数理解析研究所講究録 第2112巻 2019年 134-140

非分布関数型ファジィ積分に関する収束定理

Convergence Theorems for Fuzzy Integrals of Non Distribution Type

福田 亮治 (大分大 理工)[*1]
Ryoji Fukuda (Oita University)
本田あおい (九工大情報工)[*2]
Aoi Honda (Kyushu Institute of Technology)
岡崎 悦明 (ファジィシステム研究所)[*3]
Yoshiaki Okazaki (Fuzzy Logic Systems Institute)

1. はじめに

非加法的な測度に関していくつかの積分が定義され，様々な性質が調べられているが，これらの積分は線形性が期待できない．そのため関数を解析する上で常識になっている性質のいくつかが，少なくとも自明ではなくなり各所に困難なことが起こりうる．この報告では，このような性質である単調収束定理について，特に分布関数型でない積分を中心に議論をする．

Choquet 積分, 菅野積分, Shilkret 積分などの積分は分布関数型として一般化される．それらの積分に対する収束定理 (単調増加，減少収束定理など) に関しては，河邊氏 ([1]) により統合的な議論がなされている．我々の扱う積分は単関数による近似を基本とするもので，この範疇に入らないものであるが，これらを非分布関数型と表現することにする．

この報告で扱う積分は，主に Pan 積分 ([2]), 凹積分 ([3]) である．これらは定義に分布関数を用いないことから，非分布関数型の積分と位置づける．この意味では，包除積分 ([4]) もこの範疇に入る積分となるが，Choquet 積分は包除積分の代表的な例でもあるので，分布関数型の積分と完全に無関係な概念ではない．ただし，河邊氏の統合的な議論における様々な条件は，単関数を用いた定義の積分には直ちに適用することが難しく，この報告ではそれらとは独立に議論をしている．

Pan 積分, 凹積分に対して，単調増加収束定理は追加の条件をほぼ追加することなく成り立つ．これに対して，単調減少収束定理については，かなり強い条件を追加しないと証明することができていない．また，一様収束する場合でも収束定理は自明ではなく，特に凹積分の場合は追加の条件を与えることで証明することができる．

Pan 積分に関しては，定義関数の積分を用いて新たな集合関数を定義した．この集合関数はいくつかの興味深い性質を満たすことが分かり，これを中心にいくつかの特徴的性質についても議論する．

[*1] Oita University, 700 Dan-noharu, Oita 870-1192, Japan
e-mail: rfukuda@oita-u.ac.jp
[*2] Kyushu Institute of Technology, 680-4 Kawazu, Iizuka, Fukuoka 820-8502, Japan
e-mail: aoi@ces.kyutech.ac.jp
[*3] Fuzzy Logic Systems Institute, 680-41, Kawazu, Iizuka, Fukuoka 820-0067, Japan
e-mail: okazaki@flsi.or.jp

2. 非分布関数型積分

本稿を通して, $(X,\mathcal{B})$ を可測空間とし, μ を単調測度とする．すなわち，一般に無限集合である X 上の σ-集合体 $\mathcal{B}$ に対して, $\mathcal{B}$ を定義域とする集合関数 μ が

$$\mu(\emptyset)=0, A\subset B\Rightarrow \mu(A)\leq\mu(B)$$

を満たすものとする.

単調測度 μ が 下から連続であるとは，$A_n\nearrow A \quad\Rightarrow\quad \mu(A_n)\nearrow\mu(A)$ を満たすこととする.(上から連続は，$A_n\searrow A \quad\Rightarrow\quad \mu(A_n)\searrow\mu(A)$.)

この報告では,X 上の非負可測関数の積分を考える．それらの議論をするために，次の2種類の単関数族を定める.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \left\{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{A_k} : \{A_k\}_{k=1}^{n}\subset\mathcal{B}\ \text{は，} X\ \text{の分割}, \alpha_k\geq 0, k=1,2...,n,\ n\in I\!N\right\}\\
\mathcal{S}' &= \left\{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{A_k} : \{A_k\}_{k=1}^{n}\subset\mathcal{B}, \alpha_k\geq 0, k=1,2...,n,\ n\in I\!N\right\}\\
\int^{*}\varphi d\mu &= \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu(A_k),\quad (\varphi=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{A_k})
\end{aligned}$$

これらを用いて, 非負関数 f の Pan 積分 ([2, 8])，凹積分 ([3]) を次のように定義する.

定義 1

$$\int^{\mathrm{Pan}} fd\mu=\sup\left\{\int^{*}\varphi d\mu,\quad \varphi\in\mathcal{S}, f(x)\geq\varphi(x)\right\}$$

$$\int^{\mathrm{cav}} fd\mu=\sup\left\{\int^{*}\varphi d\mu,\quad \varphi\in\mathcal{S}', f(x)\geq\varphi(x)\right\}$$

定義 2 分布関数型積分

比較のための分布関数型積分として, Choquet 積分 ([5]), 菅野積分 ([6]),Shlkret 積分 ([7]) を紹介する.

