

実特殊線形変換群 $SL(2, \mathbb{R})$ の3次元球面への埋め込みと, $SL(2, \mathbb{Z})$ の対称行列が形作る双曲的パターン

東海大学・理学部数学科 前田 陽¹

Yoichi Maeda, Department of Mathematics, School of Science, Tokai University

1 はじめに

本研究は、3次元多様体である $SL(2, \mathbb{R})$ を3次元球面に埋め込むことによって、 $SL(2, \mathbb{R})$ の元を3次元空間内の点として可視化する試みである。3次元球面を、我々が認識できる3次元ユークリッド空間で視るためには立体射影を用いればよい。この可視化において、今回は $SL(2, \mathbb{Z})$ の対称行列の集合に注目する。 $SL(2, \mathbb{R})$ の対称行列の集合は2次元平面に存在し、その平面の中の $SL(2, \mathbb{Z})$ は、双曲的なパターンを形成することがわかる。本研究では、そのパターンの記述を試みる。また、動的幾何学ソフトウェア Dynamic Geometry Software (DGS) を用いると、3つの円の作図から、簡単に $SL(2, \mathbb{R})$ の対称行列が作成できることも紹介する。なお、今回作図で用いるソフトウェアは GeoGebra と Cabri3D である。

2 $SL(2, \mathbb{R})$ の3次元球面への埋め込み

実特殊線形変換群 $SL(2, \mathbb{R})$

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}) \mid \det M = ad - bc = 1 \right\}$$

を3次元球面に埋め込むことを考えよう ([9])。3次元球面 S^3 から一つの大円を取り除いた開集合を

$$S^3 \setminus \{u = 0\} = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid |u|^2 + |v|^2 = 1, u \neq 0\}$$

とする。3次元球面上の点 $(u, v) \in S^3 \setminus \{u = 0\}$ に対して、次の行列 M を考えると、簡単な計算より行列式の値が1となるので M は $SL(2, \mathbb{R})$ の元となる。

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{|u|^2} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(u) + |u|\operatorname{Re}(v) & \operatorname{Im}(u) + |u|\operatorname{Im}(v) \\ -\operatorname{Im}(u) + |u|\operatorname{Im}(v) & \operatorname{Re}(u) - |u|\operatorname{Re}(v) \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}).$$

ここで正数 r を $r = \sqrt{(a+d)^2 + (b-c)^2} (\geq 2)$ で定義すると、 $r = \frac{2}{|u|}$ となることより、

$$(u, v) = \left(\frac{2}{r^2} ((a+d) + (b-c)i), \frac{1}{r} ((a-d) + (b+c)i) \right),$$

¹E-mail: maeda@tokai-u.jp

となり、これにより $SL(2, \mathbb{R})$ から 3次元球面内の集合 $S^3 \setminus \{u = 0\}$ への埋め込みが定義できた。

3次元球面 S^3 を $(u, v) = (-1, 0)$ から 3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 に立体射影すると、

$$(x, y, z) = \frac{(\operatorname{Re}(v), \operatorname{Im}(v), \operatorname{Im}(u))}{1 + \operatorname{Re}(u)} = \frac{(r(a-d), r(b+c), 2(b-c))}{r^2 + 2(a+d)}.$$

となり、この立体射影により、 $SL(2, \mathbb{R})$ の元が 3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内の点として可視化できる。この可視化 (図 1) において、単位行列 I_2 は原点 $(0, 0, 0)$ に対応し、 $SO(2)$

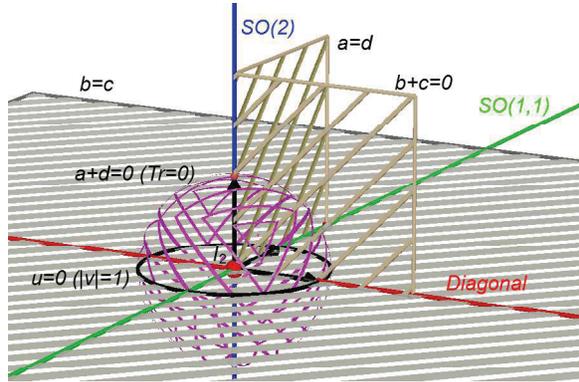


図 1: $SL(2, \mathbb{R})$ の 3次元モデル。

は $a - d = b + c = 0$ より z 軸に対応している (但し、 $-I_2$ は無限遠点にあるので見えない)。3次元球面内の除外集合である $\{u = 0\}$ は、 xy -平面上の単位円に対応している。対称行列の集合は、 z 成分が 0 であるので、 xy -平面 (ただし、単位円を除く) に対応している。次節では、この平面上で $SL(2, \mathbb{Z})$ がなすパターンを見ていこう。

