

Kronecker Approximation Theorem employing Mathematica

日本大学・理工学部 平田典子, 石井夕紀子, 栗本裕太, 島脇章平, 鈴木潔光

日本大学・豊山女子中学校高等学校 鷺尾勇介

N. Hirata-Kohno, Y. Ishii, Y. Kurimoto, S. Shimawaki,

K. Suzuki (Nihon Univ.), Y. Washio (Buzan-J. H. S., Nihon Univ.)

1 はじめに

本稿の目的は、与えられた実数が無理数か否かを判定するために資する ICT 教材の考察である。数学の研究においては予想を的確に立てるための実験が重要な場合が多いが、そのために Mathematica を用いようと言う訳である。

ビリヤード問題という、数の分布に関する問題がある。次ページの図 1 のように、平面の単位正方形をビリヤード板に見立て、1 点を始点として球を打ったときに、正方形の辺で球が反射する軌跡の和集合の形状と、球を打ったときの最初の「入射光線」に相当する直線の傾きが有理数か無理数かという数論的性質の関連を論じた問題である。球が始点にふたたび戻るときは周期的、そうではないときに非周期的と呼ぶことにする。入射光線の傾きが有理数ならば、図 1 のように単位正方形の中で周期的になり、逆も成立することが分かるので、両者は同値であることになる。従って対偶を取れば、入射光線の傾きが無理数であることと、単位正方形において球の軌跡の和集合が非周期的であることが同値となる。実際にはもっと強いことが証明され、その主張は以下の L. Kronecker の定理 [5][7][8] となる。すなわち非周期的であることと稠密であることまでが同値になるのである。

2 入射光線の傾きが無理数ならば球跡が稠密になること

まず記号を導入しよう。 ϑ, φ および $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m$ は全て実数とする。

Definition

$\lfloor \vartheta \rfloor :=$ the greatest integer $\leq \vartheta$ (最大整数部分)

$\{ \vartheta \} := \vartheta - \lfloor \vartheta \rfloor$ fractional part of ϑ (小数部分)

Theorem 1 (Kronecker: 一般の m 次元版) $1, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m$ が \mathbb{Q} 上で一次独立 \iff 点 $((n\vartheta_1), \dots, (n\vartheta_m)) \in \mathbb{R}^m$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は \mathbb{R}^m 内の単位立方体内で稠密 (*dense*) .

球の軌跡が周期的でないことと、「稠密」つまり球の軌跡が正方形内でぎっしりつまる事実の間にはギャップがある。「実数=有理数の完備化」からは従わないので、証明を要する。まずは Kronecker の定理の 2 次元版を述べ直そう。

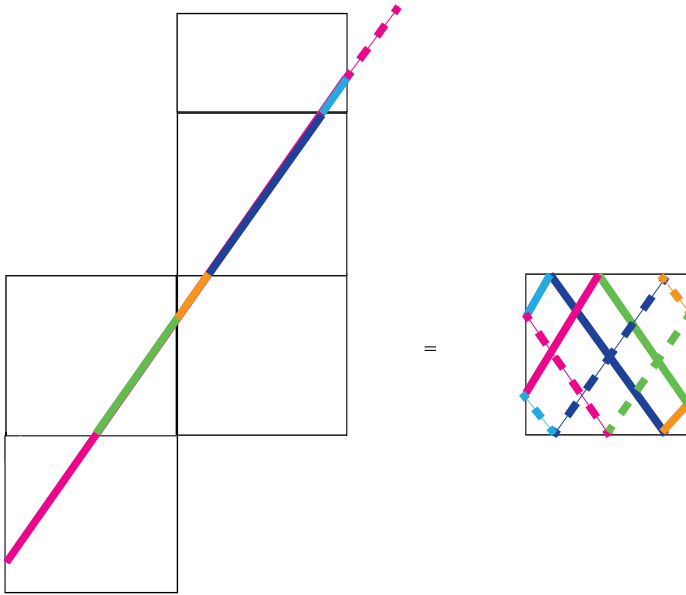


図 1: 球跡が周期的 \iff 傾き有理数

稠密 (dense) の定義を含めて書くと、以下のように 2次元版を記述することができる。

Theorem 2 (Kronecker: 2次元版) $1, \vartheta, \varphi$ が \mathbb{Q} 上で一次独立

$\iff \forall \varepsilon > 0, \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ ($0 \leq \alpha_1 < 1, 0 \leq \alpha_2 < 1$) に対して $\exists n \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$\begin{cases} |\alpha_1 - (n\vartheta)| < \varepsilon, \\ |\alpha_2 - (n\varphi)| < \varepsilon. \end{cases}$$

