

# 円内接多角形の外接円半径公式の計算と解析 Computation and Analysis of Explicit Formulae for the Circumradius of Cyclic Polygons (Extended Abstract)

森継 修一

SHUICHI MORITSUGU\*

筑波大学図書館情報メディア系

FACULTY OF LIBRARY, INFORMATION AND MEDIA SCIENCE, UNIVERSITY OF TSUKUBA †

## Abstract

This paper describes computations of the circumradius of cyclic polygons given by the lengths of the sides. Extending the author's previous paper in 2011, we mainly discuss the computation and analysis of the formulae for cyclic heptagons and octagons. As a result, we have found a more efficient method for computing the circumradius of cyclic heptagons than before. We have also succeeded in computing 25 out of 39 coefficients in the circumradius formula for cyclic octagons. Moreover, investigating the formulae by the total degree of each term, from triangles to octagons, we have discovered a characteristic structure in common among them, which should be helpful for computing the other huge coefficients remaining in the octagon formula.

## 1 はじめに

本研究会では別途投稿中の論文 [7] の内容に基づく講演を行ったので、本稿においては、その要約を Extended Abstract の形で記述する。円内接多角形問題とは、

「円に内接する  $n$  角形の各辺の長さ  $a_1, a_2, \dots, a_n$  が与えられたとき、その  $n$  角形の面積  $S$  および外接円の半径  $R$  (さらにそれらの関係) を  $a_1, a_2, \dots, a_n$  の式で表せ。」

という古典的な幾何学の問題 [5] である。本講演では、2015 年 12 月の研究会の報告 [6] 以降の研究の進捗に関して、特に七角形・八角形の場合に対する計算の現状およびその解析について報告を行った。

現代数学では、長年未解決だった  $n = 5, 6$  に対する面積公式を Robbins [10] が発見 (1994 年) して以来、面積公式に関する研究 [1][2][8][9][11][12] が数多く存在する。一方で、半径公式の計算に本格的に取り組み、 $n = 6, 7$  の場合の具体的な形が導かれたのは、筆者の論文 [3] が初めて (2011 年) である。

三角形に対する Heron の公式の多項式表現  $f_3$  から始めて、 $n$  角形の半径公式  $f_n$  までが順次得られているとき、 $(n+1)$  角形に対する半径公式  $f_{n+1}$  は、単純には次の終結式で帰納的に導出される。(円に内接す

\*moritsug@slis.tsukuba.ac.jp

†本研究は科研費 (25330006) の助成を受けたものである。

る  $n+1$  角形を, 共通の外接円をもつ  $n$  角形と三角形に対角線  $d$  で分割した, とみることができ, 後掲の図 1 は  $n=4$  の場合に相当する.)

$$f_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1}; R^2) := \text{Res}_d (f_n(a_1, \dots, a_{n-1}, d; R^2), f_3(d, a_n, a_{n+1}; R^2)) / (R^2)^\ell \quad (1)$$

ただし, 冗長な因子  $R^2$  の指数  $\ell$  は, そのときの式の立て方に依存する. したがって, 終結式による変数消去の計算プログラムさえあれば, 原理的には半径公式が順次求められることになるため, 面積公式の問題に比べて研究対象として着目されてこなかった面もあると思われる.(実際には,  $f_{n+1}$  を因数分解して正しい因子を取り出すなどの処理が必要で, その手順を一つの漸化式で記述することは困難である.)

しかしながら, 実際に数式処理システム上で計算してみると, 円内接六角形の場合ですら, 立式の工夫を行わないと計算効率に大きく影響することがわかった. また, 各公式のコンパクトな表現を得るため, 辺長  $a_i$  での表現から基本対称式の表現に変換することが不可欠であるが, 円内接七角形の場合にはそのアルゴリズムの工夫 [6] も必要であった. したがって, 引き続いて円内接八角形の外接円半径公式の導出を試みることで, 得られる結果自体に加えて, 関連する計算アルゴリズムの研究に寄与できる可能性があると考えている.

## 2 $n=3, 4, 5$ に対する既知の結果

### 2.1 三角形 ( $n=3$ ) の外接円半径

3 辺の長さが  $a_1, a_2, a_3$  の三角形の外接円半径  $R$  は, 古典的な Heron の公式 (紀元 1 世紀) により

$$R = \frac{a_1 a_2 a_3}{\sqrt{(a_1 + a_2 + a_3)(-a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - a_2 + a_3)(a_1 + a_2 - a_3)}} \quad (2)$$

で与えられる. これを多項式で表現し,  $y := R^2$  とおいたもの

$$\Phi_3(a_1, a_2, a_3; y) := (a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 - 2(a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2)) y + a_1^2 a_2^2 a_3^2 \quad (3)$$

を基本とする. 主係数は  $\prod(a_1 \pm a_2 \pm a_3)$  (4 通りの組み合わせのすべての積) とも表せる.

$\Phi_3(a_1, a_2, a_3; y)$  は  $a_i^2$  に関する対称式になっているため, 基本対称式  $s_1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ ,  $s_2 = a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2$ ,  $s_3 = a_1^2 a_2^2 a_3^2$  を用いて書き換えると, よりコンパクトな表現が得られる.

$$F_3(s_1, s_2, s_3; y) := (s_1^2 - 4s_2)y + s_3 \quad (4)$$

本研究の目的は,  $n \geq 4$  に対する半径公式を表す多項式  $\Phi_n(a_i; y)$  および  $F_n(s_i; y)$  の具体的な形を求め, その性質を明らかにすることである.