3 $SL(2, \mathbb{Z})$ の対称行列が形作る双曲的パターン

以下では、 xy -平面にある、次の対称行列の集合を考える。

$$\operatorname{Sym}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \mid b = c, a + d > 0 \right\}$$

対称行列の場合、 $r = |a + d|$ となることに注意すると、

$$(x, y) = \frac{(a-d, 2b)}{a+d+2}, \quad x^2 + y^2 = \frac{a+d-2}{a+d+2} < 1, \quad (1)$$

となり、 Sym^+ は xy -平面内の単位円盤 D に対応する。

図 2 は、 Sym^+ の $SL(2, \mathbb{Z})$ の元を描いたものである。 $SL(2, \mathbb{Z})$ が単位円盤 D 内で双曲的パターンを形成していることがわかる。

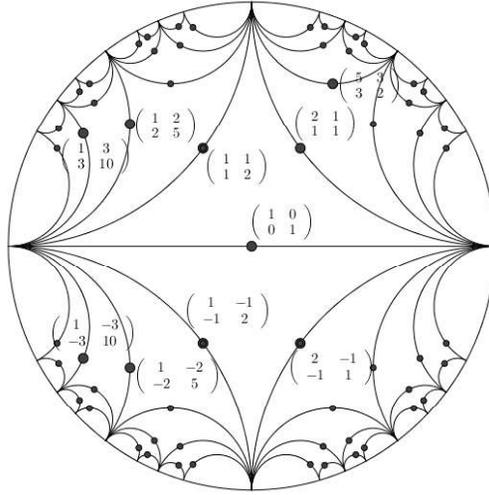


図 2: $SL(2, \mathbb{Z})$ の対称行列のポアンカレモデル.

このポアンカレ円盤モデルにおいて, 対称行列 M, M^2, M^3, \dots は, I_2 を通る一直線上に存在していることがわかる. また, $a = 1$ である行列は, あるホロサイクル上に存在している. このように, このモデルは $SL(2, \mathbb{Z})$ の対称行列の関係を幾何的に視覚化していることがわかる. 次節では, この双曲的パターンを具体的に記述することを考えよう.

4 双曲的パターンの記述

図 3 は, 図 2 を変換 $\varphi(z) = i \frac{-z+1}{z+1}$ (但し, $z = x + yi \in D$) で上半平面モデルに変換したものである. この上半平面内の点 (x, y) と対称行列との関係は $(x, y) = \frac{(b, 1)}{a}$ となる. 実際, 式 (1) を用いると,

$$\varphi(z) = i \frac{1-x-yi}{1+x+yi} = i \frac{(1-x-yi)(1+x-yi)}{(1+x)^2 + y^2} = \frac{2y + (1-x^2-y^2)i}{x^2 + y^2 + 2x + 1} = \frac{b+i}{a}.$$

図 3 を見ると, x 軸方向への 1 シフトで不変であり, また, 単位円に関する反転でも不変である. このモデルで, $SL(2, \mathbb{Z})$ の双曲的パターンを次のように記述することができる.

定理 1. Sym^+ 中の $SL(2, \mathbb{Z})$ のなす双曲的パターンは, $PSL(2, \mathbb{Z})$ の生成元

$$g(z) = -\frac{1}{z}, \quad h(z) = z + 1$$

で生成される.

