

Set relations revisited

(集合関係再考)

秋田県立大学 システム科学技術学部 経営システム工学科
 Faculty of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University

荒谷 洋輔 (ARAYA, Yousuke) *

1 はじめに

ベクトル最適化問題の拡張である集合最適化問題は、1997年に黒岩-田中-Ha[9]によって提唱された。この問題は、集合値写像の像空間の元(集合)における大小の比較について6種類の順序を導入し、その順序による最適化問題を考えるというものである。その後、2011年のJahn-Ha[7]による新たな集合の順序の導入などがあり、近年における集合最適化の研究は、いろいろな方面で盛んになってきている。

本稿は、いくつかの集合関係を導入し、その重要な性質を振り返りながら、集合関係に対する筆者の私見を述べたいと思う。最後に、確率・統計方面への応用を意識した新しい集合関係のアイデアを紹介する。

2 集合関係について：導入から重要な性質まで

定義 2.1 (集合関係: Kuroiwa-Tanaka-Ha[9]). Y を線形位相空間、 \mathcal{V} を Y の空でない部分集合の族とする。 $A, B \in \mathcal{V}$ と、 $\text{solid}(\iff \text{int}C \neq \emptyset)$ な閉凸錐 $C \subset Y$ に対して、以下の集合関係を定義する。

$$[\text{weak}] \quad A \leq_C^w B \quad \text{by} \quad B - A \subset C, \quad (\text{type 1})$$

$$A \leq_C^{(2)} B \quad \text{by} \quad A \cap (\cap_{b \in B} (b - C)) \neq \emptyset, \quad (\text{type 2})$$

$$[\text{lower}] \quad A \leq_C^l B \quad \text{by} \quad B \subset A + C, \quad (\text{type 3})$$

$$A \leq_C^{(4)} B \quad \text{by} \quad (\cap_{a \in A} (a + C)) \cap B \neq \emptyset, \quad (\text{type 4})$$

$$[\text{upper}] \quad A \leq_C^u B \quad \text{by} \quad A \subset B - C, \quad (\text{type 5})$$

$$[\text{strong}] \quad A \leq_C^s B \quad \text{by} \quad 0_Y \in B - A - C. \quad (\text{type 6})$$

$$\iff A \cap (B - C) \neq \emptyset \iff (A + C) \cap B \neq \emptyset$$

*(E-mail: y-araya@akita-pu.ac.jp)

- 「集合を比較する」という考え方は、本研究集会「凸解析学・非線形解析学」以外
の分野でも現れ始めているため、定着したと言ってよいと荒谷は考えている。但し、
集合関係の分類については研究者によって考え方に大きな違いがある。

(a) 田中派（主に田中研究室）：上記の6つのタイプの集合関係を導入して、それら
の統一的な視点で考慮する。

(b) 黒岩派（黒岩研究室、Hamel-Löhne[5]、以前の荒谷など）：上記のタイプの内、
応用上重要な「type 3= l 」と「type 5= u 」を中心に研究する。

(c) 欧米の研究者派（Hernández-Rodríguez-Marín[6]、Mordukhovich など）：上記の
「type 3= l 」のみ考慮。他の集合関係は知らないか、もしくは type 3 のアナロジー
であるため研究不要というスタンス。

- 「type 1」は集合族の中で1番要素数が少ないクラスであり、「type 6」は集合族の
中で1番要素数が多いクラスである。
- 「 l 」と「 u 」は反射律・推移律を満たすため、集合関係の中で特に重要である。
- 「 l 」と「 u 」は同値類を導入できるという集合最適化問題特有の性質がある。その
同値類は集合のスカラー化と密接な関係にある。

定義 2.2 (集合の同値類 : Hamel-Löhne[5], Jahn-Ha[7]). $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ に対して、同値
類を以下で定義する。

$$V_1 \sim_l V_2 \iff V_1 \leq_C^l V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C^l V_1$$

$$V_1 \sim_u V_2 \iff V_1 \leq_C^u V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C^u V_1$$

