数理解析研究所講究録 第2104巻 2019年 38-43

複数の零点を指定した場合の最近接多項式 —簡潔な距離表示について—

The nearest polynomial with two or more given zeros —A simple distance formula—

若月 雄麻
YUMA WAKATSUKI
東京理科大学大学院
GRADUATE SCHOOL, TOKYO UNIVERSITY OF SCIENCE *

関川 浩
HIROSHI SEKIGAWA
東京理科大学
TOKYO UNIVERSITY OF SCIENCE †

Abstract

着目している性質を満たし, 与えられた多項式から距離が最も近い多項式を最近接多項式という。指定された点を零点とする最近接多項式については, 一変数で異なる3点以下を指定した場合に, すでに距離表示と構成法が知られている。本論文では指定する点数を任意個とした場合の簡潔な構成法を与える。

Abstract

The nearest polynomial is the polynomial that is nearest to a given polynomial among the polynomials satisfying the properties we consider. When a given polynomial is univariate and the number of given zeros is less than four, a distance formula and a construction method of the nearest polynomial is known. In this paper, we give a simple construction method of the nearest polynomial with arbitrary number of given zeros.

1 はじめに

最近接多項式とは, ある性質を満たす多項式の中で, 与えられた多項式に最も近いものである。観測データや計算の誤差などによって係数がずれ, 本来の性質を満たさなくなった多項式を復元するときなどに利用される。注目する性質は, 与えられた点で零点を持つこと・重複零点をもつこと・多項式が2本以上の場合に最大公約多項式が1次以上であること, などが挙げられる。本研究では, 複数の指定された零点をもつ, という性質を取り上げる。

以下, 2章で先行研究を紹介し, 3章で最近接多項式の構成法と距離表示について述べる。最後に4章ではまとめと本研究の今後の課題について述べる。

2 先行研究

以下, 本論文では実係数多項式に限り話を進める。$\mathbb{P}_n$ を $\{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) \le n\}$ と定義する ($n+1$ 次元の実線形空間となる)。$f = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{P}_n$ のノルム $\|f\|$ を係数ベクトル $(a_0, \ldots, a_n)$ のノルムで定義する。

*1417622@ed.tus.ac.jp
†sekigawa@rs.tus.ac.jp

定義 1
相異なる実数 $z_1, \ldots, z_s$ と $f \in \mathbb{P}_n$ が与えられたとき, $f(z_1) = \cdots = f(z_s) = 0$ かつ, $\|\tilde{f} - f\|$ が最小となる $\tilde{f} \in \mathbb{P}_n$ を $z_1, \ldots, z_s$ と $\| * \|$ に関する最近接多項式という。

注意 1
このように定義した最近接多項式は必ず存在する。

まず, Stetter の結果 [1] の一部を紹介する。

定理 2 (零点を 1 個指定した場合)
$\tilde{f} \in \mathbb{P}_n$ が $z \in \mathbb{R}$ と p ノルム $\| * \|_p$ に関する $f \in \mathbb{P}_n$ の最近接多項式のとき,

$$\|\tilde{f} - f\|_p = \frac{|f(z)|}{\|\mathbf{z}\|_q}.$$

ここで, $p,\ q \geq 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1,\ \mathbf{z} = (1, z, \ldots, z^n)$ である。ただし, $p = \infty$ のとき $q = 1$ とし, $p = 1$ のとき $q = \infty$ とする。

次に, 朝田の結果 [2] を二つ紹介する。以下では, $\mathbf{z}_i = (1,\ z_i,\ \ldots,\ z_i^n)$ とする。

定理 3 (零点を 2 個指定した場合)
$\tilde{f} \in \mathbb{P}_n$ が相異なる $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ と $\| * \|_2$ に関する $f \in \mathbb{P}_n$ の最近接多項式のとき,

$$\|\tilde{f} - f\|_2 = \frac{\|f(z_2)\mathbf{z}_1 - f(z_1)\mathbf{z}_2\|_2}{\sqrt{\|\mathbf{z}_1\|_2^2 \|\mathbf{z}_2\|_2^2 - (\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2)^2}}.$$

