数理解析研究所講究録 第2112巻 2019年 208-212

On the resolvent of the sum of maximal monotone operators*

秋田県立大学 システム科学技術学部 † 松下 慎也 ‡(Shin-ya Matsushita)

1 はじめに

次の問題を考える:

$$\text{find } u \in H \text{ s.t. } z \in (I + A + B)(u), \tag{1.1}$$

ただし、z はヒルベルト空間 H の点、$A, B\colon H \rightrightarrows H$ は極大単調 (2 章参照) とする。(1.1) を満たす点 u 全体の集合を S、つまり、$S = \{v \in H : z \in (I + A + B)(v)\}$ と表す。問題 (1.1) は画像ノイズ除去問題や複数個ある凸集合の共通部分に対する射影を求める問題 (最良近似問題) に応用できる数理モデルとして知られている [1, 2, 4]。

本論文では、問題 (1.1) に Douglas-Rackdord の分割法 [5] を適用することを考える。問題 (1.1) に対する Douglas-Rackdord の分割法は以下のようになる

$$x_0 \in H, \quad x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + R_B\left(R_{I-z+A}(x_k)\right)) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1.2}$$

ただし、I は H 上の恒等写像、$R_{I-z+A} = 2J_{I-z+A} - I$、$R_B = 2J_B - I$、$J_B$ は集合値写像 B に対するリゾルベントと呼ばれ、次のように定義される。

$$J_B(x) = \{u \in H : x \in (I + B)(u)\}. \tag{1.3}$$

特に極大単調作用素に対するリゾルベントは一価写像となることが知られている [2, 6, 7]。本論文を通して、A と B のリゾルベント J_A と J_B は容易に計算できると仮定する。リゾルベントの定義 (1.3) から、問題 (1.1) は集合値写像 A と B の和 $A + B$ の点 z におけるリゾルベント $J_{A+B}(z)$ を求める問題と解釈できる。問題 (1.1) の解が存在するとき、Combettes による結果 [3, Theorem 2.1] を用いることで点列 $\{J_{I-z+A}(x_k)\}$ が解に強収束することが保障される。

本論文では、以下の内容について考察する。

(1) 問題 (1.1) の解の存在性について。

(2) リゾルベント J_{I-z+A} 構成方法について。

---

* This work was supported by the Ministry of Education, Culture, Sports, Science, and Technology [16K05280] and the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

† 〒015-0055 秋田県由利本荘市土谷字海老ノ口 84-4

‡ e-mail: matsushita@akita-pu.ac.jp http://www.akita-pu.ac.jp/system/elect/sce/matsushita/

問題 (1.1) の解の存在を保証する条件として制約想定がある。A と B が適当な制約想定 ($\mathrm{dom}A \cap \mathrm{int\ dom}B \neq \emptyset$ など) を満たす時、$A+B$ は極大単調性となる。このとき、$I+A+B$ の値域が全空間 H と一致するため、問題 (1.1) の解が存在する。しかしながら、制約想定を確認するためには、対象とする作用素の定義域に関する情報をあらかじめ知っておく必要がある。本論文では、制約想定とは異なる解の存在を保証するための条件について検討する。一方、点列 (1.2) を構成するにはリゾルベント J_{I-z+A} が必要となる。作用素 $I-z+A$ は極大単調であるため、理論的にはリゾルベントが定義できるが、どのように計算するかは明らかでない。

本研究では (1)、(2) に動機付けられて、J_{I-z+A} の構成方法と問題 (1.1) の解の存在性について研究する。特に J_{I-z+A} は J_A を用いて表現できることを示す。また、問題 (1.1) の解の存在が非拡大写像に対する不動点定理と直接関係することを示す。

2 準備

本論文を通して H を実ヒルベルト空間とし、$\langle\cdot,\cdot\rangle$ と $\|\cdot\|$ をそれぞれ H の内積とノルムとする。作用素 $A\colon H \rightrightarrows H$ が単調とは、

$$\langle x-y, x^*-y^*\rangle \quad (\forall (x,x^*),(y,y^*) \in \mathrm{Gr}(A)) \tag{2.1}$$

