

PointLine : 作図手順の概念のない作図ソフトウェアの提案

PointLine : a proposal of dynamical geometry software without construction procedure

明治大学・総合数理学部 阿原 一志

Kazushi Ahara, School of Interdisciplinary Mathematical Sciences, Meiji University

概要 : PointLine は明治大学先端メディアサイエンス学科阿原研究室で開発された動的幾何ソフトウェアであり、作図手順から解放された世界初の作図ソフトウェアである。PointLine は中等教育における幾何学教育の教材作成ツールとしての応用が期待される。

Abstract : PointLine is a brand new dynamical geometry software in the world. This was developed by the author and it allows us to draw geometric constructions without construction procedure. We introduce the unique features of PointLine and discuss usages of this program in mathematics classrooms.

1 はじめに

一般に、動的幾何ソフトウェア (Dynamic geometry software, DGS) とは、ユーザーがコンピュータの画面上に平面幾何学 (または立体幾何学) の作図を行い、作図を行った後に点を動かすなどして図を変形することができるソフトウェアのことをいう。動的幾何ソフトウェアによって描画された幾何学的な図は単に画面上に描かれた絵というだけではなく、作図の手順も含めてソフトウェアの中で管理されていることが主な特徴である。動的幾何ソフトウェアとして有名なものは Cinderella[2] や GeoGebra[3] である。これらは図を作成するためのツールとしてのみならず、初等教育・中等教育における幾何学教育のツールとしての役割が期待されており、教育の分野でも多くの研究が行われている。実際、学習する上で図を取り扱うことが必須である幾何学において、コンピュータなどの情報機器を用いてインタラクティブ (双方向的) に扱えるソフトウェアは効果的な教材作成ツールとして広い可能性を持っていると考えられている。

従来の動的幾何ソフトウェアには作図手順と呼ばれる概念がある。最も簡単な例として、2点の midpoint の作図を考えよう。最初に2点 A, B が与えられており、第3の点 C が2点 A, B の midpoint であるように作図されているものとする。このとき、GeoGebra などの従来のソフトウェアでは点 C は点 A, B に従属して決定するように設計されている。つまり、作図後に点を動かす機能によって、点 A, B は自由に与えられた点としてマウスドラッグによって2次元的に移動することが可能であり、点 C は2点 A, B の座標に依存してその位置が決定する点として、マウスドラッグによる移動を受け付けなくなっている。この性質は作図手順という概念がプログラムの中に構成されていることに

起因している。実際、プログラムの中では幾何要素（点・直線・円などのこと）の依存関係を作図手順が決めているのである。

本稿で紹介する PointLine というソフトウェアにおいては、作図手順の概念がプログラムに含まれない。上の例でいえば、PointLine において、最初に 2 点 A, B が与えられており第 3 の点 C が 2 点 A, B の中点であるように作図されている場合、点 C は点 A, B から依存するのではなく、点 C が 2 点 A, B の中点であるという相互関係により 3 点 A, B, C が関係づけられているのである。このことから、PointLine においては点 C をもマウスドラッグにより移動させることが可能であり、点 C を移動させることにより、点 A, B も適切に移動するのである。

このことから、PointLine を用いて、従来の動的幾何ソフトウェアと同じようにコンパスと定規による作図手順を含むような作図を作成することができるだけでなく、一度作成した図に後から条件を追加できたり、コンパスと定規による作図方法がわからないような図についても、その構成条件のみから図を作成することが可能である。

本稿は以下のように構成されている。2 章ではプログラム PointLine の概要について説明している。3 章では PointLine の特性を論じている。4 章では、これからの研究の方向性について論じている。

本ソフトウェアの開発は著者が単独で行ったが、明治大学先端メディアサイエンス学科宮下芳明研究室が主催する「ABPRO18（＝人を驚かせ人を幸せにするプログラムの発表会）」での出品を目指して試行錯誤しているうちに発想を得た。著者は宮下氏に深く感謝の意を表す。

2 PointLine の概要

2.1 プログラムの構成要素

この節では、ソフトウェア PointLine の主たる構成要素について説明する。PointLine は大きく分けて「幾何要素」と「作図要素（モジュール）」により構成される。このことは一般の動的幾何ソフトウェアと変わらない。幾何要素とは、点、直線、円など、画面に現れる図形を形作るひとつひとつのことをいう。作図要素とは「2 点を結ぶ線分」「2 直線の交点」「円と直線の交点」などのように、幾何要素の間の関係性を表すもののことをいう。