注意 \Leftarrow は対偶を示せば良いので、簡単である。

2次元版 Kronecker の定理の証明

連分数, 数の幾何学, 一様分布論, フーリエ解析, 線形代数学など多様な証明が知られている。平面の場合は幾何学的に理解されやすい [1][2][4][6]。

以下 [5][7] にある証明を紹介する。 \Leftarrow は簡単なので \Rightarrow のみ証明する。

Proof : $0 < \vartheta, \varphi < 1$ と仮定してよい。 \mathbb{Z} 上一次独立と \mathbb{Q} 上一次独立は同値である。

さて集合 $(P_n) := \{P_n \in \mathbb{R}^2 | P_n = ((n\vartheta), (n\varphi)), n \in \mathbb{N}\}$ が単位正方形で稠密であることを示す。点 P_n について考えると以下のことがわかる。

(1) どの P_n も一致しない.

$\because n \neq m$ に対して P_n, P_m が一致するならば $(n\vartheta) = (m\vartheta)$ となるので $n\vartheta - m\vartheta = l$ を満たす $l \in \mathbb{Z}$ が存在する.

$\vartheta = \frac{l}{n-m} \in \mathbb{Q}$ となるが ϑ は 1 と一次独立なので $\vartheta \notin \mathbb{Q}$ となり矛盾する.

(2) どの P_n も単位正方形の辺上にはない.

$\because 1, \vartheta, \varphi$ は \mathbb{Z} 上一次独立より $n\vartheta, n\varphi \notin \mathbb{Z}$. 従って $(n\vartheta), (n\varphi) \neq 0$ となるので P_n は単位正方形の辺上にはない.

(3) 有向線分 $P_n P_{n+r}$ ($n, r \in \mathbb{N}$) を考える. 任意の点 P_m に対し, 有向線分 $P_m Q$ が $P_n P_{n+r}$ に等しくなるように Q をとると, 点 Q は点 P_{m+r} と一致する.

\because 有向線分 $P_n P_{n+r}$ の成分は $((n+r)\vartheta) - (n\vartheta), ((n+r)\varphi) - (n\varphi)$ であり, 有向線分 $P_m Q$ の成分は Q の座標を (q_1, q_2) ($0 \leq q_1, q_2 \leq 1$) とするとき $(q_1 - (m\vartheta), q_2 - (m\varphi))$ となる. 従って x 成分を考えると

$$q_1 - (m\vartheta) = ((n+r)\vartheta) - (n\vartheta) \Leftrightarrow$$

$$q_1 - ((m+r)\vartheta) = [(m+r)\vartheta] - [m\vartheta] - [(n+r)\vartheta] + [n\vartheta].$$

$(m+r)\vartheta \notin \mathbb{Z}$ より $0 < ((m+r)\vartheta) < 1$ となること, 及び

$[(m+r)\vartheta] - [m\vartheta] - [(n+r)\vartheta] + [n\vartheta] \in \mathbb{Z}$ から

$$q_1 - ((m+r)\vartheta) = 0$$

となる. 従って $q_1 = ((m+r)\vartheta)$.

y 成分についても同様に $q_2 = ((m+r)\varphi)$.

以上から $Q = (((m+r)\vartheta), ((m+r)\varphi)) = P_{m+r}$ が従う.

(4) 有向線分 $P_m Q$ が途中で正方形の辺に交わる場合, 正方形の対辺の対応する点から同じ方向に続けて点 Q をとることにする.

(5) (1) より (P_n) の点は全て異なる. 点列 $\{P_n\}$ を考える. $\{P_n\}$ の点は全て単位正方形の内部に存在しているので $\{P_n\}$ は収束する部分列をもつ. その収束部分列を $\{P'_n\}$ とおく.

任意の正数 ϵ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n, m \geq N$ ならば, $|P'_n - P'_m| < \epsilon$ が成立. 従って有向線分 $P'_m P'_n$ の長さは ϵ より短い.

ここで $m = N$ と固定する. $n = N + r \geq N$ を満たす有向線分 $P'_N P'_n$ の長さは ϵ より短い. 従ってこの有向線分 $P'_N P'_n = P'_N P'_{N+r}$ の終点は集合 (P_n) 内に存在する.