### 2.2 円内接四角形 ( $n=4$ ) の外接円半径

次に, “凸な” 円内接四角形に対する Brahmagupta の公式 (紀元 7 世紀) を採り上げる.

$$R = \sqrt{\frac{(a_1 a_2 + a_3 a_4)(a_1 a_3 + a_2 a_4)(a_1 a_4 + a_2 a_3)}{(-a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_1 - a_2 + a_3 + a_4)(a_1 + a_2 - a_3 + a_4)(a_1 + a_2 + a_3 - a_4)}} \quad (5)$$

これを多項式表現に変換して,  $n=4$  (凸な場合) の外接円半径を次の式で定義する.

$$\Phi_4^{(+)}(a_i; y) := ((a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4) - 2(a_1^2 a_2^2 + a_1^2 a_3^2 + a_1^2 a_4^2 + a_2^2 a_3^2 + a_2^2 a_4^2 + a_3^2 a_4^2) - 8a_1 a_2 a_3 a_4) y + (a_1^2 a_2^2 a_3^2 + a_1^2 a_2^2 a_4^2 + a_1^2 a_3^2 a_4^2 + a_2^2 a_3^2 a_4^2) + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) a_1 a_2 a_3 a_4 \quad (6)$$

この場合も、主係数は  $\prod(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4)$  (+記号が偶数個のもの 4通りの積) と因数分解可能である。

さらに、 $a_i^2$  に関する基本対称式表現に変換する。  $s_1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$ ,  $s_2 = a_1^2 a_2^2 + \dots$ ,  $s_3 = a_1^2 a_2^2 a_3^2 + \dots$  とし、 $n$  が偶数の場合は、 $s_4 = a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2$  に対して  $\sqrt{s_4} = a_1 a_2 a_3 a_4$  を補助的に用いる。

$$F_4^{(+)}(s_i; y) := (s_1^2 - 4s_2 - 8\sqrt{s_4})y + (s_3 + s_1\sqrt{s_4}) \quad (7)$$

円内接四角形が“凸でない”場合は、 $a_4 := -a_4$  あるいは  $\sqrt{s_4} := -\sqrt{s_4}$  を代入すれば、定義式は相互に入れ換わる。

$$\begin{cases} \Phi_4^{(-)}(a_1, a_2, a_3, a_4; y) := \Phi_4^{(+)}(a_1, a_2, a_3, -a_4; y) \\ F_4^{(-)}(s_i; y) := (s_1^2 - 4s_2 + 8\sqrt{s_4})y + (s_3 - s_1\sqrt{s_4}) \end{cases} \quad (8)$$

### 2.3 三角形と四角形 ( $n = 3, 4$ ) の場合の公式の関係

多項式  $\Phi_4^{(+)}(a_i; y)$ ,  $\Phi_4^{(-)}(a_i; y)$  は、 $\Phi_3(a_1, a_2, a_3; y)$  から次のように求められる。円内接四角形の 4 辺が  $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  のとき、これを長さ  $d$  の対角線により外接円を共有する 2 つの三角形  $\{a_1, a_2, d\}$ ,  $\{d, a_3, a_4\}$  に分割する。Heron の公式の多項式表現 (3) では  $d$  の偶数次の項しか現れないので、 $D := d^2$  と置き換え、 $D$  についての終結式を計算する。冗長な因子  $y^2$  を除外し結果を因数分解すると、以下の関係を得る。

$$\text{Res}_D(\Phi_3(a_1, a_2, \sqrt{D}; y), \Phi_3(\sqrt{D}, a_3, a_4; y))/y^2 = \Phi_4^{(+)}(a_i; y) \cdot \Phi_4^{(-)}(a_i; y). \quad (9)$$

以後の記述では、右辺の多項式の展開形にも言及するので、 $a_i^2$  のみで表される次の記法も導入しておく。

$$\begin{aligned} \Phi_4^{(\pm)}(a_i; y) &:= \Phi_4^{(+)}(a_i; y) \cdot \Phi_4^{(-)}(a_i; y) \\ &= u_2(a_i^2)y^2 + u_1(a_i^2)y + u_0(a_i^2) \quad (71 \text{ 項}) \end{aligned} \quad (10)$$

さらに、基本対称式表現の場合には、 $n$  が偶数の場合の  $\sqrt{s_n} = a_1 \cdots a_n$  に加えて、*crossing parity*  $\varepsilon$  [10][2] の概念を導入する。 $n = 3, 4$  の場合には、三角形 ( $\varepsilon = 0$ ), 凸四角形 ( $\varepsilon = +1$ ), 非凸四角形 ( $\varepsilon = -1$ ) を表すものとする、 $y = R^2$  に関する定義多項式 (4)(7)(8) は、以下のようにまとめられる。

$$F_{3,4}(s_i; y) := (s_1^2 - 4s_2 - \varepsilon \cdot 8\sqrt{s_4})y + (s_3 + \varepsilon \cdot s_1\sqrt{s_4}) \quad (11)$$

### 2.4 円内接五角形 ( $n = 5$ ) の外接円半径

辺長  $\{a_1, \dots, a_5\}$  をもつ円内接五角形を、長さ  $d$  の対角線により  $\{a_1, a_2, a_3, d\}$  の四角形と  $\{d, a_4, a_5\}$  の三角形に分割する (図 1)。これらは外接円を共通にもつので、以下の終結式により  $d$  を消去する。

$$\begin{aligned} \Phi_5(a_i; y) &:= \text{Res}_d(\Phi_4^{(+)}(a_1, a_2, a_3, d; y), \Phi_3(d, a_4, a_5; y))/y \\ &= A_7 y^7 + A_6 y^6 + A_5 y^5 + A_4 y^4 + A_3 y^3 + A_2 y^2 + A_1 y + A_0 \quad (2,922 \text{ 項}) \\ &\quad (y = R^2, \quad A_i \in \mathbf{Z}[a_1^2, \dots, a_5^2]) \end{aligned} \quad (12)$$

