数理解析研究所講究録 第2112巻 2019年 213-222



# 堅擬非拡大写像と劣勾配射影
# Cutter mappings and subgradient projections in Banach spaces

千葉大学・社会科学研究院 青山耕治
Koji Aoyama
Graduate School of Social Sciences,
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H06, 47J20, 47J25.
*Keywords and phrases.* 距離射影, P 型写像, 堅擬非拡大写像, 劣勾配射影, 不動点.

## 1 はじめに

本稿では, まず, Banach 空間上の閉凸集合についての最良近似問題を考え, それに関する収束定理を述べる (第 3 節).

次に, Banach 空間の距離射影に基づく劣勾配射影の定義を述べ, その射影の基本性質, 例えば, 劣勾配射影が堅擬非拡大であることを示す (第 4 節). ここで扱う劣勾配射影は, Banach 空間上の距離射影の拡張であり, 文献 [2], [6] および [7] で扱われている Hilbert 空間上の劣勾配射影の一般化である.

最後に, Banach 空間の堅擬非拡大写像の列の共通不動点の近似に関する定理を紹介する (第 5 節).

## 2 準備

本稿では, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合, $\mathbb{R}$ を実数の集合, $E$ を実 Banach 空間, $E^*$ を $E$ の共役空間とし, $E$ および $E^*$ のノルムを $\|\cdot\|$ で, $x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値を $\langle x, x^* \rangle$ で表す. また, $C$ を $E$ の部分集合とするとき, 写像 $T\colon C \to E$ の不動点の集合を $\mathrm{F}(T)$ で, $E$ の点列 $\{x_n\}$ が $x$ へ強収束することを $x_n \to x$ で, 弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ で表す.

$E$ の双対写像 (duality mapping) を $J$ で表す。つまり, $J$ は $E$ から $E^*$ への集合値写像で, $x \in E$ のとき, $Jx = \left\{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\right\}$ である。$E$ が滑らか (smooth), 狭義凸 (strictly convex) かつ回帰的ならば, 双対写像 $J$ は全単射で, $J^{-1}$ は $E^*$ の双対写像であることが知られている [11]. また, $E$ が Hilbert 空間のとき, $J$ は恒等写像である.

$E$ を滑らかな Banach 空間, $C$ を $E$ の部分集合とする．このとき, 写像 $S\colon C \to E$ が P 型であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\langle Sx - Sy, J(x - Sx) - J(y - Sy) \rangle \geq 0 \tag{2.1}$$

が成り立つときをいう [4, 5]．また, 写像 $S\colon C \to E$ が P 型堅擬非拡大であるとは, $\mathrm{F}(S) \neq \emptyset$ であり, すべての $x \in C$, $z \in \mathrm{F}(S)$ に対して

$$\langle Sx - z, J(x - Sx) \rangle \geq 0 \tag{2.2}$$

が成り立つときをいう [3]．定義より直ちに, 不動点をもつ P 型写像は, P 型堅擬非拡大であることがわかる．

**註 1.** $E$ を Hilbert 空間とする．このとき $J$ は恒等写像であるから, (2.1) は

$$\|Sx - Sy\|^2 \leq \langle Sx - Sy, x - y \rangle \tag{2.3}$$

と変形できる．これより

$$\|Sx - Sy\| \leq \|x - y\| \tag{2.4}$$

を得る．また, (2.2) は

$$\|Sx - z\|^2 \leq \langle Sx - z, x - z \rangle$$

と変形でき, これより

$$\|Sx - z\| \leq \|x - z\| \tag{2.5}$$

を得る．写像 $S$ が (2.3) を満たすとき, $S$ は堅非拡大 (firmly nonexpansive) であるという [8]．つまり, P 型写像は, Hilbert 空間上の堅非拡大写像の一般化の一つである [5]．また, 写像 $S$ が (2.4) を満たすとき, $S$ は非拡大 (nonexpansive) であるという [8, 12]．つまり, Hilbert 空間上の堅非拡大写像は非拡大である．さらに, 写像 $S$ が (2.5) を満たすとき, $S$ は擬非拡大 (quasinonexpansive) であるという．

**註 2.** 文献 [1] では, (2.1) を満たす写像を, “firmly nonexpansive-like mapping” と呼んでいる．また, 文献 [3, 9] では, (2.2) を満たす写像を, “cutter mapping of type (P)” と呼んでいる．