(6) 次に, 任意の P_n に対しても同様の結論が成立することを示す. すなわち, 任意の $P_n \in$ 集合 (P_n) と任意の正数 ϵ に対して $P_n P_{n+r}$ の長さが ϵ より小さい P_{n+r} が存在するが, その理由は $P'_N P'_{N+r}$ と同じ有向線分 $P_n P_{n+r}$ の存在が (3) で保証されているからである.

(6)から、とくに P_1 を始点とするような有向線分 P_1P_{1+r} で長さが ϵ より小さいものが存在するので $\epsilon < \min\{\vartheta, \varphi, 1 - \vartheta, 1 - \varphi\}$ と取れば、 P_1 から出る P_1P_{1+r} は単位正方形の辺上を通らず、単位正方形の辺にぶつからない。

(ア) 平行ではない2つの有向線分で長さ $< \epsilon$ となるものが存在する場合は (3), (4) から P_1 を始点として P_1 を始点とした有向線分の2つの終点を基に格子を作ることができる。単位正方形の任意の点 P はある格子点 P_k から ϵ より小さい距離にある。従って P の ϵ 近傍に少なくとも P_k は含まれていることになり、主張が成り立つ。

(イ) (ア) ではない場合、つまり有向線分で長さ $< \epsilon$ となるものが全て平行ならば P_1 から出る有向線分で長さ $< \epsilon$ となるものは一直線上。この直線には任意に大きい添え字 r, s をもつ点 P_r, P_s が存在することになるが、 P_1, P_r, P_s は一直線上にあるので

$$0 = \begin{vmatrix} \vartheta & \varphi & 1 \\ (r\vartheta) & (r\varphi) & 1 \\ (s\vartheta) & (s\varphi) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vartheta & \varphi & 1 \\ r\vartheta - [r\vartheta] & r\varphi - [r\varphi] & 1 \\ s\vartheta - [s\vartheta] & s\varphi - [s\varphi] & 1 \end{vmatrix}$$

従って

$$\begin{vmatrix} \vartheta & \varphi & 1 \\ [r\vartheta] & [r\varphi] & r-1 \\ [s\vartheta] & [s\varphi] & s-1 \end{vmatrix} = 0.$$

この行列式を展開すると

$$\vartheta \begin{vmatrix} [r\varphi] & r-1 \\ [s\varphi] & s-1 \end{vmatrix} - \varphi \begin{vmatrix} [r\vartheta] & r-1 \\ [s\vartheta] & s-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} [r\vartheta] & [r\varphi] \\ [s\vartheta] & [s\varphi] \end{vmatrix} = 0$$

となる。しかし $1, \vartheta, \varphi$ は一次独立なので

$$\begin{vmatrix} [r\varphi] & r-1 \\ [s\varphi] & s-1 \end{vmatrix} = 0.$$

すなわち

$$\frac{[s\varphi]}{s-1} = \frac{[r\varphi]}{r-1}$$

である。任意に大きい s に対して P_s が存在するから $s \rightarrow \infty$ とするとき

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{[s\varphi]}{s-1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s\varphi - (s\varphi)}{s-1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{s\varphi}{s-1} - \frac{(s\varphi)}{s-1} \right) = \varphi$$

となる。従って

$$\varphi = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{[s\varphi]}{s-1} = \frac{[r\varphi]}{r-1}$$

が得られる。しかしながら、仮定より φ は無理数であるので (イ) は矛盾。

以上から (ア) のみ起こりうる。従って定理が成立。 \square

3 入射光線の傾きが無理数のときの球跡図

本稿の目的は、球跡の図示から入射光線の傾きの数論的性質を予想することであった。ここで各無理数に対して Mathematica で描いた球跡を紹介する。Kronecker の定理で 3 次元に相当する場合も図示してみよう。以下 4 つのケースを考える。

(2A) 2次元の場合: 入射光線の傾き $= \frac{5}{8} \in \mathbb{Q} \implies$ 球跡は周期的。

(2B) 2次元の場合: 入射光線の傾き $= \frac{1}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q} \implies$ 球跡は稠密。

(3A) 3次元の場合: $\vartheta = \frac{1}{\sqrt{5}} \notin \mathbb{Q}$, $\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}} \notin \mathbb{Q}$ であるが ϑ と φ の比 $= \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

\implies 2次元の2枚の平面では球跡は稠密であるが、3次元空間では、稠密にならない。

(3B) 3次元の場合: $\vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$, $\varphi = \log 2 \notin \mathbb{Q}$ かつ $= \frac{\log 2}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$