なお、主係数と定数項は次のような形状をしている。

$$\begin{cases} A_7 = \prod(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4 \pm a_5) & (16 \text{ 通りの組み合わせのすべての積}) \\ A_0 = a_1^6 a_2^6 a_3^6 a_4^6 a_5^6 \end{cases} \quad (13)$$

建部賢弘「研幾算法」(1683 年) および井関知辰「算法発揮」(1690 年) では、対角線を 2 本用いて 3 つの三角形に分割し終結式を計算することにより、「結果は直径の 14 次方程式になる」ことを導いている。最終

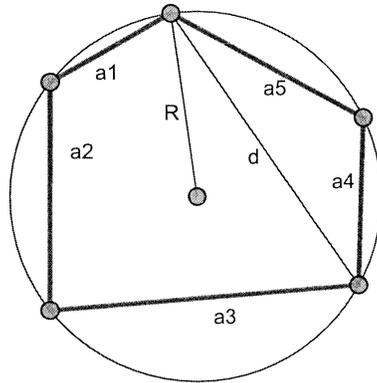


図 1: 円内接五角形の対角線  $d$  による分割

的な展開形は示されなかったが、数式処理ソフトウェアを用いて計算過程の正当性が確かめられている [4]. 一方で、現代数学で公式を明示的に求めた報告は Pech [9], Robbins [10] まで見られないようである.

終結式を計算する際、四角形に対する式として  $\Phi_4^{(+)}$  の代わりに  $\Phi_4^{(-)}$  または  $\Phi_4^{(\pm)}$  を用いても同じ結果が得られ、これらの間には以下の関係が成り立っている. (第 2 行では  $D = d^2$  という代入を行っている.)

$$\begin{aligned} \Phi_5(a_i; y) &= \text{Res}_d(\Phi_4^{(-)}(a_1, a_2, a_3, d; y), \Phi_3(d, a_4, a_5; y))/y \\ &= \text{Res}_D(\Phi_4^{(\pm)}(a_1, a_2, a_3, \sqrt{D}; y), \Phi_3(\sqrt{D}, a_4, a_5; y))/y \end{aligned} \tag{14}$$

円内接五角形の場合も、基本対称式  $s_1 = a_1^2 + \dots + a_5^2, \dots, s_5 = a_1^2 \dots a_5^2$  を用いて、式 (12) をコンパクトに表現することができる. ( $n = 5$  は奇数なので、 $\sqrt{s_n} = a_1 \dots a_n$  は現れない.) 定数項は  $\tilde{A}_0 = s_5^3$  であり、辺長による表現 (13) に対応している.

$$\begin{aligned} F_5(s_i; y) &= \tilde{A}_7 y^7 + \tilde{A}_6 y^6 + \dots + \tilde{A}_1 y + \tilde{A}_0 \quad (81 \text{ 項}) \\ &\quad (y = R^2, \tilde{A}_i \in \mathbf{Z}[s_1, \dots, s_5]) \end{aligned} \tag{15}$$

### 3 六角形 ( $n = 6$ ) に対する計算の改善

#### 3.1 Robbins の定理と以前の論文 [3] でのアルゴリズム

定義多項式  $\Phi_n(a_i; y)$  の次数は、Robbins [10] によって予想が示され、のちに証明されて定理となった.

$$k_m := \frac{2m+1}{2} \binom{2m}{m} - 2^{2m-1} = \sum_{j=0}^{m-1} (m-j) \binom{2m+1}{j} \tag{16}$$

とおくと、 $k_i := 1, 7, 38, 187, 874, \dots (i = 1, 2, 3, 4, \dots)$  という数列が得られる. このとき、次が成り立つ.

- $\Phi_{2m+1}(a_i; y)$  における  $y$  の次数は  $k_m$
- $\Phi_{2m+2}^{(\pm)}(a_i; y)$  における  $y$  の次数は  $2k_m$  であり、 $\Phi_{2m+2}^{(\pm)}$  は 2 つの多項式  $\Phi_{2m+2}^{(+)}, \Phi_{2m+2}^{(-)}$  (それぞれ  $k_m$  次) の積に因数分解される.

逆に、これらの次数に一致する多項式を外接円半径の定義多項式（半径公式）と呼ぶことにする。多項式  $\Phi_{2m+1}(a_i; y)$  および  $\Phi_{2m+2}^{(\pm)}(a_i; y)$  は  $a_i^2$  の式であり、奇数次の項は現れないことに注意する。

以前の論文 [3] では、円内接六角形を対角線  $d$  を用いて五角形と三角形に分割し、 $D(= d^2)$  についての終結式を計算した。

$$\begin{cases} \Phi_6^{(\pm)}(a_1, \dots, a_6; y) & := \text{Res}_D(\Phi_5(a_1, a_2, a_3, a_4, \sqrt{D}; y), \Phi_3(\sqrt{D}, a_5, a_6; y))/y^8 \\ & = \hat{B}_{14}y^{14} + \dots + \hat{B}_1y + \hat{B}_0 \quad (\hat{B}_i \in \mathbf{Z}[a_1, \dots, a_6]) \quad (497, 417 \text{ 項}) \end{cases} \quad (17)$$

この  $\Phi_6^{(\pm)}(a_i; x)$  を因数分解することにより、それぞれ 19,449 項をもつ 2 つの 7 次多項式を得たが、この因数分解の過程は多大な CPU 時間を必要とし、可能な限り避けるべきことを示唆している。

$$\Phi_6^{(\pm)}(a_i; y) = \Phi_6^{(+)}(a_i; y) \cdot \Phi_6^{(-)}(a_i; y) \quad (\deg_y \Phi_6^{(+)} = \deg_y \Phi_6^{(-)} = 7) \quad (18)$$

