kassel[4] によって構成された無限自由生成の不連続群  $\Gamma_N^{j,\rho}$  (を少し講演者により一般化したもの) を選ぶ.  $\text{AdS}^3$  は rank 条件を満たす対称空間であるが, 本稿では,  $\Gamma_N^{j,\rho}$  の  $\text{AdS}^3$  への作用による軌道を数え上げることで, Kassel-小林 [7] による手法を用いて, あるパラメータ  $j, \rho$  では  $\Gamma_N^{j,\rho}$  が強不連続ではないが,  $\Gamma_N^{j,\rho} \backslash \text{AdS}^3$  の離散スペクトラム (ラプラス作用素の  $L^2$  固有値) を無限個構成できる (定理 7.3) 事を紹介したい.

またもう一つの結果として,  $\Gamma_N^{j,\rho}$  の  $\text{AdS}^3$  への作用による軌道を  $\text{AdS}^3$  の「擬球」において数え上げると, 数え上げがパラメータ  $j, \rho$  を変えることで「擬球」の半径に関して任意の増大度を持ち得る事を紹介する (定理 5.1).

## 2 $\text{AdS}^3$ における「擬球」

この節では  $\text{AdS}^3$  への離散群の作用による軌道の分布 (数え上げ) を測る方法を説明する. リーマン多様体への離散群の作用による軌道の分布を測るために, その自然な距離から定義される, ある点を中心とする球において, 軌道を数え上げ, 半径を大きくした時の漸近挙動を見るという方法がある. 例えば  $\mathbb{R}^2$  において原点を中心とする半径  $R$  の円の中で整数点を数え上げれば, その個数の  $R$  に関する主要項は  $\pi R^2$ , つまり円の面積である.

しかし  $\text{AdS}^3$  はローレンツ多様体であってリーマン多様体ではなく自然な距離を持たないので, このままでは上記のような球を考えることができない. そこで  $\mathcal{H}$  を複素上半平面  $\{z \in \mathbb{C} | \text{Im}z > 0\}$  とし, 写像

$$\begin{aligned} \text{SL}_2(\mathbb{R})/\text{SO}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{H} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \frac{ai+b}{ci+d} \end{aligned}$$

(但し  $i = \sqrt{-1} \in \mathcal{H}$ ) により 2 つを同一視することで得られる,  $\mathcal{H}$  を底空間とする主  $\text{SO}_2(\mathbb{R})(\cong S^1)$  束

$$\pi: \text{AdS}^3 = \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{R})/\text{SO}_2(\mathbb{R}) \cong \mathcal{H}$$

に注目する.  $\mathcal{H}$  の双曲距離  $d_{\mathcal{H}}$  を用いて,  $x \in \text{AdS}^3$  に対して,

$$\|x\| = d_{\mathcal{H}}(\pi(x), i) = d_{\mathcal{H}}(\pi(x), \pi(I))$$

を単位行列  $I \in \text{AdS}^3$  から  $x$  までの「擬距離」と考え,

$$B(R) = \{x \in \text{AdS}^3 \mid \|x\| \leq R\}$$

を  $\text{AdS}^3$  の「原点」 $I$  を中心とする半径  $R$  の「擬球」と見なし, この擬球において離散群の軌道を数え上げる. 主束のファイバー分を無視した構成になっているがファイバーがコンパクトだから  $B(R)$  もコンパクトであり, この方法で数え上げれば離散群の軌道の無限遠での振る舞いがある意味捉えられる. なお,  $B(R)$  の体積は  $\pi^2(\cosh R - 1)$  となり, 特に  $R$  に関

して指数増大である。後に  $\text{AdS}^3$  の不連続群であって、その軌道を  $B(R)$  において数え上げると、指数関数より真に大きい増大度になるものがある事が示される。

注意 2.1 (半単純対称空間の「擬球」)

$\text{AdS}^3$  の「擬球」は半単純対称空間の場合に次のように一般化される。

半単純対称対  $(G, H, \sigma)$  に対して、 $\sigma$  と可換なカルタン対合  $\theta$  を選び、 $K = G^\theta$  とする。また、 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}(= \mathfrak{g}^\sigma), \mathfrak{k}(= \mathfrak{g}^\theta)$  をリー群  $G, H, K$  のリー環とし、 $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}^{-\sigma}, \mathfrak{p} = \mathfrak{g}^{-\theta}$  とする。 $\mathfrak{b}$  を  $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$  の部分空間の内、 $\mathfrak{g}$  の部分リー環になるもので極大なものを一つとる。

この時対称空間  $G/H$  の極分解  $G/H = K \exp(\mathfrak{b}) \cdot eH$  が成り立つ。 $G/H$  の元  $x = k \exp(X) \cdot eH$  ( $k \in K, X \in \mathfrak{b}$ , 但し  $k, X$  の取り方には不定性がある) に対してキリング形式  $B$  を用いて、 $\|x\| = \sqrt{B(X, X)}$  (これは  $X$  の取り方に依らない) を「原点」 $eH$  から  $x$  までの「擬距離」と見なすことで「擬球」が同様に定義される。

### 3 $\text{AdS}^3$ の不連続群

この節では多様体の不連続群という概念を思い出し、特に  $\text{AdS}^3$  へ等長的に作用する離散群に対して、その作用の固有不連続性の判定法を述べる。以下離散群は高々可算集合であるとする。

定義 3.1 離散群  $\Gamma$  が多様体  $M$  へ作用しているとし、 $M$  の部分集合  $S$  に対して、

$$\Gamma_S = \{\gamma \in \Gamma \mid (\gamma \cdot S) \cap S \neq \emptyset\}$$

とする。この記号を用いて、

- 任意の  $x \in M$  に対して  $\Gamma_{\{x\}} = \{e\}$  となる時、作用は自由であると言う。
- 任意のコンパクト集合  $S \subset M$  に対して  $\Gamma_S$  が有限集合となる時、作用は固有不連続であると言う。
- 作用が自由かつ固有不連続の時、 $\Gamma$  は  $M$  の不連続群であると言う。