が成り立つときをいう。ここで、$\mathrm{Gr}(A)$ は A のグラフ、つまり $\mathrm{Gr}(A) = \{(x,x^*) | x^* \in A(x)\}$ の事である。また、A が極大単調とは A が単調かつ

$$B\colon H \rightrightarrows H \text{ (単調)}, \mathrm{Gr}(A) \subset \mathrm{Gr}(B) \ \Rightarrow \ A = B$$

が成り立つときをいう。$u \in H$ とする。$0 \in A(u)$ が成り立つとき、u を A の零点という。また、A の零点全体の集合を $A^{-1}(0)$、つまり $A^{-1}(0) = \{u \in H : 0 \in A(u)\}$ とする。$f\colon H \to [-\infty, \infty)$ を下半連続な真凸関数とする。f に対する劣微分を以下のように定義する。

$$\partial f(x) = \{x^* \in H : f(y) \geq f(x) + \langle y-x, x^*\rangle \ (\forall x \in H)\}.$$

このとき、$\partial f\colon H \rightrightarrows H$ は極大単調になることが知られている [2, 6, 7]。

$C(\subset H)$ を空でない閉凸集合とする。集合 C の指示関数 i_C を

$$i_C(x) = \begin{cases} 0 & (x \in C) \\ \infty & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定義する。このとき、i_C は下半連続な真凸関数となり、$J_{\partial i_C} = P_C$ が成り立つ。ここで、$P_C\colon H \to C$ は集合 C の上への距離射影といい、

$$P_C(x) = \operatorname*{argmin}_{y \in C} \|x-y\| \ (\forall x \in H)$$

で定義される。

写像 $T\colon H \to H$ と点 $v \in H$ に対して、$T(v) = v$ が成り立つとき、v を写像 T の不動点という。また、T の不動点全体の集合を $\mathrm{Fix}(T)$、つまり $\mathrm{Fix}(T) = \{v \in H : T(v) = v\}$ とする。写像 $T\colon H \to H$ が非拡大とは、

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\| \ (\forall x, y \in H)$$

が成り立つときをいう。本節で述べた基礎概念については、文献 [2, 6, 7] を参照するとよい。

主定理を得るため、次の結果は重要である。

命題 2.1. ([2]) $A, B\colon \rightrightarrows H$ を極大単調作用素とし、$r > 0$ とする。このとき、以下が成り立つ。

(1) R_{rA} は非拡大;

(2) $(A + B)^{-1}(0) = J_{rA}\left(\mathrm{Fix}(R_{rB} R_{rA})\right)$.

3　主結果

J_{I-z+A} について、以下の結果が成り立つ。

命題 3.1. $A\colon H \rightrightarrows H$ を極大単調、$z \in H$ とする。このとき、

$$J_{r(I-z+A)}(x) = J_{\frac{r}{1+r}A}\left(\frac{1}{1+r}(x + rz)\right) \ (\forall r > 0, \forall x \in H)$$

が成り立つ。

証明. $x \in H$、$r > 0$ とする。$v = J_{r(I-z+A)}(x)$ とおくと、リゾルベントの定義より、

$$\begin{aligned} x \in v + r(I - z + A)(v) &\Leftrightarrow x \in (1 + r)v - rz + rA(v) \\ &\Leftrightarrow x + rz \in (1 + r)v + rA(v) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1+r}(x + rz) \in \left(I + \frac{r}{1+r}A\right)(v) \end{aligned}$$

これより

$$J_{r(I-z+A)}(x) = J_{\frac{r}{1+r}A}\left(\frac{1}{1+r}(x + rz)\right)$$

が成り立つ。 □

命題 3.1 より、(1.2) は以下の様になる。

$$\begin{aligned} x_0 \in H,\ x_{k+1} &= \frac{1}{2}(x_k + R_B\left(R_{I-z+A}(x_k)\right)) \\ &= \frac{1}{2}\left(x_k + R_B\left(2J_{\frac{1}{2}A}\left(\frac{1}{2}\left(x_k + z\right)\right) - x_k\right)\right) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{3.1}$$