1. $\displaystyle\int^{\mathrm{Ch}} fd\mu:=\int_0^{\infty}\mu(f\geq r)dr$ (Choquet 積分)

2. $\displaystyle\int^{\mathrm{Su}} fd\mu:=\sup_{r>0} r\vee\mu(f\geq r)$ (Sugeno 積分)

3. $\displaystyle\int^{\mathrm{Sh}} fd\mu:=\sup_{r>0} r\cdot\mu(f\geq r)$ (Shilkret 積分)

これらの積分は，総称して「分布関数型」と呼ばれる．分布関数型積分の収束定理に関しては，様々な結果が得られているが，これらは河邊氏 ([1]) により詳細に整理され，一般論が展開されている．我々の定義する積分は，単関数近似を基本として，分布関数型と異なるタイプのものになっている．我々はこれを「非分布関数型」と位置づけ，その性質を解析する.

3. 分布関数型積分の収束定理

分布関数型積分に関する収束定理を河邊氏の講演資料 (予稿) [1] を参考に列挙する. 同資料中では，単調収束定理以外の定理や，それぞれの収束定理が成り立つ条件などについても，議論されているが，ここでは我々の結論と関連するところのみを取り上げる.

定理 3 単調増加収束定理
μ を下から連続である単調測度, 非負可測関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある非負可測関数 f に対して，$f_n \nearrow f$ を各点で満たすものとする. このとき次が成り立つ.

1. $\int^{Ch} f_n d\mu \nearrow \int^{Ch} f d\mu$ *(Song, Li[9], Wang[11])*
2. $\int^{Su} f_n d\mu \nearrow \int^{Su} f d\mu$ *(Lalesca,Adamus [12], Wang [10])*
3. $\int^{Sh} f_n d\mu \nearrow \int^{Sh} f d\mu$ *(Zhao [13])*

定理 4 単調減少収束定理
μ を単調測度で上から条件連続 *(*減少集合列の測度が有限であれば上からの連続性がある*)* を満たすとする. 非負可測関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある非負可測関数 f に対して，$f_n \searrow f$ を各点で満たすものとする. このとき次が成り立つ.

1. $\int^{Ch} f_1 d\mu < \infty \quad \Rightarrow \int^{Ch} f_n d\mu \searrow \int^{Ch} f d\mu$ *(Wang[11])*
2. $\int^{Su} f_n d\mu \searrow \int^{Su} f d\mu$ *(Wang[10]))*
3. $\int^{Sh} f_n d\mu \searrow \int^{Sh} f d\mu$ *(Zhao [13],Kawabe [14])*

4. Pan 積分から導かれる測度

非分布関数型の積分に対する収束定理を述べる前に，Pan 積分に関する特徴的な性質を取り上げる. 一般に, 定義関数の Pan 積分は対応する集合の測度とは一致しない. この方法で新たな測度を定義した場合，いくつかの注目すべき性質を満たすが，これがこの形の積分の隠れた構造をあらわしているのかもしれない.

定義 5 μ を $(X, \mathcal{B})$ 上の単調測度とする. Pan 積分により定まる測度 μ_P を次で定める.

$$\mu_P(A) = \int^{Pan} \chi_A d\mu, \quad A \in \mathcal{B}.$$

μ が次の性質を満たすとき弱優加法的 (weak super additive) であると呼ぶ.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B).$$

積分の単調性から μ_P は単調測度になり，上で定めた 弱優加法性を満たす. さらに一般の測度 μ に対して μ_P は, μ 以上の 弱優加法的単調測度の中で最小のものである.

命題 1 μ を単調測度とするとき，次が成り立つ.

1. μ_P は弱優加法的単調測度である.

2. ν が弱優加法的単調測度で，任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して $\mu(A) \leq \nu(A)$ を満たせば，同じく任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して $\mu_P(A) \leq \nu(A)$ を満たす．

元の μ が有界な測度であっても, μ が有界であるとは限らず，一般には $\mu_P(X) = \infty$ となりうる．

例 **6** Lebesgue測度の Distorted 測度
$X = [0,1]$, $\mu(A) = |A|^{1/2}$ (Lebesgue測度の1/2乗) とする．このとき μ は劣加法的な測度となる．$\mu(X) = 1$ であり，単調でもあるので，有界な単調測度となる．

$$\mu_P([0,1]) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu([\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty.$$