また、次の事実を思い出す。

事実 3.2 位相多様体 (不定値計量空間, 複素多様体, etc)  $M$  と、 $\text{Homeo}(M)(\text{Isom}(M), \text{Bihol}(M), \text{etc})$  の離散部分群  $\Gamma$  について、次は同値である。

- 離散群  $\Gamma$  は  $M$  の不連続群である。
- 商  $\Gamma \backslash M$  には位相多様体 (不定値計量空間, 複素多様体, etc) の構造が入り、写像  $M \rightarrow \Gamma \backslash M$  は連続な (等長な, 正則な, etc) 主  $\Gamma$  束となる。

さて、 $\Gamma \subset \text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \text{SL}_2(\mathbb{R})$  を離散部分群とすると  $\Gamma$  は  $\text{AdS}^3$  に等長的に作用するが、そ

の作用の固有不連続性は3節で定義した「擬距離」を用いて次のように判定できる。

事実 3.3 (小林 [8][10], Benoist[1] の特別な場合.)

次は同値。

- 離散部分群  $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  が  $\mathrm{AdS}^3$  に固有不連続に作用する。
- 任意の正の実数  $R$  に対して、 $|\|\gamma_1\| - \|\gamma_2\|| < R$  となる  $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma$  は有限個しかない。

なお反ドジッター空間の等長的な不連続群は以下の様に形が決まってしまう。

事実 3.4 (Kulkarni-Raymond[12].)

離散部分群  $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  を  $\mathrm{AdS}^3$  の不連続群とすると、ある離散部分群  $\Phi \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  と群準同形  $\rho: \Phi \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  が存在して、 $\Gamma = \{(\gamma, \rho(\gamma)) \mid \gamma \in \Phi\}$  となる。

なお小林 [9], Kassel[5] によって、群多様体  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  に関するこの事実はより一般に実ランク 1 の群多様体の場合には成立し、実ランク 2 以上の群多様体に対しては成立しないことが示されている。

## 4 Guéritaud-Kassel による $\mathrm{AdS}^3$ の無限自由生成の不連続群 $\Gamma_N^{j,\rho}$ の構成

この節では Guéritaud-Kassel[4] により構成された、 $\mathrm{AdS}^3$  の無限自由生成の不連続群  $\Gamma_N^{j,\rho}$  を少し一般化した構成を紹介する。[4] ではこの不連続群を「強不連続 (sharp)」(7節参照) に作用しない例として紹介している。本稿ではこの不連続群の軌道の数え上げの評価を行う。

$N$  を自然数として、 $\Gamma_N$  を  $N$  以上の自然数  $k$  で添え字づけられた文字  $\gamma_k$  達で自由生成される群とする。 $\alpha_k, \beta_k$  を後で定義する  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  の元とし、 $j, \rho: \Gamma_N \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  をそれぞれ

$$j(\gamma_k) = \alpha_k, \rho(\gamma_k) = \beta_k (k \geq N)$$

となる唯一の群準同形とする。そして

$$\Gamma_N^{j,\rho} = \{(j(\gamma), \rho(\gamma)) \mid \gamma \in \Gamma_N\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

と定義する。後に示すように  $j, \rho$  は単射 (つまり  $\{\alpha_k\}_{k \geq N}, \{\beta_k\}_{k \geq N}$  達にはそれぞれ関係式がない) で  $j(\Gamma_N)$  が  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  の離散部分群なので、 $\Gamma_N^{j,\rho}$  は事実 3.4 で述べた形になっている。

さて,  $\alpha_k, \beta_k$  を定義する.  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_{>0}$  に対して

$$\tau = \tau(a_1, a_2, r) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} a_2 & -(a_1 a_2 + r^2) \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

とする.

$\tau$  の上半平面  $\mathcal{H}$  への作用を見ておく. (事実 3.3 で見たように  $\Gamma_N^{j,\rho} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  の  $\mathrm{AdS}^3$  への作用の固有不連続性の判定には,  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \Gamma_N^{j,\rho}$  として  $\mathcal{H}$  への  $\sigma_1, \sigma_2$  の作用を用いるのであった.) 下の図 1 のように  $\mathcal{H}$  において  $x$  軸上の点  $a_1, a_2$  を中心とする, 半径  $r$  の半円  $C^1, C^2$  を考えると,  $\tau$  の作用はまず  $C^1$  について (正則な) 反転を行い, その後  $a_2 - a_1$  だけ平行移動するというもので, 式で書けば  $\tau(z + a_1) = -\frac{r^2}{z} + a_2$  となる. 図 2 を用いれば,  $\tau$  によって領域 1 は領域 2 の外に, 領域 1 の外の領域は領域 2 に移る.

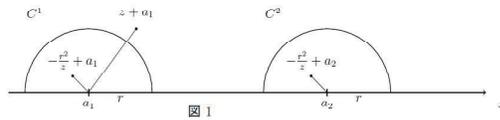


図 1

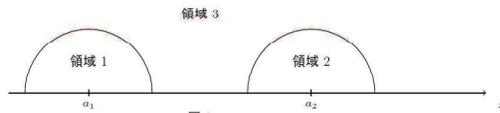


図 2

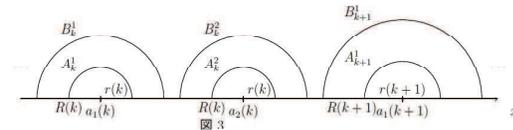


図 3

今度は  $a_1, a_2, r, R$  を  $N$  以上の整数全体で定義された実数値関数,  $r, R$  は特に正の値を取るようなものとし,

$$\alpha_k = \tau(a_1(k), a_2(k), r(k)), \beta_k = \tau(a_1(k), a_2(k), R(k))$$

とする.