また、問題 (1.1) の解が存在するとき、点列 $\left\{J_{\frac{1}{2}A}\left(\frac{1}{2}\left(x_k + z\right)\right)\right\}$ は解に強収束する。

一方、問題 (1.1) は $I - z + A$ と B の和の零点、つまり $(I - z + A + B)^{-1}(0)$ に含まれる点を見つける問題と考えることができる。これと命題 2.1 を組み合わせると以下の結果が成り立つ。

命題 3.2. $A, B\colon H \rightrightarrows H$ を極大単調とする。このとき以下が成り立つ。

$$S = J_{I-z+A}\left(\mathrm{Fix}(R_B R_{I-z+A})\right).$$

証明. 命題 2.1 (2) と $S = (I - z + A + B)^{-1}(0)$ が示せることから成り立つ。 □

命題 3.2 より、問題 (1.1) の解の存在性と写像 $R_B R_{I-z+A}$ の不動点の存在性が等価になることがわかる。命題 2.1 (1) より写像 $R_B R_{I-z+A}$ は非拡大写像となり、問題 (1.1) の解の存在性は非拡大写像 $R_B R_{I-z+A}$ の不動点定理に帰着できる。非拡大写像の不動点定理については、文献 [2, 6, 7] を参照するとよい。

4　応用

3 章の結果を最良近似問題に応用する。$C, D (\subset H)$ を空でない閉凸集合、$z \in H$ とする。次の問題を考える:

$$\text{minimize } \frac{1}{2}\|x - z\|^2 + i_C(x) + i_D(x). \tag{4.1}$$

問題 (4.1) は与えられた点 z から最も近い集合 C と集合 D の共通部分 $C \cap D$ に含まれる点を見つける問題 (最良近似問題) である。劣微分を用いることで問題 (4.1) は以下の包含を満たす点 u を見つける問題と等価になる。

$$0 \in (I - z + \partial(i_C + i_D))(u).$$

一方、∂i_C と ∂i_D はそれぞれ極大単調であり、劣微分の性質より $(\partial i_C + \partial i_D)(x) \subset \partial(i_C + i_D)(x)$ $(\forall x \in H)$ が成り立つ。したがって、$A := \partial i_C$ と $B := \partial i_D$ とすれば、問題 (1.1) の解、つまり

$$z \in (I + \partial i_C + \partial i_D)(u) \tag{4.2}$$

を満たす点 u は問題 (4.1) の解となることがわかる。

3 章の結果を応用して、以下の定理を得ることができる。

定理 4.1. $C, D (\subset H)$ を空でない閉凸集合とし、$z \in H$ とする。点列 $\{x_k\}$ を以下の方法によって生成する。

$$x_0 \in H, x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + (2P_D - I)\left(2P_C\left(\frac{1}{2}(x_k + z)\right) - x_k\right)\right) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

このとき、以下が成り立つ。

(1) (4.2) が解を持つための必要十分条件は非拡大写像 $(2P_D - I)\left(2P_C\left(\frac{1}{2}I + z\right) - I\right)$ の不動点が存在することである。

(2) (4.2) が解を持つ時、点列 $\left\{P_C\left(\frac{1}{2}(x_k + z)\right)\right\}$ は問題 (4.1) の解に強収束する。

参考文献

[1] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *A Dykstra-like algorithm for two monotone operators*, Pac. J. Optim. 4, 383-391 (2008).

[2] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, Springer, New York, 2011.

[3] P. L. Combettes, *Iterative construction of the resolvent of a sum of maximal monotone operators*, J. Convex Anal. **16** (2009), 727-748.

[4] Combettes, P.L., Pesquet, J.-C.: *Proximal splitting methods in signal processing.* in Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering, Springer Optim. Appl. 49, Springer, New York 185-212 (2011)

[5] P.-L. Lions and B. Mercier, *Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators*, SIAM J. Numer. Anal. **16** (1979), 964-979.

[6] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis. fixed points theory and its applications*, Yokohama Publishers, Yokohama 2000.

[7] 高橋渉, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書, 2005.