となるので，$\mu_P(X) = \infty$ である．

ここで，次の問題を考える．
「全ての関数で Pan 積分の値が同じであれば，測度は一致する」
この問題は次の例で否定的に解決される．

例 **7** $X = \{a, b\}$, $A = \mu(\{a\})$, $B = \mu(\{b\})$, $C = \mu(\{a, b\})$ と置く．単調測度ならば $A \vee B \leq C$ を満たす．このとき μ_P は次のようになる．

$$\mu_P(\{a\}) = A, \quad \mu_P(\{b\}) = B, \quad \mu_P(\{a,b\}) = C \vee (A+B)$$

$\alpha = f(a)$,$\beta = f(b)$ と置くと,μ, μ_P に関する Pan 積分は,

$$\begin{aligned} \int^{Pan} f d\mu &= (\alpha \wedge \beta) C \vee (A\alpha + B\beta) \\ \int^{Pan} f d\mu_P &= ((\alpha \wedge \beta)(C \vee (A+B))) \vee (A\alpha + B\beta) \end{aligned}$$

$A = B = C = 1$ のとき $C \vee (A+B) = 2$ より，$\mu_P(\{a,b\}) = 2 > C = \mu(\{a,b\})$．よって $\mu_p \neq \mu$. $(\alpha \wedge \beta)C \leq (\alpha \wedge \beta)2 \leq (\alpha + \beta)$ より $\int^{Pan} f d\mu = \int^{Pan} f d\mu_P, \forall f$.
さらに, $\int^{Pan} f d\mu \neq \int^{Pan} f d\mu_P$ が成り立つためには，$C < (A+B)$ である必要がある．しかしその場合は

$$(\alpha \wedge \beta)C < (\alpha \wedge \beta)(A+B) \leq (A\alpha + B\beta)$$

であるから，これらの積分が異なることはない．したがって2点集合ではこれらの積分が常に同じになっている．

5. Pan 積分，凹積分の単調収束定理

Pan 積分, 凹積分に関する単調増加収束定理として次の定理を得る．

定理 8 μ を下から連続な単調測度とする．非負可測関数列 $\{f_n\}$ が非負可測関数 f に単調増加で収束するとき *($f_n \nearrow f$),*

$$\int^{Pan} f_n d\mu \nearrow \int^{Pan} f d\mu,$$

$$\int^{cav} f_n d\mu \nearrow \int^{cav} f d\mu,$$

(証明の鍵) $\int^{Pan} f d\mu < \infty$ である場合．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，単関数 $\varphi \in \mathcal{S} \quad (\in \mathcal{S}')$ を，$\int^* \varphi d\mu \geq \int^{Pan} f d\mu - \varepsilon$ となるように選ぶことができる．$\varphi = \sum_{k=1}^{K} a_k \chi_{D_k}$ とあらわすとき

$$\alpha = \min_{a_k > 0} a_k > 0$$

を満たす.(有限個なので最小のものをとる.)

$$F_n = \{ f_n > \varphi - \alpha \}$$

と置くと $F_n \nearrow X$ $(n \to \infty)$．測度の下からの連続性および，積分の定義を元に丁寧に評価することにより，$\int^{Pan} f_n d\mu$, $(\int^{cav} f_n d\mu)$ が収束収束することがわかる．

$\int^{Pan} f d\mu = \infty$ である場合．同様の議論で $\int^{Pan} f_n d\mu$ が発散することを示すことができる．

Corollary 9 f を非負可測関数で，$\int^{Pan} f d\mu < \infty$ を満たすものとする．このとき可測集合列 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $A_n \searrow \emptyset$ を満たせば，次を得る．

$$\int^{Pan} f \chi_{A_n} d\mu \searrow 0$$

f として 1 を考えると，次を得る．

$$\mu_P(A_n) = \int \chi_{A_n} d\mu \searrow 0, \quad n \to \infty.$$

また，測度の大小関係より直ちに次を得る．

$$\mu(A_n) \leq \mu_P(A) \searrow 0, \quad n \to \infty.$$

(証明の鍵) 次の変形によりこの性質を示すことができる．

$$\begin{aligned} \int^{Pan} f d\mu &= \int^{Pan} (f \chi_{A_n^c} + f \chi_{A_n}) d\mu \\ &\geq \int^{Pan} f \chi_{A_n^c} d\mu + \int^{Pan} f \chi_{A_n}) d\mu. \end{aligned}$$

$f \chi_{A_n^c} \nearrow f$ より，単調増加収束定理から，$\int^{Pan} f \chi_{A_n^c} d\mu \nearrow \int^{Pan} f d\mu$ を得る．したがって $\int^{Pan} f \chi_{A_n} d\mu \searrow 0$ が成り立つ．