ここで  $a_1, a_2, r, R$  に以下の要請を課す.

#### 要請 4.1

1.  $N$  以上の整数  $k$  に対して,

$$\begin{aligned} r(k) &< R(k) \\ a_1(k) + R(k) &< a_2(k) - R(k) \\ a_2(k) + R(k) &< a_1(k+1) - R(k+1) \end{aligned}$$

となる.

2.  $i = 1, 2$  に対して,

$$a_i(k) \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

3.  $i, j \in \{1, 2\}, k, l \geq N$  (但し,  $i = j$  の時は  $k \neq l$ ) に対して  $k, l$  に関して一様に

$$\frac{R(k)}{a_i(k) - a_j(l)} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

以降  $N$  を十分大きくして  $i = \sqrt{-1} \in \mathcal{H}$  が図 3 の半円達の外側に属するようにする.

#### 注意 4.2

1. 要請 1 から  $a_i$  が単調増加であること, 要請 2 から十分大きい  $k$  で  $a_i(k) > 0$  であることが分かり, 要請 3 と合わせて,  $i = 1, 2$  に対して,

$$\frac{R(k)}{a_i(k)} = o(1) \quad (k \rightarrow \infty)$$

であることも分かる.

2.  $f$  を  $N$  以上の実数全体で定義された滑らかな関数で次を満たすものとする.

- 狭義単調増加である.
- 真の凸関数 ( $f'$  が狭義の単調性を持つ) である.
- $x \rightarrow \infty$  で  $f(x) \rightarrow \infty$  となる.

この時,

$$a_1(k) = f(k), a_2(k) = f\left(k + \frac{1}{2}\right)$$

とし (要請 2 はこの時点で満たされる), また,  $N$  以上の実数全体で定義された正の実数値関数  $R, r$  で  $R > r$  を満たすものを取る. さらに

$$\frac{R(x)}{f'(x \pm 1)} = o(1) \quad (x \rightarrow \infty)$$

を満たすならば平均値の定理を  $f$  に適用することで (十分大きい  $N$  で) 要請 1, 3 を満たすことが分かる.

要請 1 は図 3 のような半円の配置になっているということであるが, この条件から次が従う.

命題 4.3  $\Gamma_N^{j,\rho}$  は  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  の離散部分群であり, また  $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k \geq N}$  によって  $\Gamma_N^{j,\rho}$  は自由生成される. 特に  $\Gamma_N^{j,\rho}$  は無限自由生成の群である.

証明のポイントは次の明らかな事実である.

事実 4.4 上半平面  $\mathcal{H}$  の点  $z$  が  $A_k^i (k \geq N, i = 1, 2)$  達の外側の領域に属するならば,  $\gamma = \gamma_{k_1}^{\varepsilon_1} \gamma_{k_2}^{\varepsilon_2} \cdots \gamma_{k_m}^{\varepsilon_m} \in \Gamma_N \setminus \{e\}$  ( $\gamma$  の最短表示,  $\varepsilon_i = \pm 1$ ) として,  $j(\gamma) \cdot z$  は  $\varepsilon_1 = 1$  の時  $A_{k_1}^2$  の内側の領域に,  $\varepsilon_1 = -1$  の時  $A_{k_1}^1$  の内側の領域に属する.

$\rho(\gamma)$  の場合にも同様の事実が成立する.

#### 命題 4.3 の証明

##### 自由性

$\{\alpha_k\}_{k \geq N}$  達に関係式がないこと, つまり  $j$  の単射性を示せば良い.  $\gamma = \gamma_{k_1}^{\varepsilon_1} \gamma_{k_2}^{\varepsilon_2} \cdots \gamma_{k_m}^{\varepsilon_m} \in \Gamma_N \setminus \{e\}$  ( $\gamma$  の最短表示,  $\varepsilon_i = \pm 1$ ) として,  $j(\gamma) = 1$  とすると, 両辺を  $i$  に作用させることで, 事実 4.4 により, 左辺は  $A_{k_1}^1, A_{k_1}^2$  どちらかの内側に, 右辺は  $A_{k_1}^1, A_{k_1}^2$  の外側に属することになり矛盾.

##### 離散性

$j(\Gamma_N) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  が離散部分群であることを示せば,  $\rho(\Gamma_N)$  についても同様で結果として  $\Gamma_N^{j,\rho}$  の  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  における離散性が分かる.

$\mathcal{H}$  において  $i$  の近傍  $V$  を  $A_k^i (k \geq N, i = 1, 2)$  達の外側の領域に含まれるようにとると, 事実 4.4 によって  $(j(\gamma) \cdot V) \cap V \neq \emptyset$  となる  $\gamma \in \Gamma_N$  は単位元だけになる.  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  の  $\mathcal{H}$  への作用の連続性によって,  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  の単位元の近傍  $U$  と  $V$  に含まれる  $i$  の近傍  $W$  であって,  $U \cdot W \subset V$  となるようなものがある. 構成から  $U \cap j(\Gamma_N) = \{e\}$  となる.

□

次に  $\Gamma_N^{j,\rho}$  の作用の固有不連続性の判定法を与える.

命題 4.5  $\Gamma_N \setminus \{e\}$  の元  $\gamma = \gamma_{k_1}^{\varepsilon_1} \gamma_{k_2}^{\varepsilon_2} \cdots \gamma_{k_m}^{\varepsilon_m}$  ( $\gamma$  の最短表示,  $\varepsilon_i = \pm 1$ ) に対して,

$$\|j(\gamma)\| - \|\rho(\gamma)\| = \sum_{i=1}^m (2 \log \frac{R(k_i)}{r(k_i)} + o(1))$$

となる. ここで  $o(1)$  達は  $N \rightarrow \infty$  で一様に 0 となる項である.