$[\cdot]^l, [\cdot]^u$: 同値類の集合

命題 2.3. $A, B \in \mathcal{V}$ に対して、次が成り立つ。

$$(i) \quad A \in [B]^l \iff A + C = B + C.$$

$$(ii) \quad A \in [B]^u \iff A - C = B - C.$$

命題 2.4. 単調性を満たすスカラー化関数 ($A, B \in \mathcal{V}$ とスカラー化関数 $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$
が、 $A \leq_C^l B \implies f(A) \leq f(B)$ を満たす。) について、次が成り立つ。

$$A \in [B]^l \implies f(A) = f(B)$$

- ベクトル最適化問題では、順序錐 $C \subset Y$ が pointed ($\iff C \cap (-C) = \{0_Y\}$) で
あれば、 (\leq_C, Y) が順序空間になるため、pointed の概念は重要である。しかし集合
最適化問題では、順序錐 C が pointed であっても同値類が現れる上に、反対称律も
満たさないため、pointed の仮定の重要度は下がる。
- 「type 2」 と 「type 4」 は（荒谷の知る限りでは）一番使用頻度が低い集合関係で
ある。

3 集合関係について：スカラー化の観点から

ベクトルのスカラー化の研究 [4] を拡張する研究である集合のスカラー化の研究は、2000 年頃から始まった ([13] を参照)。その後、[5, 6] に影響されて、下記のスカラー化関数の研究が始まった ([1, 10, 11] やその参考文献を参照)。下記のスカラー化関数が重要である理由は、 $A \leq_C^l B$ 、 $A \leq_C^u B$ を特徴づけできるからである。

定義 3.1 (*l-inf & u-inf type [1]*). $C \subset Y$ を閉凸錐、 $k^0 \in C \setminus (-C)$ とする。 $\inf \emptyset = \infty$ と約束することにより、次のスカラー化関数を定義する。 $h_{\inf}^l, h_{\inf}^u : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow (-\infty, \infty]$

$$h_{\inf}^l(V_y; V_a) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid V_y \leq_C^l tk^0 + V_a\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid tk^0 + V_a \subset V_y + C\}$$

$$h_{\inf}^u(V_y; V_a) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid V_y \leq_C^u tk^0 + V_a\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid V_y \subset tk^0 + V_a - C\}$$

- 「*l*」と「*u*」を考慮する際は、それぞれ「 $C(-C)$ -proper」と「 $C(-C)$ -closed」の仮定をセットで導入した方が良い。

定義 3.2 (*C-proper : Hernandez-Rodriguez-Marin[6]*). $A \in \mathcal{V}$ が C -proper [$(-C)$ -proper] であるとは、 $A+C \neq Y$ [$A-C \neq Y$] が成り立つときである。また、 $\mathcal{V}_C[\mathcal{V}_{-C}]$ を Y の C -proper [$(-C)$ -proper] である部分集合の族とする。

定理 3.3. $k^0 \in \text{int}C$ とする。そのとき、次が成り立つ。

$$V \in \mathcal{V} : C\text{-proper} \iff h_{\inf}^l(V; \{0_Y\}) > -\infty.$$

定義 3.4 (*C-closed : Luc[12]*). $A \in \mathcal{V}$ が C -closed [$(-C)$ -closed] であるとは、 $A+C$ [$A-C$] が閉集合であることと定義する。

注意 1. ベクトル順序 \leq_C^l と $\leq_{\text{int}C}^l$ は明らかに異なる。しかし、集合における順序の場合について、次の例は \leq_C^l と $\leq_{\text{int}C}^l$ が同値になることもあることを示している。よって、 \leq_C^l と $\leq_{\text{int}C}^l$ を区別したいとき、集合 A に C -closed の仮定が必要となる ([1] を参照)。

- 「*l*」と「*u*」は集合のスカラー化の観点では「片割れ」である。「type 3 & type 5 (= *l&u* : Jahn-Ha[7])」という順序を導入すると、きれいな結果が得られる。
- 集合のスカラー化は集合値解析・集合最適化の中で重要な位置を占めるので、上記の順序「*l&u*」は、今後主流になる可能性が高い。

4 集合関係について：均衡点問題への拡張の観点から

最近の研究で私たちは「ベクトル均衡点問題」を自然な形で拡張した「集合均衡点問題 (仮称)」を提唱した。

定義 4.1 (集合均衡点問題の定式化 : 荒谷-斉藤-木村, 2016). X を空でない集合、 $F : X \times X \rightarrow \mathcal{V}$ を集合値写像とする。

(\star -SEP) Find $x_0 \in X$ satisfying $F(x_0, y) \not\leq_{\text{int}C}^* \{0_Y\}$ for all $y \in X$,

(\star -s-SEP) Find $x_0 \in X$ satisfying $\{0_Y\} \leq_C^* F(x_0, y)$ for all $y \in X$.