幾何要素については従来の動的幾何ソフトウェアと同じものと考えられる。その一方で作図要素を従来のものと大きく異なるものとして設計した。作図要素は幾何要素の間の関係性を表すと説明したが、ここでは「入力」と「出力」の区別がはっきりしているのが従来の考え方である。例えば「2 直線の交点」を例に考えてみると、2 つの直線が「入力」であり、交点が「出力」に当たる。交点は 2 直線が与えられて初めて位置が決まるものであり、この意味において交点は 2 直線に従属しているということもできる。

PointLine においては、たとえば 2 直線の交点を作図するときにも、2 直線と交点の間に従属関係はないものとして計算する。つまり、作図要素「2 直線の交点」の要求を満たすように 2 直線と交点の両方を動かすのである。喩えていうならば、幾何要素（ここ

では2つの直線と1つの点)のそれぞれが知能を持っているように動き、2直線も点も「点が2直線の交点の位置になる」ように自律的に動くのである。

2.2 GeoGebraなどの従来の動的幾何ソフトとウエアとの違い

従来の動的幾何ソフトウェアでは作図要素(モジュール)は、すべての幾何要素を「独立要素」と「従属要素」に分類する。例えば線分ABの中点をCとしよう。点Cは「2点の中点」という作図要素により、点Aや点Bに従属している。したがって点Cは従属要素である。点Aや点Bもほかの幾何要素から従属しているかもしれない。まとめると、従属要素とは、ある作図要素があって、その出力となっているようなものを指すこととする。つまり、ほかの幾何要素の座標から従属的に自分の座標が決まるような幾何要素のことである。

これに対し、どの作図要素の出力にもなっていないような幾何要素のことを独立要素と呼ぶことにする。独立要素は作図の形を決めることができるパラメータのような位置づけであり、従来の動的幾何ソフトウェアにおいては、マウスドラッグの対象となるものである。マウスドラッグによってユーザは独立要素を(2次元的に)自由な位置に置くことが許されている。

通常の動的幾何ソフトウェアには独立要素と従属要素の中間に位置するような「制限を受ける要素」という幾何要素もある。例えば「直線上にある点」「円周上にある点」はそのよい例である。たとえば後者の場合、円が入力であり点が出力である。点は円周の上を自由に動かすることができるが、円周からはみ出すことは許されない。つまり、この点はマウスドラッグによって動かすことは可能であるが、完全に自由な位置へと移動できるわけではないのである。本稿においては、このような「制限を受ける要素」は、2次元的に自由に動かすことができないという意味において従属要素に分類することとする。

PointLineにおいて、すべての幾何要素は独立要素として位置づけられている。操作性やユーザインターフェイスの都合により、実際に自由に動かすことができるのは点に限られるが、ユーザはあらゆる点を2次元的に自由に動かすことが許される。ここでだれもが素朴な疑問を思いつくことだろう。幾何の作図は、点や直線や円が複雑に相互に関係を持ち合っている。上のような方法で図が完成するのだろうか。このことを数学的に言い直すと、マウスドラッグによって特定の点の座標が変更されたときに、すべての点の座標や直線の方程式の係数などが作図要素の要請を満たすようにプログラム内で連立方程式を立て、その解を求めることができるのかという問いである。このことを直接に行おうとするならば、多変数の多項式を含むような連立方程式をプログラム内で解くことが必要であり、解法には高度な数学が必要である。PointLineではそのようなことは行わない。

ではどのようにするのかというと、PointLineでは、作図要素の要請を満たすように点や直線を「少しずつ」動かすことにより、図全体がすべての作図要素の要請を「同時に」しかし「だんだんと」満たすように動かす。ユーザにはこの経過が感じられるわけではない。ユーザは「だんだんと満たすように動かした後に最終的な形になったもの」を見るだけである。これは「作図要素の要請を満たすような連立方程式」を差分方程式

で近似的に解決することに相当する。この説明で一応の解決を見ることができ、さらなる疑問として、いついかなる場合にもこのような近似的な解法により図形は収束するのかという数学的な問いは残ることになる。この点について著者は決定論的な結論を持っているわけではない。実際に PointLine を扱ってみると、ほとんどの場合に図は崩れることなく収束するので、実用上は問題にならないという認識を持っている。