事実 3.3 によって次の系を得る.

系 4.6 十分大きい  $N$  に対して  $\Gamma_N^{j,\rho}$  が  $\mathrm{AdS}^3$  に固有不連続に作用するには,  $\frac{r(k)}{R(k)} = o(1) (k \rightarrow \infty)$  となる事が必要十分.

$\Gamma_N^{j,\rho}$  が自由群であり, 特にねじれが無い事と, その作用の固有不連続性を合わせると  $\Gamma_N^{j,\rho}$

の作用の自由性が従う。よって、

系 4.7 系 4.6 の状況で  $\Gamma_N^{j,\rho}$  は  $\text{AdS}^3$  の不連続群となる。

従って、 $\Gamma_N^{j,\rho} \backslash \text{AdS}^3$  はローレンツ多様体になり、7 節で見るとこの空間での大域解析が期待できる。

さて、命題 4.5 は主に次の補題を用いて示される。

補題 4.8  $g \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  に対して、

$$2 \cosh d_{\mathcal{H}}(g \cdot i, i) = \text{Tr}({}^t g g).$$

特に、 $\mathcal{H}$  の点  $u + iv$  に対して、

$$2 \cosh d_{\mathcal{H}}(u + iv, i) = \frac{u^2 + v^2 + 1}{v}$$

となる。

補題 4.8 の証明  $u + iv = \begin{pmatrix} v^{\frac{1}{2}} & uv^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & v^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \cdot i$  と見れば、前半の主張から後半の主張が従う事は明らかである。前半の主張については、示すべき式の両辺が共に  $g$  について両側  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$  不変である事、カルタン分解  $\text{SL}_2(\mathbb{R}) = \text{SO}_2(\mathbb{R}) \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \middle| t \geq 0 \right\} \text{SO}_2(\mathbb{R})$  が成立する事を用いれば、 $g = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} (t \geq 0)$  の場合に確かめればよいがこれは明らかである。

□

注意 4.9  $u \gg 0, v \ll 1$  の時には補題 4.8 から  $\log(2 \cosh d_{\mathcal{H}}(u + iv, i)) \doteq 2 \log u - \log v$  の近似が出来、この値が十分大きい事と  $\log(2 \cosh x) \doteq x (x \gg 0)$  の近似が出来る事と合わせて、 $d_{\mathcal{H}}(u + iv, i) \doteq 2 \log u - \log v$  の近似が出来る。  $\|j(\gamma)\| = d_{\mathcal{H}}(j(\gamma) \cdot i, i)$ ,  $\|\rho(\gamma)\| = d_{\mathcal{H}}(\rho(\gamma) \cdot i, i)$  となる事から、命題 4.5 の証明には  $j(\gamma) \cdot i, \rho(\gamma) \cdot i$  の実部・虚部 (の log) を評価すれば良い。

命題 4.5 の証明  $j(\gamma) \cdot i$  の実部・虚部 (の log) の評価を行う。

(実部の評価)

$\text{Re}(j(\gamma) \cdot i)$  は

$$\begin{cases} a_2(k_1) & (\varepsilon_1 = 1) \\ a_1(k_1) & (\varepsilon_1 = -1) \end{cases} \pm r(k_1)$$

の範囲にあるから、

注意 4.2 の 1 によって,

$$\log \operatorname{Re}(j(\gamma) \cdot i) = \begin{cases} \log a_2(k_1) & (\varepsilon_1 = 1) \\ \log a_1(k_1) & (\varepsilon_1 = -1) \end{cases} + o(1)$$

である.

(虚部の評価)

$\gamma$  の最短表示の長さ  $m$  に関して帰納的に評価を行う.

そこで,  $\mathcal{H}$  の点  $z$  が

1.  $A_k^2$  の内側の領域に属する場合
2.  $A_l^1$  もしくは  $A_l^2 (l \neq k)$  の内側の領域に属する場合
3.  $i$  の場合

に,  $\alpha_k \cdot z$  の虚部を評価すれば良い. ( $\alpha_k^{-1} \cdot z$  の場合も対応して場合分けをすればよい.)

$z$  と  $A_k^1$  の中心 ( $\alpha_k$  の反転の中心) とのユークリッド距離を  $D$  (双曲距離ではない) とすると, 簡単な初等幾何によって,

$$\operatorname{Im}(\alpha_k \cdot z) = \frac{r(k)^2 \operatorname{Im} z}{D^2}$$

と分かり,

$$\log \operatorname{Im}(\alpha_k \cdot z) = 2 \log r(k) - 2 \log D + \log \operatorname{Im} z$$

となるが, 各場合で  $\log D$  は以下のように評価できる.

1.  $D$  は  $|a_2(k) - a_1(k)| \pm r(k)$  の範囲にいるから 3 番目の要請によって,

$$\log D = \log(|a_2(k) - a_1(k)|) + o(1).$$

2. 3 番目の要請から同様に,  $i = 1, 2$  に対して,

$$\log D = \log(|a_i(l) - a_1(k)|) + o(1) \quad (z \text{ が } A_l^i \text{ の内側の領域に属する場合})$$

である.

3. 2 番目の要請から同様に,

$$\log D = \log(a_1(k)) + o(1)$$

である.

$\alpha_k^{-1} z$  の場合も同様にして, また得られた結果を  $r$  から  $R$  に変えれば  $\rho(\gamma) \cdot i$  に関する同様な結果が得られる. 帰納的な各ステップで  $\|j(\gamma)\|, \|\rho(\gamma)\|$  の 2 つの計算結果の差として

出るのが  $2 \log\left(\frac{R(k_i)}{r(k_i)}\right) + o(1)$  である.

以上の実部と虚部の評価の結果として命題 4.5 を得る. □

$\text{AdS}^3$  の不連続群となる  $\Gamma_N^{j,\rho}$  の例をいくつか挙げておく. ((1),(3) については, 注意 4.2 の 2 を思い出す.)