\implies 球跡は3次元でも稠密。

以下の図をご覧ください。赤い点がビリヤード球である。特に (3A) が面白い。

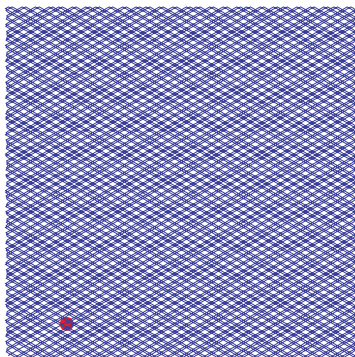


図 2: 2A の図

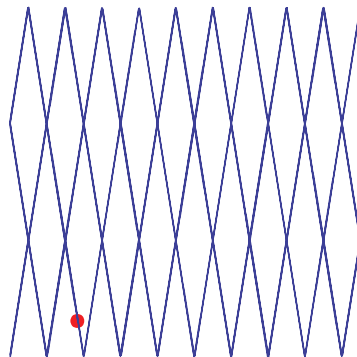


図 3: 2B の図

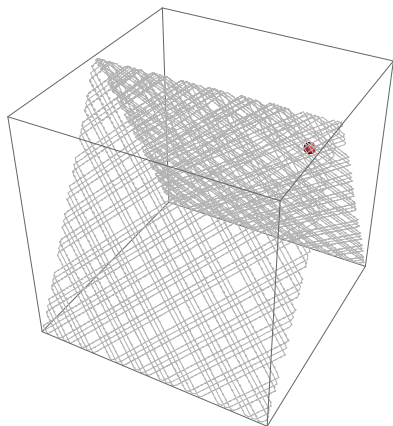


図 4: 3A の図

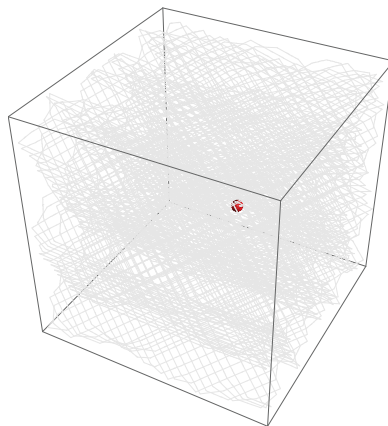


図 5: 3B の図

著者の願望はリーマンゼータ関数の値の無理数性、及び超幾何級数で突然に値が有理数になる場合を発見することにこれらの図を用いることである。夢は尽きない。

参考文献

- [1] H. Bohr, Again the Kronecker Theorem, *Jornal London Math. Soc.*, Vol.9, (1934), 5-6.
- [2] H. Bohr and R. J. Jessen, One More Proof of Kronecker's Theorem, *Journal London Math. Soc.*, Vol.7, (1932), 274-275.
- [3] J. W. S. Cassels, *An Introduction to Diophantine approximation*, 1957, Cambridge Tracts in Math., Vol.45, Cambridge University Press.
- [4] T. Estermann, A Proof of Kronecker's Theorem by Induction, *Journal London Math. Soc.*, Vol.8, (1933), 18-20.
- [5] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers, Fifth Edition*, 1979, Oxford University Press.
- [6] F. Lettenmeyer, Neuer Beweis des allgemeinen Kroneckerschen Approximationssatzes, *Proc. London Math. Soc.* (2), 21, (1923), 306-314.
- [7] I. Niven, *Diophantine Approximations : Interscience Tract in Pure and Applied Mathematics* : Vol.14, 1963, Interscience, New York.
- [8] I. Niven, H. S. Zuckerman and H. L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Willey, 5th edition, 1991.

Noriko Hirata-Kohno (平田典子) ,
 Department of Mathematics;
 College of Science & Technology
 Nihon University
 Kanda, Chiyoda, Tokyo
 101-8308, Japan
 hirata@math.cst.nihon-u.ac.jp

Yukiko Ishii (石井夕紀子) ,
 Yuta Kurimoto (栗本裕太) ,
 Shohei Shimawaki (島脇章平) ,
 Department of Mathematics;
 Kiyomitsu Suzuki (鈴木潔光) ,
 Department of Physics;

& Yusuke Washio (鷲尾勇介) ,
 Buzan-joshi High School;
 Nihon University
 Nakadai 3-15, Itabashi, Tokyo
 174-0064, Japan.

College of Science & Technology
 Nihon University
 Kanda, Chiyoda, Tokyo
 101-8308, Japan