ここで $\star \in \{w, l, u, s\}$ として、4つの要素（記号）の中から1つを選ぶものとする。

- 一般には「 l 」と「 u 」は比較不能であるが、「 l 」と「 u 」の集合均衡点問題の解集合について

$$(s\text{-SEP}) = (l\text{-SEP}) \subset (u\text{-SEP}) = (w\text{-SEP})$$

$$(w\text{-s-SEP}) = (l\text{-s-SEP}) \subset (u\text{-s-SEP}) = (s\text{-s-SEP})$$

が判明した。したがって、前述 (c) の欧米の研究者の主流派の考え方は否定されることとなった。

- 私たちが提唱した「集合均衡点問題」は、「type 1」と「type 6」の必要性について暗に示している結果となった。

荒谷は集合最適化の研究を始めた頃は研究テーマの理由から「黒岩派」だったが、以上のことから最近では (d) の考えに至った。

(d) 現在の荒谷：上記の6タイプの内、「type 1・type 3(l)・type 5(u)・type 6」を基本として、スカラー化の際は「 $l&u$ 」を採用する。

5 集合関係について：最近の動向

- 集合最適化は実質的に黒岩-田中-Ha[9] から始まり、今なお重要な論文である。その後 Jahn-Ha[7] や最近では Chen-Köbis-Köbis-Yao[2, 3] など新しいアイデアが続々生まれている。また、「集合のベクトル化：Jahn[8]」も応用上重要な研究課題である。
- 荒谷・齋藤・木村は、所属学科の要請から「確率・統計学」への応用を意識した研究が重要である。したがって、荒谷・齋藤・木村は「集合関係」と「確率・統計学」の融合を図る研究に取り組み始めている。

6 新しい集合関係について

設定

$$A, B \subset \mathbb{R}, \quad C = \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \quad A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

- 下記の集合関係は、集合のベクトル化（参考：Jahn[8]）の一種である。
- 可算個のデータを扱う際には、 $n, m \rightarrow \infty$ とすればよいか？また、ベクトルデータを扱う際には、 C に閉集合などの仮定が必要かも知れない。

6.1 データの平均で比較

(各データの平均が大きい方を「大きい」とみなす。)

$$(1) \text{ 算術平均: } A \leq_C^{(\text{ave})} B \iff \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq_C \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_m}{m}$$

通常使われている「平均」なので、応用先が一番広そうである。さらに発展させて、重み付け平均も定義する。

$$A \leq_C B \iff \frac{t_1 a_1 + t_2 a_2 + \cdots + t_n a_n}{n} \leq_C \frac{s_1 b_1 + s_2 b_2 + \cdots + s_m b_m}{m}$$

$$(n = t_1 + t_2 + \cdots + t_n, m = s_1 + s_2 + \cdots + s_m)$$

$$(2) \text{ 幾何平均: } A \leq_C^{(\text{geo})} B \iff \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq_C \sqrt[m]{b_1 b_2 \cdots b_m}$$

成長率を表す場合、指数関数的成長（成長率が一定の場合）でもそうでなくても、算術平均より幾何平均の方が適している。

(例1) 植物の平均成長率の比較

A : オレンジの木の果実成長率の集合、

B : 林檎の木の果実成長率の集合、

$a_1, a_2 \cdots a_n$: オレンジの木の各年の果実成長率、

$b_1, b_2 \cdots b_m$: 林檎の木の各年の果実成長率

Q 上記の例において、 $\leq_C^l, \leq_C^u, \leq_C^{(\text{geo})}$ は何を表しているか？

A \leq_C^l : 林檎の木の果実成長率の最低となる年の成長率は、オレンジの果実成長率の最低となる年のそれより大きい。

\leq_C^u : 林檎の木の果実成長率の最高となる年の成長率は、オレンジの果実成長率の最高となる年のそれより大きい。

$\leq_C^{(\text{geo})}$: 林檎の木の果実成長率の平均成長率は、オレンジの果実成長率のそれより大きい。

\implies この問題に関しては、 \leq_C^l, \leq_C^u などより、 $\leq_C^{(\text{geo})}$ の方が有用性が高そうだ。

(例2) 企業間の投資利益率の比較

(例3) 社会的統計データの比較

$$(3) \text{ 調和平均: } A \leq_C^{(\text{harm})} B \iff \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq_C \frac{m}{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_m}}$$