定理 4 (零点を 3 個指定した場合)
$\tilde{f} \in \mathbb{P}_n$ が相異なる $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$ と $\| * \|_2$ に関する $f \in \mathbb{P}_n$ の最近接多項式のとき,

$$\|\tilde{f} - f\|_2 = \frac{\|f(z_3)(\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) + f(z_1)(\mathbf{z}_2 \times \mathbf{z}_3) + f(z_2)(\mathbf{z}_3 \times \mathbf{z}_1)\|_2}{|[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3]|}.$$

ただし, $\mathbf{z}_i \times \mathbf{z}_j\ (i \neq j)$ は $\mathrm{span}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3)$ での外積である。また, $[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3] = (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) \cdot \mathbf{z}_3$ と定義する。

注意 2

(1) 定理 2（2 ノルムの場合）, 定理 3, 定理 4 の式の右辺は, それぞれ, z の長さ, z_1 と z_2 で決まる平行四辺形の面積, z_1 と z_2 と z_3 で決まる平行六面体の体積である。

(2) $[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3] = (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) \cdot \mathbf{z}_3 = (\mathbf{z}_2 \times \mathbf{z}_3) \cdot \mathbf{z}_1 = (\mathbf{z}_3 \times \mathbf{z}_1) \cdot \mathbf{z}_2$ が成り立つ。

3 主結果

この章では, 2 ノルムに限って扱う。このとき, 最近接多項式は一意となることがわかる。

3.1 ベクトル積

主結果の記述に必要なので, この節でベクトル積を定義し, その性質について紹介する。証明は省略するので参考文献 [3] の VI 章 §5 を参照のこと。

定義 5 (ベクトル積)
$\mathbb{R}^n$ において, $n-1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_{n-1}$ (列ベクトル) のベクトル積 $[\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_{n-1}]$ を以下のように定義する。

$$[\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_{n-1}] = \Big(\det A_1,\ -\det A_2,\ \ldots,\ (-1)^{n-1}\det A_n\Big)$$

ただし, A_i は $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_{n-1})$ から i 行目を抜いた行列である。

ベクトル積について以下のような性質がある。

命題 6
$\mathbb{R}^n$ において, $\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_{n-1}]$ は以下の性質を持つ。

- $\boldsymbol{b} \in \operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_{n-1})^{\perp}$.
- $\boldsymbol{b}_1 \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}_1 = \det(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{a}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_{n-1})$.
- $\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{a}_j$ $(i \neq j)$ を入れ替えると $-\boldsymbol{b}$ になる.
- $\|\boldsymbol{b}\|_2$ は $\boldsymbol{a}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_{n-1}$ で決まる平行 $2(n-1)$ 面体の体積.

3.2 零点を任意個指定した場合の最近接多項式

$g \in \mathbb{P}_n$ の係数ベクトルを $\boldsymbol{g}$ と書くことにする。最近接多項式の構成法は以下である。

定理 7
相異なる $z_1, \ldots, z_s \in \mathbb{R}$ に関する $f \in \mathbb{P}_n$ の最近接多項式を $\tilde{f} \in \mathbb{P}_n$ とするとき,

$$\boldsymbol{f} - \tilde{\boldsymbol{f}} = \begin{cases} \dfrac{f(z_1)Z_1 + f(z_2)Z_2 + \cdots + f(z_s)Z_s}{Det} & (n \text{ が偶数のとき}), \\[2ex] \dfrac{f(z_1)Z_1 - f(z_2)Z_2 + \cdots + (-1)^{s-1}f(z_s)Z_s}{Det} & (n \text{ が奇数のとき}). \end{cases}$$

ここで, $\boldsymbol{t}_i,\ Z_k,\ Det$ は以下の通りである。

- $\boldsymbol{t}_i \in \operatorname{span}(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_s)^{\perp}$ $(1 \leq i \leq n-s+1)$. ただし, $\boldsymbol{t}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{t}_{n-s+1}$ は線形独立な任意のベクトル。
- $Z_k = [\mathbf{z}_{k+1},\ \mathbf{z}_{k+2},\ \ldots,\ \mathbf{z}_s,\ \boldsymbol{t}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{t}_{n-s+1},\ \mathbf{z}_1,\ \ldots,\ \mathbf{z}_{k-1}]$ $(1 \leq k \leq s)$.
- $Det = \det(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_s, \boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_{n-s+1})$.