### 3.2 円内接六角形の外接円半径の計算の改善 [6]

新たな定式化では、六角形を 2 つの凸四角形に分割し、凸六角形に対する定義式を直接求めた。計算は一瞬で終わり、因数分解を回避したことが効率の劇的な改善につながっている。

$$\begin{aligned} \Phi_6^{(+)}(a_i; y) & := \text{Res}_d(\Phi_4^{(+)}(a_1, a_2, a_3, d; y), \Phi_4^{(+)}(d, a_4, a_5, a_6; y))/y \\ & = B_7y^7 + B_6y^6 + \dots + B_1y + B_0 \quad (19,449 \text{ 項}) \\ & \quad (y = R^2, \quad B_i \in \mathbf{Z}[a_1, \dots, a_6]) \end{aligned} \quad (19)$$

この主係数  $B_7$  は  $\prod(a_1 \pm \dots \pm a_6)$ （+記号が偶数個のもの 16 通りの積）と因数分解可能である。

$\Phi_6^{(+)}(a_i; y)$  に対応する非凸六角形の場合の式は、 $a_6 := -a_6$  を代入することで求められる。以後の記述では、式 (18) の右辺の展開形である  $\Phi_6^{(\pm)}(a_i; y)$  ( $a_i$  の偶数次の項のみによる表現) を用いることもある。

$$\Phi_6^{(-)}(a_1, \dots, a_5, a_6; y) := \Phi_6^{(+)}(a_1, \dots, a_5, -a_6; y). \quad (20)$$

次に、基本対称式  $s_1 = a_1^2 + \dots + a_6^2, \dots, s_5 = a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^2 + \dots, \sqrt{s_6} = a_1 \dots a_6$  を用いて式 (19) をよりコンパクトな表現に変換する。

$$\begin{aligned} F_6^{(+)}(s_i; y) & = \tilde{B}_7y^7 + \tilde{B}_6y^6 + \dots + \tilde{B}_1y + \tilde{B}_0 \quad (224 \text{ 項}) \\ & \quad (\tilde{B}_i \in \mathbf{Z}[s_1, \dots, s_5, \sqrt{s_6}]) \end{aligned} \quad (21)$$

定数項は以下の形となり、五角形の場合の  $\tilde{A}_0 = s_5^3$  を含む  $\sqrt{s_6}$  の多項式に整理できる。

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0 & = \tilde{A}_0 - s_2 s_5^2 \sqrt{s_6} + (s_1 s_3 s_5 - 4 s_4 s_5) \sqrt{s_6}^2 + (-s_1^2 s_4 + 2 s_1 s_5 + 4 s_2 s_4 - s_3^2) \sqrt{s_6}^3 \\ & \quad + (s_1^3 - 4 s_1 s_2 + 4 s_3) \sqrt{s_6}^4 - 4 \sqrt{s_6}^5 \end{aligned} \quad (22)$$

対応する非凸六角形に関する定義多項式は、 $\sqrt{s_6} := -\sqrt{s_6}$  を代入することで得られる。

$$F_6^{(-)}(s_1, \dots, s_5, \sqrt{s_6}; y) := F_6^{(+)}(s_1, \dots, s_5, -\sqrt{s_6}; y) \quad (23)$$

また、 $n = 5$  と  $n = 6$  の間の関係式は

$$F_5(s_1, \dots, s_5; y) = F_6^{(+)}(s_1, \dots, s_5, 0; y) \quad (24)$$

で与えられるので、 $F_5, F_6^{(+)}, F_6^{(-)}$  は、式 (11) と同様に、ひとつの多項式  $F_{5,6}(s_1, \dots, s_5, \varepsilon \sqrt{s_6}; y)$  で表すことができる。ここで、crossing parity  $\varepsilon$  の項の意味は、五角形に対しては  $\varepsilon = 0$ 、凸六角形に対して  $\varepsilon = +1$ 、非凸六角形に対して  $\varepsilon = -1$  である。

#### 4 七角形 ( $n = 7$ ) に対する計算方法の改善

円内接七角形を対角線  $d$  で分割する場合, 「六角形+三角形」「五角形+四角形」の 2 通り考えられ, さらに偶数角形の半径公式として  $\Phi_{2m+2}^{(\pm)}$ ,  $\Phi_{2m+2}^{(+)}$  の 2 通りあるため, 合わせて 4 通りの立式が可能になる.

$$\Phi_7(a_i; y) := \text{Res}_D(\Phi_6^{(\pm)}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \sqrt{D}; y), \Phi_3(\sqrt{D}, a_6, a_7; y))/y^6 \quad (25)$$

$$:= \text{Res}_d(\Phi_6^{(+)}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, d; y), \Phi_3(d, a_6, a_7; y))/y^6 \quad (26)$$

$$:= \text{Res}_D(\Phi_5(a_1, a_2, a_3, a_4, \sqrt{D}; y), \Phi_4^{(\pm)}(\sqrt{D}, a_5, a_6, a_7; y))/y^6 \quad (27)$$

$$:= \text{Res}_d(\Phi_5(a_1, a_2, a_3, a_4, d; y), \Phi_4^{(+)}(d, a_5, a_6, a_7; y))/y^6 \quad (28)$$

以前の論文 [3] では, 「六角形+三角形」に分割した場合の終結式 (25) に基づき,  $d$  の偶数次の項しか現れないことを利用した. しかしながら, 終結式計算において後述の式 (29)(30)(31) のような工夫を適用することにより, 4 つの定式化のいずれでも半径公式が求められるようになった.

数式処理システム Maple 2016 を用い, 以下の 2 通りの環境で実験を行った結果を表 1 に示す. これら 4 つの方法のうちでは, 「五角形+四角形」に分割した式 (27)(28) が比較的効率的であることがわかり, 論文 [3] よりも計算時間が改善される結果となった.