$E$ を滑らか, 狭義凸かつ回帰的な Banach 空間, $C$ を $E$ の空でない閉凸部分集合とする．このとき, 各 $x \in E$ に対して, $\|x - z\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}$ を満たす $z \in C$ がただ一つ存在する．その点 $z$ を $P_C(x)$ と表し, $P_C$ を $E$ から $C$ の上への距離射影 (metric projection) と呼ぶ．距離射影は, P 型であることが知られている [5, Examples 3.1]．さらに, 距離射影について次のことが知られている．

**補助定理 2.1** ([11, Corollary 6.5.5]). $E$ を滑らか, 狭義凸かつ回帰的な Banach 空間, $C$ を $E$ の空でない閉凸部分集合とし, $x \in E$, $z \in C$ とする. このとき, $P_C(x) = z$ であるための必要十分条件は, すべての $y \in C$ に対して

$$\langle z - y, J(x - z) \rangle \geq 0$$

が成り立つことである.

**補助定理 2.2.** $E$ を滑らか, 狭義凸かつ回帰的な Banach 空間とし, $x^* \in E^* \setminus \{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $M = \{y \in E \colon \langle y, x^* \rangle \leq \beta\}$, $x \in E \setminus M$ とする. このとき

$$P_M(x) = x - \frac{\langle x, x^* \rangle - \beta}{\|x^*\|^2} J^{-1} x^*$$

が成り立つ.

**証明.** $\lambda = \dfrac{\langle x, x^* \rangle - \beta}{\|x^*\|^2}$, $z = x - \lambda J^{-1} x^*$ とおくと, $\langle z, x^* \rangle = \beta$ であり, $\langle x, x^* \rangle > \beta$ より $\lambda > 0$ である. $y \in M$ のとき, $\langle y, x^* \rangle \leq \beta$ であるから,

$$\langle z - y, J(x - z) \rangle = \lambda \langle z - y, x^* \rangle = \lambda(\beta - \langle y, x^* \rangle) \geq 0.$$

したがって, 補助定理 2.1 より, $P_M(x) = z$ である. $\square$

$g \colon E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を凸関数とする. このとき, 写像 $\partial g \colon E \to 2^{E^*}$ を, $x \in E$ に対して

$$\partial g(x) = \{x^* \in E^* \colon g(y) \geq g(x) + \langle y - x, x^* \rangle \ (\forall y \in E)\}$$

で定義する. $\partial g$ は $g$ の劣微分 (subdifferential) と呼ばれ, 次のことが知られている.

**定理 2.3** ([12, 定理 4.2.9]). $g \colon E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を凸関数とし, $a \in E$, $g(a) \in \mathbb{R}$ であり, $g$ は $a$ で連続であるとする. このとき, $\partial g(a) \neq \emptyset$ である.

以下は, 第 5 節で扱う定理を理解するための準備である.

$C$ を $E$ の空でない集合とし, $\{T_n\}$ を $C$ から $E$ への写像列で, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}(T_n) \neq \emptyset$ とする. このとき, $\{T_n\}$ が条件 (Z2) を満たすとは, $\{z_n\}$ が $z_n - T_n z_n \to 0$ および $z_n - z_{n+1} \to 0$ となる $C$ の有界点列であるとき, $\{z_n\}$ のすべての弱収積点が $F$ に属するときをいう [3, 4]. また, $\{T_n\}$ が条件 (Z3) を満たすとは, $\{z_n\}$ が $z_n \to p$ および $z_n - T_n z_n \to 0$ となる $C$ の点列であるとき, $p \in F$ となるときをいう [3]. 定義より, $\{T_n\}$ が条件 (Z2) を満たすならば, 条件 (Z3) を満たすことがわかる.

Banach 空間 $E$ が Kadec–Klee 性をもつとは, $\{x_n\}$ が $E$ の点列で, $x_n \rightharpoonup x \in E$ および $\|x_n\| \to \|x\|$ ならば, $x_n \to x$ が成り立つときをいう.

## 3　最良近似問題と文献 [4] の結果

本節では, 次のような最良近似問題を考え, 文献 [4] で得られた結果を二つ述べる (定理 3.2 および 3.3). そして, Pang [10] の定理が, そのうちの一つ (定理 3.3) の系であることを説明する[*1].

**問題 3.1.** $E$ を滑らかで一様凸な Banach 空間, $x \in E$, $N \in \mathbb{N}$, $\{K_i\}_{i=1}^N$ を $E$ の閉凸部分集合の族, $P_i$ を $E$ から $K_i$ の上への距離射影 ($i \in \{1, \dots, N\}$) とし, $K = \bigcap_{i=1}^N K_i \neq \emptyset$ を仮定する. このとき, $\{P_i\}_{i=1}^N$ を使って $P_K(x)$ を求めよ.