例えば、線分 AB の中点を C とするような作図（ここではもはやどのような方法による作図でも構わない）において、C をマウスドラッグによって移動することが可能である。プログラムの内部では、移動された点 C の座標に基づいて、作図全体に整合性が保たれるように図全体が微動をつづけ、そして点 C がマウスの位置にあるような図へと収束する。（この収束の過程は一瞬で行われ、ユーザには示されない。）このことから、ユーザには、点 C をマウスドラッグにより動かすとそれに従ってほかの点が連動して動くように観察されるのである。

このことは制限を受ける要素である幾何要素についても同じことが言える。「直線上にある点」を題材とし、点 C が線分 AB の上にあるものとする。従来の動的幾何ソフトウェアにおいては、点 C をマウスドラッグすることにより固定された線分 AB の上を点 C が動くことが観察される。一方で PointLine においては点 C はマウスドラッグにより 2 次元的に自由に動かすことが可能である。点 C が線分 AB から脱出しようと動いたとしても線分 AB 自身が移動して「点 C は AB 上にある」という状態を保とうとするのである。

まとめると以下のようなことになる。PointLine では、作図手順に由来する従属という概念がなく、作図要素は幾何要素たちの関係性を保証するためだけに存在しており、幾何要素はすべて「独立なもの」として取り扱われる。従来のソフトウェアでは作図に従属する幾何要素をマウスドラッグにより動かすことは許されないが、PointLine においては従属関係がないので、作図後にどの点も自由に動かすことが可能である。

3 PointLine の特性

3.1 あとから図形の条件を追加できる

PointLine では、幾何要素「点」「直線（線分）」「円」たちを画面上に作図した後に「2つの線分が直交する」「円と直線が接する」などの条件を追加することが可能である。前章で述べたように、本ソフトウェアにおいて、作図要素（モジュール）は幾何要素たちの関係性を要請するものである。このことから、すでに作図が出来上がったものに、さらに作図要素を追加することは自由に行える。例えば三角形に円が外接している図を考えよう。PointLine では、この図を作成したのちに、三角形の角のうちの一つを直角に設定することが可能である。直角三角形の外接円の中心（つまり外心）は斜辺の中点になることは誰でも知っているが、このことを次の手順で確認することができる。最初に一般の三角形と外接円を描き、外接円の中心は三角形の辺上に来ないことを確かめる。そのうえで、「2直線を直交させる」というボタンを用いて、三角形の角の一つを直角にするという作業ののちに外心が斜辺の辺上にあることを観察するのである。

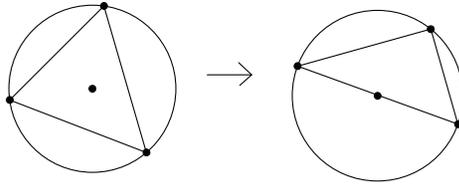


図 3.1 三角形と外接円の作図をしたのちに、三角形を直角三角形にする

もう一つ例を挙げよう。三角形の内接円を描こうとするならば、三角形をまず描いたのちに内角の二等分線を描画し、それらの交点（これが内心である）を中心として辺に接するような円を描く方法と、最初に円を描き、その円に接するような三本の直線を描き、その直線たちが構成するような三角形を描画するという二つの方法が考えられる。前者は内心に関する定理の知識を前提としており、後者は「内接円から三角形を描く」という、思考の流れと逆行するような手順である。

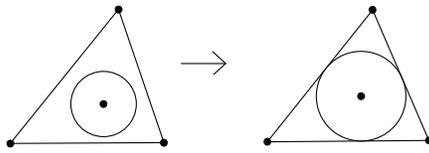


図 3-2 円を描いて、後から内接させる。

PointLine ではこの 2 つのいずれでもないやり方による作図方法が可能である (図 3-2)。つまり「内心に関する定理の知識を前提とせず」「三角形から内接円の順で図を描画する」ことができるのである。実際に、最初に三角形を描画し、そののちに自由に円を描き、「円を直線に接するようにする」というボタンを用いて円が三角形の各辺と接するように設定すればよいのである。この作図法の教育的効果については別の稿で議論する計画である。