**Machine A** Windows, Xeon (8 core, 2.93 GHz)  $\times$  2, 192 GB RAM

**Machine B** Linux, Xeon (8 core, 2.6 GHz)  $\times$  2, 256 GB RAM

| 終結式    | Machine A | Machine B |
|--------|-----------|-----------|
| 式 (25) | 62,211    | 67,087    |
| 式 (26) | †238,183  | ‡171,980  |
| 式 (27) | ††25,365  | 27,978    |
| 式 (28) | ††24,941  | 28,489    |

†: ジョブは 7 分割して実行

‡: ジョブは 4 分割して実行

††: ジョブは 2 分割して実行

表 1: Maple 2016 による  $\Phi_7(a_i; y)$  計算の CPU 時間 (秒)

式 (28) に基づく終結式は, 多項式  $\Phi_5$  のサイズ (2,922 項) の問題により, 直接計算が困難である. したがって, 以下のように計算の過程を分割した.

最初に, 2 つの多項式を消去対象の変数  $d$  について整理する.

$$\begin{cases} \Phi_5(a_1, a_2, a_3, a_4, d; y) = y^7 d^{16} + u_{14} d^{14} + \cdots + u_2 d^2 + u_0 & (u_j \in \mathbf{Z}[a_1, a_2, a_3, a_4, y]) \\ \Phi_4^{(+)}(d, a_5, a_6, a_7; y) = y d^4 + a_5 a_6 a_7 d^3 + (\cdots) d^2 + (\cdots) d + (\cdots) & (19 \text{ 項}) \end{cases} \quad (29)$$

次に,  $u_0, u_2, \dots, u_{14}$  を新たな単独の変数とみて, これらの多項式の終結式を計算し, 中間結果を得る.

$$R(u_0, u_2, \dots, u_{14}, a_5, a_6, a_7; y) := \text{Res}_d(\Phi_5, \Phi_4^{(+)}) \quad (30)$$

次に, 各  $u_j$  に対し,  $\Phi_5$  における元の係数  $u_j(a_1, a_2, a_3, a_4, y)$  を代入し,  $y (= R^2)$  についての多項式として整理する. (この時点では, 各係数  $\bar{C}_i$  は展開されていない.)

$$\bar{R}(a_1, \dots, a_7; y) = \bar{C}_{38} y^{44} + \cdots + \bar{C}_0 y^6 \quad (31)$$

最後に、各係数  $\bar{C}_i$  を展開・整理する。この過程は非常に大きなメモリ割り当てを必要とするため、 $C_i$  をいくつかのグループに分割して計算する必要があった。

$$\Phi_7(a_i; y) = C_{38}y^{38} + \cdots + C_1y + C_0 \quad (337,550,051 \text{ 項})$$

$$(y = R^2, \quad C_i \in \mathbf{Z}[a_1^2, \dots, a_7^2]) \quad (32)$$

この結果、主係数と定数項は以下の形状をもつ。

$$\begin{cases} C_{38} &= \prod (a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4 \pm a_5 \pm a_6 \pm a_7) & (64 \text{ 通りの組み合わせのすべての積}) \\ C_0 &= a_1^{20} a_2^{20} a_3^{20} a_4^{20} a_5^{20} a_6^{20} a_7^{20} \end{cases} \quad (33)$$

さらに、論文 [6] で詳述した方法により、辺長による表現から基本対称式  $s_1 = a_1^2 + \cdots + a_7^2, \dots, s_7 = a_1^2 \cdots a_7^2$  による表現に変換する。この計算には、上述の Machine A において、総計 78,503 秒の CPU 時間を要した。

$$F_7(s_i; y) = \tilde{C}_{38}y^{38} + \cdots + \tilde{C}_1y + \tilde{C}_0 \quad (199,695 \text{ 項})$$

$$(y = R^2, \quad \tilde{C}_i \in \mathbf{Z}[s_1, \dots, s_7]) \quad (34)$$

円内接七角形に対して、外接円半径の辺長表現  $\Phi_7(a_i; y)$  とその基本対称式表現  $F_7(s_i; y)$  を明示的に報告した例は、他に見られないようである。

## 5 八角形 ( $n = 8$ ) に対する計算の試み

### 5.1 アルゴリズムおよび計算の現状

円内接八角形が与えられたとき、対角線  $d$  により、外接円を共有する 2 つの図形に分割する方法はいくつか考えられる。「七角形+三角形」あるいは「五角形+五角形」に分割した場合、 $d$  の偶数次項しか現れないことを利用し、 $D = d^2$  と置き換えたうえで、八角形の半径公式は以下の終結式で表される。

$$\Phi_8^{(\pm)}(a_i; y) := \text{Res}_D(\Phi_7(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \sqrt{D}; y), \Phi_3(\sqrt{D}, a_7, a_8; y))/y^{32} \quad (35)$$

$$:= \text{Res}_D(\Phi_5(a_1, a_2, a_3, a_4, \sqrt{D}; y), \Phi_5(\sqrt{D}, a_5, a_6, a_7, a_8; y))/y^{36} \quad (36)$$

ここで、 $\Phi_8^{(\pm)}(a_i; y)$  は  $y$  について 76 次式になり、次のように因数分解されるが、六角形・七角形 ( $n = 6, 7$ ) の場合から推測すると、終結式自体の計算も因数分解も、その実行は極めて困難と考えられる。

$$\Phi_8^{(\pm)}(a_i; y) = \Phi_8^{(+)}(a_i; y) \cdot \Phi_8^{(-)}(a_i; y) \quad (\deg_y \Phi_8^{(+)} = \deg_y \Phi_8^{(-)} = 38) \quad (37)$$