例 4.10

	$a_1(k)$	$a_2(k)$	$r(k)$	$R(k)$
(1)	$e^{e^k}$	$e^{e^{k+\frac{1}{2}}}$	1	$e^k$
(2)(Guéritaud-Kassel)	$k^2$	$k^2 + k$	1	$\log k$
(3)	$\log k$	$\log(k + \frac{1}{2})$	$\frac{1}{k^2 \log k}$	$\frac{1}{k^2}$

これらは「強不連続性 (sharpness)」を有さない無限自由生成の  $\text{AdS}^3$  の不連続群である. (命題 6.3. )

## 5 $\Gamma_N^{j,\rho}$ の軌道の数え上げ (主定理)

$\Gamma$  を  $\text{AdS}^3$  の不連続群とし,  $x \in \text{AdS}^3, R > 0$  に対して,

$$\Gamma(x, R) = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot x \in B(R)\}$$

$$N(x, R) = \#\Gamma(x, R) \text{ (}\Gamma\text{の軌道の数え上げ)}$$

とする.  $\Gamma$  の作用の固有不連続性から  $N(x, R) < \infty$  である.

$I \in \text{AdS}^3 = \text{SL}_2(\mathbb{R})$  を単位行列として, この節では  $\Gamma = \Gamma_N^{j,\rho}$  の時の  $N(I, R)$  の下からの評価について, 次の結果を得た.

**定理 5.1**  $f$  を  $N$  以上の実数全体で定義された,  $x \rightarrow \infty$  で  $f(x) \rightarrow \infty$  となる, 滑らかで下に真に凸な狭義単調増加関数とすると, ある  $j, \rho$  が存在して十分大きい  $N$  で  $\Gamma = \Gamma_N^{j,\rho}$  の時,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N(I, R)}{f(R)} = \infty$$

となる.

この定理は「任意の増大度」に対して,  $\Gamma_N^{j,\rho}$  のパラメータを動かせば  $N(I, R)$  の増大度をそれより真に大きくできる事を主張する.

このような事はリーマン幾何では起こりえないことである. このことを説明しよう.

$M$  を非コンパクト型リーマン対称空間 (例えば上半平面  $\mathcal{H}$ ),  $\Gamma$  を  $M$  の等長的な不連続群とし,  $x_0 \in M$  を固定し,  $M$  の自然な距離  $d_M$  を用いて  $B_M(R) = \{x \in M \mid d_M(x, x_0) \leq R\}$  において  $\Gamma$  の  $x_0$  を通る軌道の数え上げを行う.

事実 5.2 (Kassel-小林 [7]Observation4.19 参照.)

$M$  にのみ依存するある定数  $c_M$  が存在して  $\#(\Gamma \cdot x_0 \cap B_M(R)) \leq c_M \text{vol}(B_M(R))$  となる。なお、 $B_M(R)$  の体積  $\text{vol}(B_M(R))$  は  $R$  に関して指数増大である。

また非リーマンな場合の軌道の数え上げに関する Eskin-McMullen[2] による結果も挙げておく。但しこれは不連続な作用ではなく、エルゴード的な作用による軌道の数え上げに関する結果である。

事実 5.3 (Eskin-McMullen[2].)

$X = G/H$  を半単純対称空間 (例えば  $\text{AdS}^3 = \text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \text{SL}_2(\mathbb{R}) / \Delta \text{SL}_2(\mathbb{R})$ ),  $x_0 = eH \in X$ ,  $\Gamma \subset G$  を  $G$  の既約な格子でさらに  $\Gamma \cap H \subset H$  も  $H$  の格子になるものとする。  $\{B_n\}_{n=1}^\infty$  を  $X$  の “well-rounded” な可測集合の列で  $n \rightarrow \infty$  で測度が発散するものとする。この時、

$$\#(\Gamma \cdot x_0 \cap B_n) \sim \frac{\text{vol}(\Gamma \cap H \backslash H)}{\text{vol}(\Gamma \backslash G)} \text{vol}(B_n) \quad (n \rightarrow \infty).$$

なお、 $X = \text{AdS}^3$  の時、 $B_n = B(n)$  とすると 2 節で述べた様に  $\text{vol}(B_n)$  は  $n$  に関して指数増大である。

この様にいずれの場合も数え上げが数え上げを行う場所の測度で評価できるという点で定理 5.1 の主張はこれらの結果とは一線を画す。

定理 5.1 の証明  $\Gamma_N^{j,\rho}$  が  $\text{AdS}^3$  へ固有不連続に作用する、つまり系 4.6 によって  $\frac{r(k)}{R(k)} = o(1)$  になるような  $a_1, a_2, r, R$  を考える。

$$\|(\alpha_k^{-1}, \beta_k^{-1}) \cdot I\| = \|\alpha_k^{-1} \beta_k\| = d_{\mathcal{H}}(\alpha_k^{-1} \beta_k \cdot i, i)$$

であり、

$$\alpha_k^{-1} \beta_k \cdot i = \frac{R(k)^2 - r(k)^2}{R(k)^2} a_1(k) + \left( \frac{r(k)}{R(k)} \right)^2 i$$

だから、補題 4.8 によって、

$$\begin{aligned} \|(\alpha_k^{-1}, \beta_k^{-1}) \cdot I\| &= 2 \log \left( \frac{R(k)^2 - r(k)^2}{R(k)^2} a_1(k) \right) - 2 \log \left( \frac{r(k)}{R(k)} \right) + o(1) \\ &= 2 \log a_1(k) + 2 \log \left( \frac{R(k)}{r(k)} \right) + o(1) \end{aligned}$$

となる。最後の等号で  $\frac{r(k)}{R(k)} = o(1)$  であることを用いた。

さて、 $x \mapsto f(x)^2$  の逆関数  $g$  を取ると、 $g$  も十分大きい実数全体で定義され、狭義単調増加、滑らか、上に凸、 $x \rightarrow \infty$  で発散するので、 $g$  に対して注意 4.2 の 2 の方法を適用し

$R(x), r(x)$  をそれぞれ  $\frac{g'(x+1)}{x}, \frac{g'(x+1)}{xg(x)}$  とする事で  $\Gamma_N^{j,\rho}$  を構成できる. さらに,  $N$  を十分大きくとって上記の  $o(1)$  の絶対値が 1 未満となるようにしておく.