3.2 作図手順がわからないような図形の作図が可能になる

動的幾何ソフトウェアはコンパスと定規による作図がその原点であり、コンパスと定規で行える作図はすべて動的幾何ソフトウェアにおいても作画可能であることはわかる。しかし、作図が容易であるか困難であるかは、「作図問題」という別ジャンルの問題に依存しており、「作図の難しいものを易しく描画できる」という観点からの設計はなされていない。(似た機能として、「頻出する作図のショートカットを作ることができる」がある。) 例えば、与えられた 3 つの円の全てに外接するような円を作図することは、作図についての知識が必要であり容易ではない。このことは GeoGebra による作図が容易でないことも意味している。しかし、PointLine では、未知の円を一つ描画し、これらが与えられた 3 つの円と外接することを指定するだけで、望んだ図を得ることができる (図 3-3)。

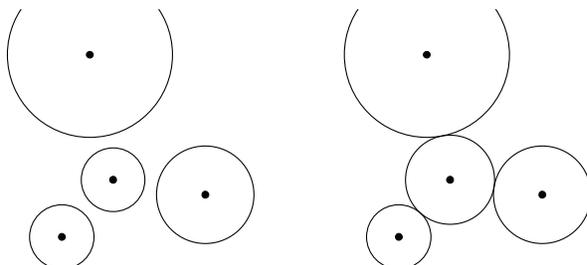


図 3-3：与えられた 3 つの円に外接する円。

最初は任意に与え（左）、そののち外接するように作図要素を追加する（右）。

次の例を挙げよう。図 3-4(左) を描画したい場合に、どのような手順で作図すればよいであろうか。ただしここで、三角形 ABC は任意に与えられるものとし、点 P は線分 AR の中点、点 Q は線分 CP の中点、点 R は線分 BQ の中点であるとする。PointLine を用いた作図では、（やや発想の転換が必要ではあるものの、）この図を直感的な操作によって構成することが可能である。

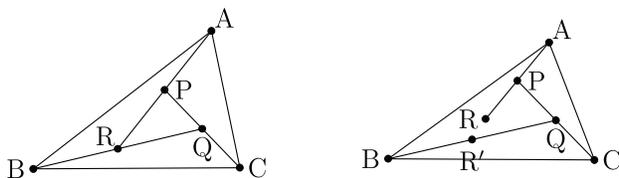


図 3-4：描きたい図（左）、そのための準備（右）。

実際に次のようにすればよい。三角形 ABC を最初に描画する。次に三角形の内側に点 R を取る。これは自由な点でよい。そのうえで、点 P は線分 AR の中点、点 Q は線分 CP の中点、点 R' は線分 BQ の中点であるとする（図 3-4(右)）。このようにすると R と R' とは異なる点になってしまうが、そこで「点に点を載せる」という機能を用いて R と R' とを重ねてしまう。こうすることによって求める作図が得られる。

3.3 TeX へのファイル出力

作図の保存・読み込みができるようになっている。そのうえで、挿絵作成のツールとして利用できるように、PointLine で作図した図形を Tikz ファイルで保存することができるようにした。このことから、図を TeX 原稿の中の挿絵として用いることができる。このことに学術的な意味はないが、ユーザの便宜を図ってこのようにした。本稿の挿絵もこのようにして得られた図である。

4 これからの研究の方向性

実用的な動的幾何ソフトウェアは多数発表されている現代において、PointLine は作図手順を排するという特徴を持つインタラクティブな作図ソフトウェアとして開発され

た。この状況から考えても、PointLine は発展途上で研究中のソフトウェアであるということが出来る。ソフトウェアのこのコンセプトは作図ソフトウェアにどのような効果をもたすのか、教育用ソフトウェアとしてどのような可能性を持つのか、現状の動的幾何ソフトウェアで同じような効果を出すことが可能なのか、研究課題は多数考えられる。その中からいくつかポイントを絞って考察を行ってみたい。

4.1 教育的な応用

PointLine の教育的利用については、これから調査研究を進めるつもりではあるが、典型的な例の一つ挙げることにする。

「飯島問題」と呼ばれる問題を取り上げて論じてみよう [4]。まず飯島問題とはどのような問題であるかを説明する。平面上の 4 角形 ABCD があり、辺 AB, BC, CD, DA のそれぞれの中点を P, Q, R, S であるとする。このとき、四角形 PQRS はいつでも平行四辺形になる。飯島氏はこの図を氏の作図ソフトである GC[5] を用いてタブレット端末上に作図し、タブレット端末ごと生徒（のグループ）に自由にさせる。そのなかで「PQRS はなぜ平行四辺形になるか」「ABCD がひし形だと PQRS はどのような形になるか」「PQRS が長方形になるための条件はなにか」など様々な問いを生徒たちに投げかけて、タブレット上の作図ツールによる生徒の試行錯誤を促すような授業を設計した。これら授業設計の枠組みまでを総括して飯島問題と呼ぶことにする。