注意 3
$f(z_i) = \mathbf{z}_i \cdot \boldsymbol{f}$ $(i = 1,\ \ldots,\ s)$ と表せる。

補題を一つ示し, それを用いて定理 7 を証明する。

補題 8
ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in \mathbb{R}^n$ は線形独立とする。

$$U_k = [\boldsymbol{u}_{k+1},\ \boldsymbol{u}_{k+2},\ \ldots,\ \boldsymbol{u}_n,\ \boldsymbol{u}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{u}_{k-1}]$$

としたとき, $U_1, \ldots, U_n$ は線形独立である。

証明　$c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ として,

$$c_1 U_1 + c_2 U_2 + \cdots + c_n U_n = \mathbf{0}$$

であったとする。両辺と $\boldsymbol{u}_k$ の内積を取ると,

$$U_j \cdot \boldsymbol{u}_k = 0\ (j \neq k), \qquad U_k \cdot \boldsymbol{u}_k = \det(\boldsymbol{u}_k,\ \boldsymbol{u}_{k+1},\ \ldots,\ \boldsymbol{u}_n,\ \boldsymbol{u}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{u}_{k-1})$$

に注意して,

$$c_k \det(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{k-1}) = 0$$

が成り立つ。ここで

$$\det(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{k-1}) \neq 0$$

より $c_k = 0$。よって, $U_1, \ldots, U_n$ は線形独立である。 ∎

以上の準備のもと, 定理 7 を証明する。
証明　$V_1 = \{\boldsymbol{g} \mid \mathbf{z}_i \cdot \boldsymbol{g} = 0,\ \boldsymbol{g} \in \mathbb{P}_n,\ i = 1,\ \ldots,\ s\}$, $V_2 = V_1^{\perp}$ とし, $f \in \mathbb{P}_n$ の係数ベクトル $\boldsymbol{f}$ を

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2\ \ (\boldsymbol{f}_1 \in V_1,\ \boldsymbol{f}_2 \in V_2)$$

と分解したとき, $\boldsymbol{f}_1 = \tilde{\boldsymbol{f}}$ となり,

$$\mathbf{z}_k \cdot \boldsymbol{f}_2 = \mathbf{z}_k \cdot (\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2) = f(z_k)$$

が成り立つ。
$Det = \det(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_s, \boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_{n-s+1}) \neq 0$ に注意する。

- n が偶数のとき

  以下の式が成り立つ。

$$Det = \mathbf{z}_1 \cdot Z_1 = \mathbf{z}_2 \cdot Z_2 = \cdots = \mathbf{z}_s \cdot Z_s.$$

  補題 8 より, $Z_1,\ \ldots,\ Z_s$ は V_2 の基底となる。よって, 以下の式を満たす $c_1,\ \ldots,\ c_s \in \mathbb{R}$ が存在することがわかる。

$$c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + \cdots + c_s Z_s = Det \cdot \boldsymbol{f}_2.$$

  両辺と $\mathbf{z}_k$ の内積を取ると,

$$c_k(\mathbf{z}_k \cdot Z_k) = Det \cdot (\mathbf{z}_k \cdot \boldsymbol{f}),$$
$$c_k \cdot Det = Det \cdot f(z_k),$$
$$c_k = f(z_k).$$

- n が奇数のとき

  $Det = \mathbf{z}_1 \cdot Z_1 = -\mathbf{z}_2 \cdot Z_2 = \cdots = (-1)^{s-1}\mathbf{z}_s \cdot Z_s$ が成り立つことに注意すれば, n が偶数のときと同様な議論が成り立つ。