すると,

$$\begin{aligned} N(I, R) &\geq \#\{k \in \mathbb{Z}_{\geq N} \mid \|(\alpha_k^{-1}, \beta_k^{-1}) \cdot I\| \leq R\} \\ &= \#\{k \in \mathbb{Z}_{\geq N} \mid 4 \log g(k) + o(1) \leq R\} \\ &\geq \#\{k \in \mathbb{Z}_{\geq N} \mid 4 \log g(k) + 1 \leq R\} \\ &\geq f(e^{\frac{R-1}{4}})^2 - N \quad (\text{十分大きい } R \text{ に対して}) \end{aligned}$$

である. □

注意 5.4 例 4.10(3) の  $\Gamma_N^{j,\rho}$  では  $N$  を十分大きくすると,  $R \rightarrow \infty$  で  $N(I, R) \geq e^{e^{\frac{R-1}{4}}} - N$  となる事が上と同様の方法で分かり,  $\Gamma_N^{j,\rho}$  の軌道の数え上げは擬球の体積の増大度より真に大きい増大度を持つ.

## 6 強不連続性

強不連続性は Kassel-小林 [7] によって, 簡約型等質空間の不連続群について定義された概念であるが (つまり一般の多様体の不連続群に関して定義される位相空間論的概念ではない), ここでは  $\text{AdS}^3$  の等長的な不連続群に絞って説明する. ポイントは小林 [8][10], Benoist[1] による固有不連続性の判定法 (事実 3.3) である.  $\Gamma \subset \text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \text{SL}_2(\mathbb{R})$  に対して  $xy$  平面上に  $(x(\gamma), y(\gamma)) = (\|\gamma_1\|, \|\gamma_2\|)$  ( $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma$ ) を図 4.5 の様にプロットする. 事実 3.3 は  $\Gamma$  が固有不連続に作用するにはプロットした点が図 4 の様に対角線のある柱状近傍に入らない事が必要十分であると主張している.

図 5 の様に, プロットした点が一次関数的に対角線から離れていくという固有不連続性の条件よりもさらに強くしたものが次の強不連続性の条件である. 極座標を使って  $(x(\gamma), y(\gamma))$  を表したものを  $(r(\gamma), \theta(\gamma))$  としよう.

定義 6.1 (小林 [11], Kassel-小林 [7]. )

$c \in (0, 1], C \in \mathbb{R}$  とする.

任意の  $\gamma \in \Gamma$  に対して

$$|x(\gamma) - y(\gamma)| \geq \sqrt{2}cr(\gamma) - C$$

となる時,  $\Gamma$  は  $\text{AdS}^3$  の  $(c, C)$  強不連続群であるという. この条件は

$$|\sin(\theta(\gamma) - \frac{\pi}{4})| \geq c - \frac{C}{\sqrt{2}r(\gamma)}$$

とも言い換えられる.

なお、次のようにある意味ほとんど強不連続群である。

**事実 6.2 (Kassel[6], Guériataud-Kassel[4].)**

3次元反ド・ジッター空間  $\text{AdS}^3$  の有限生成の不連続群は強不連続である。

一方  $\Gamma_N^{j,\rho}$  は無限自由生成であり、次が成立する。

**命題 6.3 比**

$$\frac{\log \frac{R(k)}{r(k)}}{\log \frac{a_1(k)a_2(k)}{r(k)}}$$

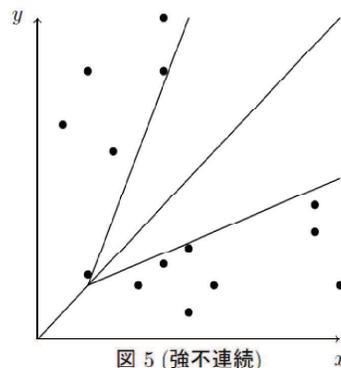
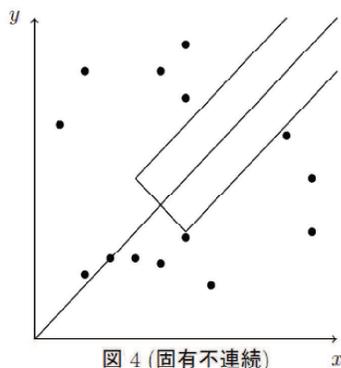
が  $k \rightarrow \infty$  で 0 に収束するならば、 $\Gamma_N^{j,\rho}$  は強不連続ではない。

**命題 6.3 の証明**  $\gamma = (\alpha_k, \beta_k) \in \Gamma_N^{j,\rho}$  に対して  $|x(\gamma) - y(\gamma)| (= \|\alpha_k\| - \|\beta_k\|)$  と  $r(\gamma)$  を比較する。命題 4.5 とその証明によって

$$|x(\gamma) - y(\gamma)| = 2 \log \frac{R(k)}{r(k)} + o(1)$$

$$r(\gamma) \geq x(\gamma) = 2 \log \frac{a_1(k)a_2(k)}{r(k)} + o(1)$$

となるので、 $k \rightarrow \infty$  とすることで仮定から定義 6.1 の条件を満たす  $(c, C)$  を取ることができない。□



## 7 スペクトル解析への応用

最後に  $\Gamma_N^{j,\rho} \backslash \text{AdS}^3$  の離散スペクトラムの構成に関する応用を述べる。これは不定値計量を持つ局所簡約型対称空間の不変微分作用素環に関する同時  $L^2$  固有値の (無限個の) 構成と

いう、より一般的な設定で Kassel-小林 [7] によって開拓され始めた問題で、局所反ド・ジッター空間の場合には次が成立する。

**事実 7.1** (Kassel-小林 [7]  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ,  $H = \mathrm{diagSL}(2, \mathbb{R})$  の場合.)