したがって、上記の因数分解を避けるため、円内接八角形を「凸六角形+凸四角形」に分割し、凸八角形に対する  $y$  の 38 次式を直接求めるべきである。

$$\Phi_8^{(+)}(a_i; y) := \text{Res}_d(\Phi_6^{(+)}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, d; y), \Phi_4^{(+)}(d, a_6, a_7, a_8; y))/y^6 \quad (38)$$

終結式の展開には、七角形の場合の式 (29) と同様に、以下のステップに分割して計算を行う。

最初に、2 つの多項式を消去対象である対角線  $d$  について整理する。 $(\Phi_6^{(+)})$  は 19,449 項からなる.)

$$\begin{cases} \Phi_6^{(+)}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, d; y) &= y^7 d^{16} - a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 y^5 d^{15} + u_{14} d^{14} + \cdots + u_1 d + u_0 \\ & \quad (u_j \in \mathbf{Z}[a_1, \dots, a_5, y]) \\ \Phi_4^{(+)}(d, a_6, a_7, a_8; y) &= y d^4 + a_6 a_7 a_8 d^3 + (\cdots) d^2 + (\cdots) d + (\cdots) \end{cases} \quad (39)$$

(19 項)

| $y$ の次数 | $\Phi_8^{(+)}$ の項数 | t-deg | $F_8^{(+)}$ の項数 | $\sqrt{s_8}$ の次数 |
|---------|--------------------|-------|-----------------|------------------|
| 0       | 5,554,128          | 70    | 918             | 16               |
| 1       | 13,298,304         | 69    | 1,870           | 16               |
| 2       | 26,940,233         | 68    | 3,432           | 16               |
| 3       | 48,012,824         | 67    | 5,732           | 16               |
| 4       | 77,750,132         | 66    | 8,931           | 16               |
| 5       | 114,947,440        | 65    | 12,670          | 16               |
| 6       | 158,302,913        | 64    | 17,129          | 16               |
| 7       | 204,390,480        | 63    | 21,592          | 15               |
| 8       | 250,654,676        | 62    | 26,179          | 15               |
| 9       | 293,931,056        | 61    | 30,200          | 15               |
| 10      | 333,471,187        | 60    | 33,748          | 15               |
| 11      | 367,872,280        | 59    | 36,404          | 14               |
| 12      | 393,876,280        | 58    | 38,662          | 14               |
| 13      | 410,700,024        | 57    | 40,052          | 14               |
| 28      | 126,825,848        | 42    | 17,976          | 10               |
| 29      | 109,294,704        | 41    | 16,183          | 10               |
| 30      | 93,610,141         | 40    | 14,513          | 10               |
| 31      | 79,699,496         | 39    | 12,910          | 9                |
| 32      | 67,463,040         | 38    | 11,436          | 9                |
| 33      | 56,784,240         | 37    | 10,026          | 9                |
| 34      | 47,533,327         | 36    | 8,743           | 9                |
| 35      | 39,574,496         | 35    | 7,514           | 8                |
| 36      | 32,771,272         | 34    | 6,385           | 8                |
| 37      | 26,990,336         | 33    | 5,260           | 8                |
| 38      | 22,105,457         | 32    | 4,231           | 8                |

表 2: 円内接八角形の半径公式  $\Phi_8^{(+)}(a_i; y)$ ,  $F_8^{(+)}(s_i; y)$  の各係数

次に,  $u_0, u_1, \dots, u_{14}$  を新たな単独の変数とみて, これらの多項式の終結式を計算し, 中間結果を得る.

$$R(u_0, u_1, \dots, u_{14}, a_1, \dots, a_8; y) := \text{Res}_d(\Phi_6^{(+)}, \Phi_4^{(+)}) \quad (40)$$

次に, 各  $u_j$  に対し  $\Phi_6^{(+)}$  における元の係数  $u_j(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, y)$  を代入し,  $y$  についての多項式として整理する. この時点では, 各係数  $\bar{P}_i$  は Maple の内部表現で “作成されたまま” の状態で保持されている.

$$\bar{R}(a_1, \dots, a_8; y) = \bar{P}_{38}y^{44} + \dots + \bar{P}_0y^6 \quad (41)$$

最後に, 各係数  $\bar{P}_i$  を展開・整理することができれば, 多項式  $\Phi_8^{(+)}(a_i; y)$  が得られる. 現時点で展開計算が完了している部分は, より大きなサイズの係数  $P_{27}, \dots, P_{14}$  を除いて, 以下のとおりである.

$$\Phi_8^{(+)}(a_i; y) = P_{38}y^{38} + \dots + P_{28}y^{28} + (\bar{P}_{27}y^{27} + \dots + \bar{P}_{14}y^{14}) + P_{13}y^{13} + \dots + P_0 \quad (42)$$

各係数の形状を表 2 に示す. 全次数 (t-deg) の列については, 次節において詳述する.

各係数  $\bar{P}_i$  の展開には大きなメモリ空間が必要になるため、全体の計算を多数の小さい問題に分割する必要がある、このためより長い CPU 時間を必要とする。例えば、これまでに求めた係数のうち最長のものとして、 $\bar{P}_{28}$  の展開を 182 個のジョブに分割して、総計 371 日相当の CPU 時間 (前節の Machine B による) を要したため、残りの係数  $P_{27}, \dots, P_{14}$  を求めることは容易ではないと考えられる。

それでもなお、八角形の外接円半径公式について、いくつかの性質は明らかになってきている。例えば、主係数  $P_{38}$  は  $\prod (a_1 \pm \dots \pm a_8)$  (+記号が偶数個のもの 64 通りの積) と因数分解可能である。