∎

以下も定理 7 と同様に成り立つ。

系 9

定理 7 と同じ条件の下,

$$\tilde{\boldsymbol{f}} = \begin{cases} \dfrac{(\boldsymbol{t}_1 \cdot \boldsymbol{f})\, T_1 + (\boldsymbol{t}_2 \cdot \boldsymbol{f})\, T_2 + \cdots + (\boldsymbol{t}_{n-s+1} \cdot \boldsymbol{f})\, T_{n-s+1}}{Det} & (n \text{ が偶数のとき}), \\ \dfrac{(\boldsymbol{t}_1 \cdot \boldsymbol{f})\, T_1 - (\boldsymbol{t}_2 \cdot \boldsymbol{f})\, T_2 + \cdots + (-1)^{n-s} (\boldsymbol{t}_{n-s+1} \cdot \boldsymbol{f})\, T_{n-s+1}}{Det} & (n \text{ が奇数のとき}). \end{cases}$$

ここで,

- $\boldsymbol{t}_i \in \operatorname{span}(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_s)^{\perp}$ $(1 \leq i \leq n-s+1)$. ただし, $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_{n-s+1}$ は線形独立な任意のベクトル。
- $T_k = [\boldsymbol{t}_{k+1},\ \boldsymbol{t}_{k+2},\ \ldots,\ \boldsymbol{t}_{n-s+1},\ \mathbf{z}_1,\ \ldots,\ \mathbf{z}_s,\ \boldsymbol{t}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{t}_{k-1}]$ $(1 \leq k \leq n-s+1)$.
- $Det = \det(\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_{n-s+1}, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_s)$.

証明　$Det \neq 0$ に注意する。

- n が偶数のとき

  以下の式が成り立つ。

  $$Det = \boldsymbol{t}_1 \cdot T_1 = \boldsymbol{t}_2 \cdot T_2 = \cdots = \boldsymbol{t}_{n-s+1} \cdot T_{n-s+1}.$$

  補題 8 より, $T_1, \ldots, T_{n-s+1}$ は V_1 の基底となる。よって, 以下の式を満たす $c_1, \ldots, c_{n-s+1} \in \mathbb{R}$ が存在することがわかる。

  $$c_1 T_1 + c_2 T_2 + \cdots + c_{n-s+1} T_{n-s+1} = Det \cdot \boldsymbol{f}_1.$$

  両辺と $\boldsymbol{t}_k$ の内積を取ると,

  $$\begin{aligned} c_k (\boldsymbol{t}_k \cdot T_k) &= Det \cdot (\boldsymbol{t}_k \cdot \boldsymbol{f}), \\ c_k \cdot Det &= Det \cdot (\boldsymbol{t}_k \cdot \boldsymbol{f}), \\ c_k &= \boldsymbol{t}_k \cdot \boldsymbol{f}. \end{aligned}$$

- n が奇数のとき

  $Det = \boldsymbol{t}_1 \cdot T_1 = -\boldsymbol{t}_2 \cdot T_2 = \cdots = (-1)^{n-s}\boldsymbol{t}_{n-s+1} \cdot T_{n-s+1}$ が成り立つことに注意すれば, n が偶数のときと同様な議論が成り立つ。

∎

計算しなければならないベクトル積の数を考えると, $s < \frac{n}{2}$ のとき定理 7 の方が効率がよく, $s > \frac{n}{2}$ のとき系 9 の方が効率がよい。

4 おわりに

相異なる零点を任意個指定した場合の最近接多項式の構成法と簡潔な距離表示を得ることができた。今後, 定理 7 等で用いた $\boldsymbol{t}_i$ の具体的な取り方や複素係数・複素零点への拡張を考えていきたい。

謝辞

本研究は科研費 15K00025 の助成を受けたものである。

参 考 文 献

[1] Hans J. Stetter, 1999, The nearest polynomial with a given zero, and similar problem, ACM SIGSAM Bulletin, 33(4):2–4.

[2] 朝田高行, 2017, 零点を 2 つ指定した場合の最近接多項式, 東京理科大学大学院 理学研究科数理情報科学専攻, 修士論文.

[3] 杉浦光夫, 解析入門 II, 東京大学出版会, 1985.