$\Gamma$  を  $\mathrm{AdS}^3$  の不連続群とする。

1. ある  $A, a > 0$  が存在して任意の  $x \in \mathrm{AdS}^3$ ,  $R > 0$  に対して  $N(x, R) \leq Ae^{aR}$  が成立するならば、 $\Gamma \backslash \mathrm{AdS}^3$  の離散スペクトラムは無限個存在する。
2. ([7]Lemma 4.6 の 4)  $\Gamma$  が  $\mathrm{AdS}^3$  の強不連続群 (sharp) ならば、1 の仮定が満たされる。

**注意 7.2**

1. 1 の仮定は各軌道の数え上げが指数増大であることと、さらにその軌道に関する一様性を要求している。すでに 5 節で見たように、軌道の数え上げが指数関数を超える増大度になる不連続群が存在するので、指数増大性すら非自明な主張なのである。
2. Kassel-小林 [7] では単に離散スペクトラムを構成しただけでなく、 $\Gamma$  の「変形」で安定な離散スペクトラムが無限個あるというリーマン幾何では起こり得なかった新しい現象を見出している。

さて、強不連続という条件を外すと軌道の数え上げにはどう影響するか、特に事実 7.1 の 1 の仮定を満たすような強不連続群でない不連続群は存在するかという疑問が生ずる。そして次を示した。

**定理 7.3**  $N$  を十分大きくとると、例 4.10(1) の  $\Gamma_N^{j,\rho}$  について次が成り立つ。

1. これは強不連続性を有さない不連続群である。
2. 任意の  $x \in \mathrm{AdS}^3$ ,  $R > 0$  に対して  $N(x, R) \leq 2^{2R}$  となる。特に事実 7.1 の条件 1 を満たし、 $\Gamma_N^{j,\rho} \backslash \mathrm{AdS}^3$  は無限個の離散スペクトラムを持つ。

証明のために少し準備をする。

**命題 7.4** ([7]Lemma 4.4, Lemma 4.17 参照.)

$(g_1, g_2) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ,  $x \in \mathrm{AdS}^3 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  に対して、

$$\|(g_1, g_2) \cdot x\| \geq |\|g_1\| - \|g_2\|| - \|x\|.$$

命題 7.4 の証明 まず,

$$\begin{aligned}
 \|(g_1, g_2) \cdot x\| &= d_{\mathcal{H}}(g_1 x g_2^{-1} \cdot i, i) \\
 &= d_{\mathcal{H}}(g_2^{-1} \cdot i, x^{-1} g_1^{-1} \cdot i) \\
 &\geq |d_{\mathcal{H}}(g_2^{-1} \cdot i, i) - d_{\mathcal{H}}(i, x^{-1} g_1^{-1} \cdot i)| \\
 &= | \|g_1 x\| - \|g_2\| |
 \end{aligned}$$

となる.

さらに,  $g, g' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  に対して,

$$| \|gg'\| - \|g\| | = |d_{\mathcal{H}}(gg' \cdot i, i) - d_{\mathcal{H}}(g \cdot i, i)| \leq d_{\mathcal{H}}(gg' \cdot i, g \cdot i) = d_{\mathcal{H}}(g' \cdot i, i) = \|g'\|$$

が成立することに注意すると,

$$\begin{aligned}
 | \|g_1\| - \|g_2\| | &\leq | \|g_1\| - \|g_2\| + (\|g_1 x\| - \|g_1\|) | + | \|g_1 x\| - \|g_1\| | \\
 &\leq | \|g_1 x\| - \|g_2\| | + \|x\|
 \end{aligned}$$

から,  $| \|g_1 x\| - \|g_2\| | \geq | \|g_1\| - \|g_2\| | - \|x\|$  を得る. 2つを合わせて示すべき主張を得る.  $\square$

事実 7.5 ([7] の Definition-Lemma 4.20. )

$\Gamma$  を  $\mathrm{AdS}^3$  の不連続群とすると,

$$\mathbb{D}_{\Gamma \backslash \mathrm{AdS}^3} = \{x \in \mathrm{AdS}^3 \mid \text{任意の } \gamma \in \Gamma \text{ に対して, } \|\gamma \cdot x\| \geq \|x\|\}$$

は  $\Gamma \backslash \mathrm{AdS}^3$  の基本領域である. 特に,  $\Gamma \mathbb{D}_{\Gamma \backslash \mathrm{AdS}^3} = \mathrm{AdS}^3$  である.

$\Gamma \mathbb{D}_{\Gamma \backslash \mathrm{AdS}^3} = \mathrm{AdS}^3$  から, 軌道の数え上げを行うには  $x \in \mathbb{D}_{\Gamma \backslash \mathrm{AdS}^3}$  の軌道を数え上げればよい. なお,  $\Gamma \mathbb{D}_{\Gamma \backslash \mathrm{AdS}^3} = \mathrm{AdS}^3$  だけならば  $\Gamma$  の作用の固有不連続性から直ちに従う.

命題 7.6 ([7] Lemma 4.21. 参照)

$x \in \mathbb{D}_{\Gamma \backslash \mathrm{AdS}^3}$  の時, 任意の  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma$  に対して,

$$\|\gamma \cdot x\| \geq \frac{1}{2} | \|\gamma_1\| - \|\gamma_2\| |.$$

命題 7.6 の証明  $\|x\| \geq \frac{1}{2} | \|\gamma_1\| - \|\gamma_2\| |$  の場合と  $\|x\| < \frac{1}{2} | \|\gamma_1\| - \|\gamma_2\| |$  の場合に分ける.