**定理 3.2** ([4, Theorem 5.1])**.** $\{\alpha_n\}$ を $[0, 1)$ の数列, $r$ を $\mathbb{N}$ から $\{1, 2, \dots, N\}$ への写像とし, $\sup_n \alpha_n < 1$ を仮定する. さらに, 各 $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ に対して, $p_k \in \mathbb{N}$ が存在し, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$k \in \bigl\{r(n), r(n+1), \dots, r(n+p_k-1)\bigr\}$$

が成り立つと仮定する. 点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 = x$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) P_{r(n)}(x_n); \\ C_n = \{z \in E \colon \langle y_n - z, J(x_n - y_n)\rangle \geq 0\}; \\ D_n = \{z \in E \colon \langle x_n - z, J(x - x_n)\rangle \geq 0\}; \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

で定義する. このとき, $\{x_n\}$ は $P_K(x)$ に強収束する.

**定理 3.3** ([4, Theorem 5.2])**.** $E$, $\{\alpha_n\}$ および $r \colon \mathbb{N} \to \{1, 2, \dots, N\}$ を定理 3.2 と同じとし, 点列 $\{x_n\}$ を, $C_1 = E$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} x_n = P_{C_n}(x); \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) P_{r(n)}(x_n); \\ C_{n+1} = \{z \in C_n \colon \langle y_n - z, J(x_n - y_n)\rangle \geq 0\} \end{cases}$$

で定義する. このとき, $\{x_n\}$ は $P_K(x)$ に強収束する.

Hilbert 空間は, 滑らかで一様凸な Banach 空間である. また, $n \in \mathbb{N}$ を $N$ で割ったときの余りに 1 を加えた整数を $[n]$, つまり, $[n] = (n \mod N) + 1$ とすれば, 各

[*1] このことは, 秋田県立大学の松下慎也先生に教えて頂いた.

$k \in \{1, \dots, N\}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$k \in \{1, \dots, N\} = \big\{[n], [n+1], \dots, [n+N-1]\big\}$$

となる．したがって, 定理 3.3 で, $E$ を Hilbert 空間, $\alpha_n \equiv 0$ とし, $r\colon \mathbb{N} \to \{1, \dots, N\}$ を $r(n) = [n]$ とすることにより, 直ちに次の系が得られる．

**系 3.4** (Pang [10, Theorem 3.3] の (3.1a) の場合)**.** $E$ を Hilbert 空間, 点列 $\{x_n\}$ を, $C_1 = E$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} x_n = P_{C_n}(x); \\ C_{n+1} = \{z \in C_n\colon \big\langle P_{[n]}(x_n) - z, x_n - P_{[n]}(x_n)\big\rangle \geq 0\} \end{cases}$$

で定義する．このとき, $\{x_n\}$ は $P_K(x)$ に強収束する．

## 4 Banach 空間の距離射影に基づく劣勾配射影

本節では, Banach 空間の距離射影に基づく劣勾配射影を定義し, その後, その基本性質を述べる．特に, ここで定義する劣勾配射影が P 型堅擬非拡大であることと, 距離射影の一般化であることを示す．

以下, $E$ を滑らか, 狭義凸, 回帰的な Banach 空間, $g\colon E \to \mathbb{R}$ を連続な凸関数とし,

$$C = \{x \in E\colon g(x) \leq 0\}$$

とおき, $C$ は空ではないと仮定する．また, $h\colon E \to E^*$ を, $x \in E$ に対して $h(x) \in \partial g(x)$ となる写像とする．ここで, $\partial g$ は $g$ の劣微分である．定理 2.3 より, このような写像 $h$ は少なくとも一つ存在する．このとき

$$x \in E \setminus C \Rightarrow h(x) \neq 0 \tag{4.1}$$

が成り立つ．実際, $x \in E$, $h(x) = 0$ とすると, $\partial g$ の定義より, すべての $y \in E$ に対して $g(x) \leq g(y)$ となる．特に, $y \in C$ のとき $g(y) \leq 0$ だから, $g(x) \leq 0$, つまり, $x \in C$ である．これで, (4.1) が示せた．