調和平均は、典型的には率や比に対する平均を考える場合に適切である。

(例1) 乗り物の平均速度の比較

A : 自動車のある区間における速度の集合

B : 電車のある区間における速度の集合

$a_1, a_2 \cdots a_n$: 自動車のある区間の速度

$b_1, b_2 \cdots b_m$: 電車のある区間の速度

□ Q 上記の例において、 $\leq_C^l, \leq_C^u, \leq_C^{(\text{harm})}$ は何を表しているか？

□ A \leq_C^l : 電車のある区間における最低の速度は、自動車のそれより大きい。

\leq_C^u : 電車のある区間における最高の速度は、自動車のそれより大きい。

$\leq_C^{(\text{harm})}$: 電車のある区間における平均速度は、自動車のそれより大きい。

⇒ この問題についても、 \leq_C^l, \leq_C^u などより、 $\leq_C^{(\text{harm})}$ の方が有用性が高そうだ。

(例 2) 電気回路の抵抗値の計算 (並列)

(例 3) コンデンサの容量の計算 (直列)

(例 4) 情報処理で稼働率 (故障率) の比較

(例 5) ファイナンスにおいて調和平均は、株価収益率のような比率の平均を得るのに好ましい方法である。もしこれらの比率を算術平均すると (よくある間違い)、大きい値の方が小さい値よりも重みづけされる。一方で調和平均では、各値に等しい重みが与えられる。

(この節で紹介した例は、Wikipedia の「幾何平均・調和平均」の頁を参考にした。)

6.2 データの分散で比較

(各データの分散が大きい方を「大きい」とみなす。)

$$A \leq_C^{(\text{var})} B \iff \text{Var}(A) \leq \text{Var}(B) \quad \left[\text{Var}(A) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 \right]$$

2変数以上の場合は、相関係数を用いる方法・分散共分散行列を用いる方法など様々な考え方がありそうだ。どのように定義するのがよいかは、これからの課題である。

7 まとめ

これまでの集合関係の定義は、集合の「ふち (境界)」に注目するものがほとんどであり、集合のスカラー化を考える際でも、その「ふち」を特徴づけるものであった。しかし、統計学の観点からは、「要素 (データ) の平均値」「要素 (データ) の散り張り具合」なども重要な指標であり、問題によってはそれらも考慮する必要がある。

よって「集合関係」は我々が現在考えているものよりもっと多様な定義があり、しかももっと幅広い応用がある可能性が高いと筆者は考えている。

謝辞 本稿では、秋田県立大学の木村寛先生・齋藤裕先生から助言・アドバイスを頂き、本稿の内容をさらに深めることができました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- [1] Y. Araya, *Four types of nonlinear scalarizations and some applications in set optimization*, *Nonlinear Anal.* 75, (2012) 3821–3835.
- [2] E. Köbis, M. Köbis, J. Yao, *Generalized upper set less order relation by means of a nonlinear scalarization functional*, *J. Nonlinear Convex Anal.* 17 (2016), no. 4, 725–734.
- [3] J. Chen, E. Köbis, M. Köbis, J. Yao, *A new set order relation in set optimization*, *J. Nonlinear Convex Anal.* 18 (2017) 637–649.
- [4] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zălinescu *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer-Verlag, New York (2003).
- [5] A. Hamel and A. Löhne, *Minimal element theorems and Ekeland’s principle with set relations*, *J. Nonlinear and Convex Anal.* 7, (2006) 19–37.
- [6] E. Hernández, L. Rodríguez-Marín, *Nonconvex scalarization in set-optimization with set-valued maps*, *J. Math. Anal. Appl.* 325, (2007) 1–18.
- [7] J. Jahn and T.X.D. Ha, *New order relations in set optimization*, *J. Optim. Theory Appl.* 148, (2011) 209–236.
- [8] J. Jahn, *Vectorization in set optimization*, *J. Optim. Theory Appl.* 167 (2015) 783–795.
- [9] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T.X.D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, *Nonlinear Anal.* 30, (1997) 1487–1496.
- [10] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Characterization of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps*, in *Nonlinear Analysis and Optimization*, S. Akashi, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), Yokohama Publishers, Yokohama (2009) 193–204.
- [11] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Inherited properties of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps*, in *Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, S. Akashi, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), Yokohama Publishers, Yokohama (2010) 161–177.
- [12] D. T. Luc, *Theory of vector optimization*, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 319, Springer-Verlag, Berlin (1989).
- [13] S. Nishizawa, T. Tanaka, and P. Gr. Georgiev, *On inherited properties of set-valued maps*, in *Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), Yokohama Publishers, Yokohama (2003) 341–350.