前者の場合,  $x \in \mathbb{D}_{\Gamma \backslash \mathrm{AdS}^3}$  であることから,

$$\|\gamma \cdot x\| \geq \|x\| \geq \frac{1}{2} | \|\gamma_1\| - \|\gamma_2\| |$$

となり, 後者の場合, 命題 7.4 から,

$$\|\gamma \cdot x\| \geq | \|\gamma_1\| - \|\gamma_2\| | - \|x\| \geq \frac{1}{2} | \|\gamma_1\| - \|\gamma_2\| |$$

が分かる.  $\square$

補題 7.7 自然数  $R$  に対して,

$$\# \bigcup_{m=1}^{\infty} \{(k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^m \mid \sum_{i=1}^m k_i \leq R\} = 2^R - 1$$

が成立する.

補題 7.7 の証明 集合  $\bigcup_{m=1}^{\infty} \{(k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^m \mid \sum_{i=1}^m k_i \leq R\}$  と 1 から  $2^R - 1$  までの整数のなす集合は 1 対 1 に対応する. 実際, 前者の元  $(k_1, k_2, \dots, k_m)$  に対して 2 進法で  $1 \underbrace{0 \dots 0}_{k_1-1 \text{ 個}} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{k_2-1 \text{ 個}} \dots 1 \underbrace{0 \dots 0}_{k_m-1 \text{ 個}}$  が表す数 (これは 1 から  $2^R - 1$  までの整数) を対応させればよい.  $\square$

定理 7.3 の証明 1 は系 4.7 と命題 6.3 から従う. 2 を示す. 2 以上の整数  $N$  を十分大きくして,  $\Gamma_N$  の単位元を除く任意の元  $\gamma = \gamma_{k_1}^{\varepsilon_1} \gamma_{k_2}^{\varepsilon_2} \dots \gamma_{k_m}^{\varepsilon_m}$  ( $\gamma$  の最短表示,  $\varepsilon_i = \pm 1$ ) に対して, 命題 4.5 から得られる等式

$$\frac{1}{2} \left| \|j(\gamma)\| - \|\rho(\gamma)\| \right| = \sum_{i=1}^m \left( \log \frac{R(k_i)}{r(k_i)} + o(1) \right) = \sum_{i=1}^m (k_i + o(1))$$

における  $o(1)$  の絶対値が全て 1 未満となるようにしておく.

さて,  $x$  を  $\mathbb{D}_{\Gamma \backslash \text{AdS}^3}$  の元として,  $(j(\gamma), \rho(\gamma)) \in \Gamma(x, R)$  なら, 命題 7.6 から  $\frac{1}{2} \left| \|j(\gamma)\| - \|\rho(\gamma)\| \right| \leq R$ , よって  $\sum_{i=1}^m (k_i - 1) \leq R$  が成り立つ. このような  $(k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}_{\geq N}^m$  ( $m$  は正の整数全体を動く) の個数は補題 7.7 によって高々  $2^R - 1$ . また  $\gamma$  の最短表示の長さ  $m$  について  $m \leq R$  が分かる.  $\varepsilon_i = \pm 1$  ( $1 \leq i \leq m \leq R$ ) の不定性を考慮し, さらに  $\Gamma_N^{j, \rho}$  の単位元を含めて  $N(x, R) \leq (2^R - 1)2^R + 1 \leq 2^{2R}$  が分かる.  $\square$

## 引用文献

- [1] Y. Benoist. *Actions propres sur les espaces homogènes réductifs*. *Ann. of Math.*, Vol. 144, pp. 315–347, 1996.
- [2] A. Eskin and C. McMullen. *Mixing, counting, and equidistribution in Lie groups*. *Duke Math. J.*, Vol. 71, pp. 181–209, 1993.
- [3] M. Flensted-Jensen. *Discrete series for semisimple symmetric spaces*. *Ann. of Math.*, Vol. 111, pp. 253–311, 1980.
- [4] F. Guéritaud and F. Kassel. *Maximally stretched laminations on geometrically finite hyperbolic manifolds*. *Geom. Topol.*, Vol. 21, pp. 693–840, 2017.

- [5] F. Kassel. *Proper actions on corank-one reductive homogeneous spaces. J.Lie theory*, Vol. 18, pp. 961–978, 2008.
- [6] F. Kassel. *Quotients compacts d’espaces homogènes réels ou p-adiques*. PhD thesis, Université Paris-Sud, 2009.
- [7] F. Kassel and T. Kobayashi. *Poincaré series for non-Riemannian locally symmetric spaces. Adv. Math.*, Vol. 287, pp. 123–236, 2016.
- [8] T. Kobayashi. *Proper action on a homogeneous space of reductive type. Ann. of Math.*, Vol. 285, pp. 249–263, 1989.
- [9] T. Kobayashi. *On discontinuous groups acting on homogeneous spaces with non-compact isotropy subgroups. J. Geom. Phys.*, Vol. 12, pp. 133–144, 1993.
- [10] T. Kobayashi. *Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups. J. Lie Theory*, Vol. 6, pp. 147–163, 1996.
- [11] T. Kobayashi. *Deformation of compact Clifford-Klein forms of indefinite-Riemannian homogeneous manifolds. Ann. of Math.*, Vol. 310, pp. 394–408, 1998.
- [12] R. S. Kulkarni and F. Raymond. *3-dimensional Lorentz space-forms and Seifert fiber spaces. J.Differential Geom*, Vol. 21, pp. 231–268, 1985.
- [13] T. Matsuki and T. Oshima. *A description of discrete series for semisimple symmetric spaces. Advanced Studies in Pure Mathematics*, Vol. 4, pp. 331–390, 1984.