各係数  $P_i$  の展開形が求めたならば、次にこれを基本対称式表現  $\tilde{P}_i$  に変換する必要がある。まず、各係数  $P_i$  において、 $a_1 \cdots a_8 = \sqrt{s_8}$  という書き換えを行い、 $\sqrt{s_8}$  の多項式として整理する。

$$P_i = h_0(a_1^2, \dots, a_8^2) + h_1(a_1^2, \dots, a_8^2)\sqrt{s_8} + \dots + h_{\ell_i}(a_1^2, \dots, a_8^2)\sqrt{s_8}^{\ell_i} \quad (43)$$

この表現では、各係数  $h_j(a_1^2, \dots, a_8^2)$  が再び  $a_1^2, \dots, a_8^2$  の対称式となる。これらを、論文 [6] に詳述した「基本対称式に関する漸化式を利用した方法」で基本対称式表現に変換する。現時点で、展開形が求まっていない係数  $\bar{P}_i$  ( $27 \geq i \geq 14$ ) を除いて、 $\tilde{P}_i$  への変換がすべて完了している (表 2)。

$$F_8^{(+)}(s_i; y) = \tilde{P}_{38}y^{38} + \dots + \tilde{P}_{28}y^{28} + (\tilde{P}_{27}y^{27} + \dots + \tilde{P}_{14}y^{14}) + \tilde{P}_{13}y^{13} + \dots + \tilde{P}_0 \quad (44)$$

例えば、定数項は以下の構造をもち、七角形の半径公式 (34) における  $s_7^{10} = \tilde{C}_0$  の拡張になっている。

$$\tilde{P}_0 = s_7^{10} + s_3s_7^9\sqrt{s_8} + \dots + (3s_1^6 - 8s_1^4s_2)\sqrt{s_8}^{16} \quad (918 \text{ 項}) \quad (45)$$

## 5.2 八角形 ( $n = 8$ ) に対する計算結果の確認

現時点で、計算が完了しているのは、外接円半径公式 (42)(44) における係数  $P_i$  および  $\tilde{P}_i$  ( $i = 0, \dots, 13, 28, \dots, 38$ ) である。これらに対し、以下の 2 通りの方法により、正当性を確かめている。

**確認 1** 七角形の外接円半径公式 (32)(34) は正しく求まっていると仮定する。このとき、八角形の公式  $P_i$  および  $\tilde{P}_i$  において、 $a_8 := 0, \sqrt{s_8} := 0$  を代入して、七角形の公式における  $C_i, \tilde{C}_i$  と比較する。

**確認 2** 終結式 (38) は、各辺長に具体的な数値が代入された状態であれば、計算は容易である。そこで  $p_j$  をランダムに選んだ素数として、 $a_j := p_j$  を代入した終結式を計算しておく。一方で、半径公式  $\Phi_8^{(+)}(a_j; y)$  の各係数  $P_i$  に  $a_j := p_j$  を代入したものを求めて比較する。

基本対称式表現  $\tilde{P}_i$  への変換プログラムが正しく動作したことは、もとの係数  $P_i$  が真に対称式であったことを間接的に示している。上記の 2 通りの確認方法と合わせ、これまでに計算が完了した部分については、正当な結果が得られており、計算の方針も正しいものと考えられる。

## 6 半径公式の形状の解析

### 定義 1

辺長の 2 乗  $a_i^2$  からなる積の全次数 ( $t$ -deg) を以下で定義する。

$$t\text{-deg} (a_1^{2m_1} a_2^{2m_2} \cdots a_n^{2m_n}) := m_1 + m_2 + \dots + m_n \quad (46)$$

この定義のもとで、 $n$  変数の基本対称式は次のような同次式の構造をもつ。

$$\begin{cases} s_1 &= a_1^2 + \cdots + a_n^2 & \text{t-deg} = 1 \text{ の同次式} \\ s_2 &= a_1^2 a_2^2 + \cdots & \text{t-deg} = 2 \text{ の同次式} \\ &\dots & \dots \\ s_{n-1} &= a_1^2 a_2^2 \cdots a_{n-1}^2 + \cdots & \text{t-deg} = n-1 \text{ の同次式} \\ s_n &= a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2 & \text{t-deg} = n \end{cases} \quad (47)$$

以上に加え、 $n$  が偶数の場合には、 $\sqrt{s_n} = a_1 a_2 \cdots a_n$  の全次数を  $\text{t-deg}(\sqrt{s_n}) = n/2$  で定義する。これらによれば、基本対称式表現の場合の全次数は以下のように求められる。

$$\text{t-deg}(s_1^{m_1} s_2^{m_2} \cdots s_n^{m_n}) = m_1 + 2m_2 + \cdots + nm_n \quad (48)$$

最初に、三角形の場合の公式 (3) における  $\Phi_3(a_1, a_2, a_3; y)$  の全次数の分布は以下のとおりである。

- 定数項は  $a_1^2 a_2^2 a_3^2$  であり  $\text{t-deg} = 3$
- $y(= R^2)$  の係数は  $a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 - 2(a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2)$  であり、これは  $\text{t-deg} = 2$  の同次式

同様の関係は、式 (4) における基本対称式表現の  $F_3(s_1, s_2, s_3; y)$  でも成り立ち、 $\text{t-deg}(s_3) = 3$  および  $\text{t-deg}(s_1^2 - 4s_2) = 2$  が読み取れる。さらに、円内接四角形の半径公式 (6)(7) における  $\Phi_4^{(+)}(a_i; y), F_4^{(+)}(s_i; y)$  の全次数は、 $\text{t-deg}(\sqrt{s_4}) = \text{t-deg}(a_1 a_2 a_3 a_4) = 2$  であることから、 $n = 3$  と  $n = 4$  の場合をひとつにまとめた公式 (11) が成り立っていることが確認できる。

| $y$ の次数 | $\Phi_6^{(+)}$ の項数 | t-deg | $F_6^{(+)}$ の項数 | $\sqrt{s_6}$ の次数 |
|---------|--------------------|-------|-----------------|------------------|
| 0       | 533                | 15    | 12              | 5                |
| 1       | 1,632              | 14    | 23              | 4                |
| 2       | 2,688              | 13    | 33              | 4                |
| 3       | 3,597              | 12    | 37              | 4                |
| 4       | 3,888              | 11    | 36              | 3                |
| 5       | 3,234              | 10    | 33              | 3                |
| 6       | 2,338              | 9     | 29              | 3                |
| 7       | 1,539              | 8     | 21              | 2                |