さらにこれを用いると次の性質を得る．

Corollary 10 $f_n \searrow 0$ を満たす可測関数列に対して，単調測度 μ が，$\mu_P(X) < \infty$, $\int^{Pan} f_1 d\mu < \infty$ を満たせば，

$$\int^{Pan} f_n d\mu \searrow 0$$

を満たす．

測度が劣加法的である場合には，積分に線形性がある [8]．これを用いると，次の単調減少収束定理が成り立つ．

定理 11 *:* μ を下から連続な単調測度で，任意の $A, B \in \mathcal{B}$, $A \cap B = \emptyset$ に対して $\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B)$ を満すものとする．このとき非負可測関数列 $\{f_n\}$ が非負可測関数 f に単調減少で収束し，$(f_n \searrow f)$, $\int^{Pan} f_1 d\mu < \infty$, $\int^{Pan} \chi_{\{f_1>0\}} d\mu < \infty$ であれば,

$$\int^{Pan} f_n d\mu \searrow \int^{Pan} f d\mu,$$

この設定では，Pan積分と凹積分は一致するので次も成り立つ．

$$\int^{cav} f_n d\mu \searrow \int^{cav} f d\mu,$$

6. その他の収束定理

定理 12 Pan積分の一様収束定理
$(X, \mathcal{B})$ 上の非負可測関数列 $\{f_n\}$ がある可測関数 f に対して

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

を満たすとする．単調測度 μ が $\mu_P(X) < \infty$, $\int^{Pan} f d\mu < \infty$ を満たせば,

$$\int^{Pan} f(x) d\mu = \lim_{n \to \infty} \int^{Pan} f_n(x) d\mu$$

が成り立つ．

この場合は，測度に対して下からの連続性を仮定する必要がない．
　凹積分の場合は，次の条件の下で一様収束定理が成り立つ．

定理 13 凹積分の一様収束定理
非負可測関数列 $\{f_n\}$ がある可測関数 f と正の数 $\delta > 0$ に対して

$$f(x) > \delta, \quad \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \quad (n \to \infty)$$

を満たすとする．単調測度 μ が下から連続で，$\int f d\mu < \infty$ を満たせば

$$\int^{cav} f(x) d\mu = \lim_{n \to \infty} \int^{cav} f_n(x) d\mu$$

が成り立つ．

7. まとめ

単調測度に関する Pan 積分, 凹積分に対して収束定理を中心にその性質について議論をした．両方の積分ともに，単調増加収束定理は，ほぼ特別な仮定なしに成り立つことがわかったが，単調減少収束定理は特殊な場合のみに成り立つことを示すことができた．凹積分については一様収束している場合でも無条件では収束を示すことができていない．これらの状況は，非加法的な測度の本質的な原理と結びつくものと予想される．実際，Pan 積分から導かれる測度に関して，いくつかの性質が得られた．このような意味で，これらの積分は非加法的な測度に関する考察において重要な役割を果たすであろうことが期待できる．

参考文献

[1] 河邊淳 A unified approach to convergence theorems of distribution-based nonlinear integrals, 日本数学会・２０１８年度秋季総合分科会（於：岡山大学）・実函数論分科会

[2] Q. Yang, The pan-integral on the fuzzy measure space, Fuzzy Mathematica (in Chinese), 3 (1985), pp. 107-114.

[3] Ehud Lehrer, A new integral for capacities, Econ. Theory, 39 (2009), pp. 157-176.

[4] Aoi Hondaa, Yoshiaki Okazaki, Generalization of inclusion-exclusion integral for nondiscrete monotone measure space, Fuzzy Sets and Systems Volume 355, 15 (2019), Pages 42-58.

[5] 室伏俊明・菅野道夫 ：ファジィ測度, 講座ファジィ3，日刊工業新聞社，1991.

[6] M. Sugeno, Theory of fuzzy integrals and its applications, Ph.D. Dissertation, Tokyo Inst. of Tech., Tokyo, 1974.

[7] N. Shilkret, Maxitive measure and integration, Indag. Math., 33 (1971), 109-116.

[8] Yao Ouyang,Jun Li,Radko Mesiar, On linearity of pan-integral and pan-integrable functions space , International Journal of Approximate Reasoning archive, Volume 90 Issue C (2017), pp.307-318.

[9] Jinjie Song and J. Li, Lebesgue theorems in non-additive measure theory, Fuzzy Sets Syst., 149 (2005), 543-548.

[10] Z. Wang, Convergence theorems for sequences of Choquet integrals, Int. J. Gen. Syst., 26 (1997), 133-143.

[11] Z. Wang, The autocontinuity of set function and the fuzzy integral, J. Math. Anal. Appl., 99 (1984), 195-218.

[12] D. Ralescu and G. Adams, The fuzzy integral, J. Math. Anal. Appl., 75 (1980), 562-570.

[13] Ru Huai Zhao, (N) fuzzy integral, J. Math. Res. Exposition, 1 (1981), 55-72 (in Chinese).

[14] J. Kawabe, A unified approach to the monotone convergence theorem for nonlinear integrals, Fuzzy Sets Syst., 304 (2016), 1-19.