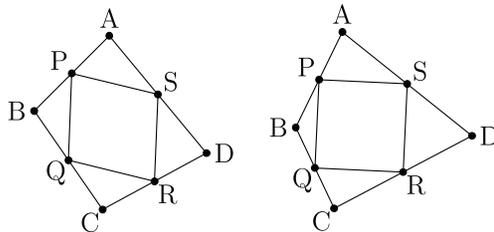


図 4-1 : (左) 飯島問題。(右) 内側の四角形が長方形の場合。

飯島氏の GC では作図手順が組み込まれているので、自由に動かすことができるのは A, B, C, D の 4 点のみで、P, Q, R, S の 4 点をユーザはマウスドラッグで直接動かすことはできない。飯島氏の研究授業は A, B, C, D の 4 点を自由に動かせるという状況で成立するように設計されており、このことに教育上の問題はないと著者は考えるが、同じ題材を PointLine で提供することを想定すると、P, Q, R, S をマウスドラッグにより動かすことができることから、たとえば「PQRS が長方形になるための条件はなにか」という問いに対して、生徒たちは直接 P, Q, R, S の 4 点をマウスドラッグで動かして確認する行動をとることが可能になる。もしくは、「PQ と QR が直交する」という条件を後付けすることができるので、四角形 PQRS が長方形になるという条件を一時的に図に付与する作業が可能になる。ここで大事なのは「答えが見つけやすくなったかどうか」ではなく、「試行錯誤する手段が豊かになった」ということであり、作図に対するアプローチが増えたことによる教育効果が期待できる。

4.2 和算の図形問題について正確な図を描画する

算額などで和算の図形問題を目にしたことがあるだろう。これらの問題は図の成立要件自身が問題になることもままあるが、多くは図が成立していることが前提でありそのうえで長さや面積に関する問を発しているのである。しかし、和算における図は江戸時代に描かれたものであり、線の太さはまちまちで円も正確な円として描かれているわけではない。このことから、与えられた図を正確に再現することが最初に必要な作業の一つであると考えられる。しかし、和算の図を作図することがいつでもできるわけではない。図4-2（左）は、和算書「算法天生法指南」の中に見ることができるが、コンパスと定規によるこの図の作成は（難しくはないものの）自明ではない。しかし、PointLineは図の成立要件を作図要素として追加できるので、このような図を描画することがたやすいことはこれまでに述べたとおりである。

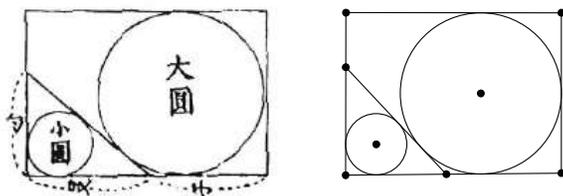


図4-2：会田安明「算法天生法指南」より（左）、図の再現（右）

4.3 その他の幾何学的な試み

PointLineでは、条件を後から追加できることから、部分的には成立しても全体として矛盾するような条件を追加することも原理的には可能である。そのような例を見つけることはできるだろうか。

第1の例は、三角形の三つの内角のうちの一つを直角にしてみる試みである。三角形ABCを作画し、角Aと角Bとを直角にすると、どのような挙動を示すだろうか。実際に試してみると、点Aと点Bとが一致するように形が変形し、図形は線分になる。

この実験を通して著者が考えたことは、矛盾するような条件を追加しその現象を予測することに教育的な意味があるのではないかということである。この点についてもいずれ調査検証をしてみたいと考えている。

参考文献

- [1] PointLine, <https://aharalab.sakura.ne.jp/PointLine/>（2018年11月現在）, 2018年8月公開.
- [2] GeoGebra, <https://www.geogebra.org/?lang=ja>（2018年11月現在）
- [3] Cinderella, <https://www.cinderella.de/>（2018年11月現在）

- [4] GCによる代表的な問題 http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/gc_rc/typical_problems_index.htm (2018年11月現在)
- [5] GC, http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/gc_html5/(2018年11月現在)