表 3: 円内接六角形の半径公式  $\Phi_6^{(+)}(a_i; y), F_6^{(+)}(s_i; y)$  の各係数

次に、円内接六角形の半径公式 (19)(21) における  $\Phi_6^{(+)}(a_i; y), F_6^{(+)}(s_i; y)$  の全次数を調べる。このとき、 $\text{t-deg}(\sqrt{s_6}) = \text{t-deg}(a_1 \cdots a_6) = 3$  に注意して、 $\text{t-deg}$  の分布は表 3 に示したようになる。さらに、円内接五角形の半径公式 (12)(15) における多項式  $\Phi_5(a_i; y), F_5(s_i; y)$  の次数分布も全く同一になる。

最後に、円内接八角形の半径公式 (42)(44) における  $\Phi_8^{(+)}(a_i; y), F_8^{(+)}(a_i; y)$  の全次数を調べる。各係数の項数および全次数 (t-deg) を表 2 に示した。

次数の分布は規則的なので、展開形が未計算の係数  $\tilde{P}_i$  ( $i = 14, \dots, 27$ ) の形状を事前に予想することが可能である。例えば、 $\tilde{P}_{20}$  は  $\text{t-deg} = 50$ ,  $\sqrt{s_8}$  について 12 次となり、次の形で表されると予想される。

$$\tilde{P}_{20} = u_0(s_1, \dots, s_7) + u_1(s_1, \dots, s_7)\sqrt{s_8} + \cdots + u_{12}(s_1, \dots, s_7)\sqrt{s_8}^{12} \quad (49)$$

ここで、 $u_j$  は、 $\text{t-deg}(u_j) = 50 - 4j$  ( $j = 0, \dots, 12$ ) をみたすような同次式である。特に、 $u_0(s_1, \dots, s_7)$  は、七角形の半径公式 (34) における  $F_7(s_i; y)$  の中の係数  $\tilde{C}_{20}$  と一致しているはずである。

## 7 まとめと今後の課題

本稿では、円内接多角形の外接円半径の計算に関して、以前の論文 [3] 以降の進展を要約して示した。(部分的な成果は、2015 年の研究会報告 [6] でも執筆済みである。)

- (1) 六角形・七角形の場合の計算アルゴリズムが大きく改善された。
- (2) 八角形の半径公式の計算の現状を報告した。39 個の係数のうち 25 個は計算できているが、残りの多項式  $\tilde{P}_i$  ( $i = 14, \dots, 27$ ) は、そのサイズの問題により、展開・整理が極めて困難と予想される。
- (3) 三角形から八角形の半径公式の形状を、全次数の分布から解析し、規則性を見出した。

八角形に対する半径公式の計算は未完であるが、形状の規則性を見出せたことは有意義な知見である。結果として、八角形の半径公式における未計算の係数の形状が、例えば式 (49) のように予想できるようになった。今後の研究では、この知識を用いて、数値補間などによる新たなアプローチの可能性を検討したい。

## 参 考 文 献

- [1] Fedorchuk, M. and Pak, I.: Rigidity and Polynomial Invariants of Convex Polytopes, *Duke Math. J.*, **129**(2), 2005, 371–404.
- [2] Maley, F. M., Robbins, D. P., and Roskies, J.: On the Areas of Cyclic and Semicyclic Polygons, *Advances in Applied Mathematics*, **34**(4), 2005, 669–689.
- [3] Moritsugu, S.: Computing Explicit Formulae for the Radius of Cyclic Hexagons and Heptagons, *Bulletin of Japan Soc. Symbolic and Algebraic Computation*, **18**(1), 2011, 3–9.
- [4] 森継修一: 円内接多角形問題と「算法發揮 (1690)」における解について, 京都大学数理解析研究所講究録, **1815**, 2012, 124–132.
- [5] Moritsugu, S.: Integrated Circumradius and Area Formulae for Cyclic Pentagons and Hexagons, *ADG 2014* (Botana, F. and Quaresma, P., eds.), *LNAI*, **9201**, Springer, 2015, 94–107.
- [6] 森継修一: 円内接多角形問題について—半径公式再論, 京都大学数理解析研究所講究録, **2054**, 2017, 153–161.
- [7] Moritsugu, S.: Computation and Analysis of Explicit Formulae for the Circumradius of Cyclic Polygons, (submitted), 2017.
- [8] Pak, I.: The Area of Cyclic Polygons: Recent Progress on Robbins' Conjecture, *Advances in Applied Mathematics*, **34**(4), 2005, 690–696.
- [9] Pech, P.: Computations of the Area and Radius of Cyclic Polygons Given by the Lengths of Sides, *ADG2004* (Hong, H. and Wang, D., eds.), *LNAI*, **3763**, Gainesville, Springer, 2006, 44–58.
- [10] Robbins, D. P.: Areas of Polygons Inscribed in a Circle, *Discrete & Computational Geometry*, **12**(1), 1994, 223–236.
- [11] Svrtan, D., Veljan, D., and Volenec, V.: Geometry of Pentagons: from Gauss to Robbins, arXiv:math.MG/0403503 v1, 2004.
- [12] Varfolomeev, V. V.: Inscribed Polygons and Heron Polynomials, *Sbornik: Mathematics*, **194**(3), 2003, 311–331.