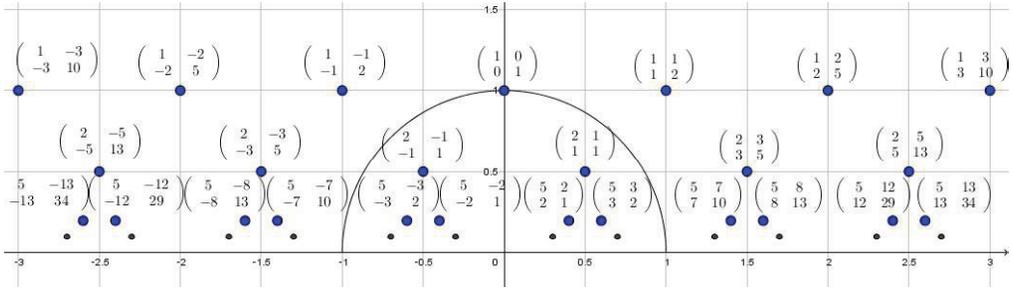


図 3: $SL(2, \mathbb{Z})$ の対称行列の上半平面モデル.

因みに、生成元 g, h に対応する行列の変換 \hat{g}, \hat{h} は以下の通りである.

$$\hat{g} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \hat{h} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & a+2b+d \end{pmatrix}.$$

$\hat{g}^2 = (\hat{g}\hat{h})^3 = \hat{h}^\infty = id$ であることは、容易に確かめられる.

5 動的幾何学ソフトウェアを用いた可視化

図 4 は、図 2 を変換 $\psi(z) = \frac{z+i}{iz+1}$ (但し、 $z = x + yi \in D$) で別の上半平面モデルに変換したものである. この上半平面内の点 (x, y) と対称行列との関係は $(x, y) = \frac{(a-d, 2)}{a+d-2b}$ となる. 実際、式 (1) を再び用いると、

$$\psi(z) = \frac{x + (1+y)i}{(1-y) + xi} = \frac{(x + (1+y)i)((1-y) - xi)}{(1-y)^2 + x^2} = \frac{2x + (1-x^2-y^2)i}{x^2 + y^2 - 2y + 1} = \frac{a-d+2i}{a+d-2b}.$$

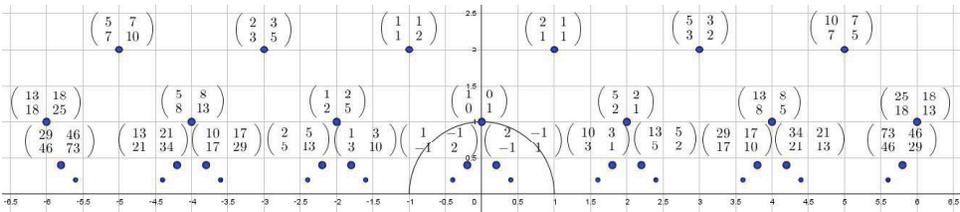


図 4: もうひとつの上半平面モデル.

図 4 を見ると、 x 軸方向への 2 シフトで不変であり、また、単位円に関する反転でも不変である.

このモデルは、 $SL(2, \mathbb{R})$ の対称行列の集合 Sym^+ の元が持つ、 $ad-b^2 = 1$ を満たす (a, b, d)

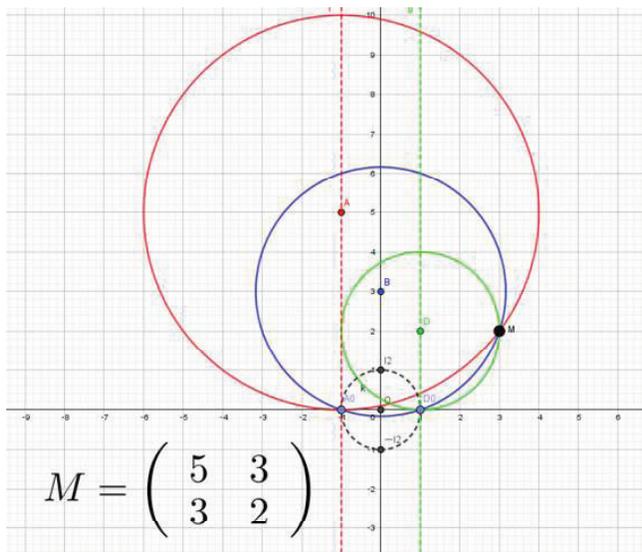


図 5: 3つの円から, $ad - b^2 = 1$ を満たす (a, b, d) を作図する方法.

の3つの数の組を, 3つの円を作図することによって求められるという, 非常に興味深い性質を持っている.

図5は, 3つの円から $ad - b^2 = 1$ を満たす (a, b, d) を作図から作成する方法を表している. 点 $M = (3, 2)$ に対して, 次のような3つの円を作図すると, それらの円の y 座標を読み取ることによって, $(a, b, d) = (5, 3, 2)$ という組が得られる.

< $ad - b^2 = 1$ を満たす (a, b, d) を作成する手順 >

1. 上半平面上に任意に点 M を取る.
2. 点 M を通り, $(-1, 0)$ で x 軸に接する円 C_1 を作図する.
3. 点 M を通り, $(+1, 0)$ で x 軸に接する円 C_2 を作図する.
4. 3点 $M, (-1, 0), (+1, 0)$ を通る円 C_3 を作図する.
5. 3つの円 C_1, C_2, C_3 の中心の y 座標を順に a, d, b とすれば, $ad - b^2 = 1$ を満たす.

次の2つの命題がこの作図法の正当性を示している.

命題 1. $(x, y) = \frac{(a-d, 2)}{a+d-2b}$ のとき,

$$x^2 + y^2 = \frac{a+d+2b}{a+d-2b}.$$

証明.

$$x^2 + y^2 = \frac{(a-d)^2 + 4}{(a+d-2b)^2} = \frac{(a-d)^2 + 4(ad-b^2)}{(a+d-2b)^2} = \frac{(a+d)^2 - 4b^2}{(a+d-2b)^2} = \frac{a+d+2b}{a+d-2b}.$$

□

命題 2. $(x, y) = \frac{(a-d, 2)}{a+d-2b}$ のとき, (x, y) は次の 3 つの円の方程式を満たす:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-a)^2 = a^2, \\ (x-1)^2 + (y-d)^2 = d^2, \\ x^2 + (y-b)^2 = 1+b^2. \end{cases}$$

証明.

$$(x+1)^2 + (y-a)^2 - a^2 = x^2 + y^2 + 2x - 2ay + 1 = \frac{a+d+2b+2(a-d)-4a+a+d-2b}{a+d-2b} = 0.$$

$$(x-1)^2 + (y-d)^2 - d^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2dy + 1 = \frac{a+d+2b-2(a-d)-4d+a+d-2b}{a+d-2b} = 0.$$

$$x^2 + (y-b)^2 - (1+b^2) = x^2 + y^2 - 2by - 1 = \frac{a+d+2b-4b-(a+d-2b)}{a+d-2b} = 0.$$

□

参考文献

- [1] Beardon, A. : *The Geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag New York Inc, 1983.
- [2] 小林俊行, 大島利雄: 『リー群と表現論』岩波書店, 2005.
- [3] Berger, M. : *Geometry I*. Berlin Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 1987.
- [4] Berger, M. : *Geometry II*. Berlin Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 1987.
- [5] Jennings, G. : *Modern geometry with applications*. Springer-Verlag New York, Inc, 1994.
- [6] Sved, M. : *Journey into Geometries*. The Mathematical Association of America, 1997.
- [7] 谷口雅彦, 奥村善英: 『双曲幾何学への招待—複素数で見る—』, 培風館, 1996.
- [8] 前田陽一: 「動的幾何学ソフトウェアによる実特殊線形変換群 $SL(2, \mathbb{R})$ の 3 次元モデル」, 数理解析研究所講究録 1951, pp. 49–53, 2015.

- [9] Maeda, Y. : *Active Learning with Dynamic Geometry Software*. ICCSA 2017, Part IV, LNCS 10407, pp. 228–239, 2017.
- [10] 前田陽一 : 「実特殊線形変換群 $SL(2, \mathbf{R})$ の 3 次元モデルと部分群の可視化」, 数理解析研究所講究録 2067, pp. 74–84, 2017.
- [11] Maeda, Y. : *Embedding of Real Special Linear Group $SL(2, \mathbb{R})$ into the Three-dimensional Sphere and a Hyperbolic Pattern of Symmetric Matrices of $SL(2, \mathbb{Z})$* . Proceedings of the Sixth TKU-KMITL Joint Symposium on Mathematics and Applied Mathematics (MAM2018), pp. 71–76, 2018. http://data.sm.u-tokai.ac.jp/mam2018/wp-content/uploads/2018/06/Proceeding_MAM2018.pdf