劣勾配射影の定義に必要な写像 $L\colon E \to 2^E$ を, $x \in E$ に対して

$$L(x) = \{y \in E\colon g(x) + \langle y - x, h(x)\rangle \leq 0\}$$

で定める．このとき, すべての $x \in E$ に対して, $L(x)$ は $E$ の閉凸部分集合であり,

$$C \subset L(x) \tag{4.2}$$

が成り立つ．実際, $x \in E$, $y \in C$ とすると, $h(x) \in \partial g(x)$, $g(y) \le 0$ であるから,

$$g(x) + \langle y - x, h(x) \rangle \le g(y) \le 0$$

となり, $y \in L(x)$ である．これで, (4.2) が示せた．したがって, 仮定 $C \neq \emptyset$ に注意すると, すべての $x \in E$ に対し, $E$ から $L(x)$ の上への距離射影 $P_{L(x)}$ が常に定まる．

以上の準備を踏まえて, 劣勾配射影を定義する．$E$ から $E$ への写像 $E \ni x \mapsto P_{L(x)}(x)$ を, $g$ と $h$ に関する劣勾配射影 (subgradient projection) といい, $\mathcal{P}_{g,h}$ で表す．つまり, $x \in E$ に対して

$$\mathcal{P}_{g,h}(x) = P_{L(x)}(x)$$

である．$x \in C$ のとき, (4.2) より $x \in L(x)$ だから, $\mathcal{P}_{g,h}(x) = P_{L(x)}(x) = x$ である．また, $x \in E \setminus C$ のとき, (4.1) より $h(x) \neq 0$ であり,

$$L(x) = \{y \in E \colon \langle y, h(x) \rangle \le \langle x, h(x) \rangle - g(x)\}$$

に注意すると, 補助定理 2.2 より, $\mathcal{P}_{g,h}(x) = P_{L(x)}(x) = x - \dfrac{g(x)}{\|h(x)\|^2} J^{-1}h(x)$ となる．以上より, $g$ と $h$ に関する劣勾配射影は

$$\mathcal{P}_{g,h}(x) = \begin{cases} x - \dfrac{g(x)}{\|h(x)\|^2} J^{-1}h(x) & (x \in E \setminus C); \\ x & (x \in C) \end{cases} \tag{4.3}$$

と表せる．

次に, 劣勾配射影は P 型堅擬非拡大であることを示す．

**命題 4.1** ([3, Lemma 5.1] の一部)**.** $\mathrm{F}(\mathcal{P}_{g,h}) = C$ であり, $\mathcal{P}_{g,h}$ は P 型堅擬非拡大である．

**証明**. $\mathrm{F}(\mathcal{P}_{g,h}) = C$ を示す． (4.3) より, $\mathrm{F}(\mathcal{P}_{g,h}) \supset C$ は明らか． $x \in E \setminus C$ のとき, $g(x) > 0$ であり, (4.1) より $h(x) \neq 0$ だから, 再び (4.3) より,

$$\|\mathcal{P}_{g,h}(x) - x\| = \frac{|g(x)|}{\|h(x)\|^2} \|h(x)\| = \frac{|g(x)|}{\|h(x)\|} \neq 0$$

が成り立つ．よって, $x \notin \mathrm{F}(\mathcal{P}_{g,h})$, つまり, $\mathrm{F}(\mathcal{P}_{g,h}) \subset C$ が示せた．

次に $\mathcal{P}_{g,h}$ が P 型堅擬非拡大であること, つまり, $x \in E$, $y \in \mathrm{F}(\mathcal{P}_{g,h}) = C$ のとき,

$$\big\langle y - \mathcal{P}_{g,h}(x), J\big(x - \mathcal{P}_{g,h}(x)\big)\big\rangle \le 0 \tag{4.4}$$

が成り立つことを示す. $x \in C$ のとき, $\mathcal{P}_{g,h}(x) = x$ だから, 明らかに (4.4) が成り立つ. 一方, $x \in E \setminus C$ のとき, (4.3) より

$$\begin{aligned}\bigl\langle y - \mathcal{P}_{g,h}(x), J\bigl(x - \mathcal{P}_{g,h}(x)\bigr)\bigr\rangle &= \left\langle y - x + \frac{g(x)}{\|h(x)\|^2} J^{-1} h(x), \frac{g(x)}{\|h(x)\|^2} h(x) \right\rangle \\ &= \frac{g(x)}{\|h(x)\|^2} \bigl[\langle y - x, h(x)\rangle + g(x)\bigr]\end{aligned}$$

となる. ここで, $h(x) \in \partial g(x)$, $g(x) > 0$ であり, $y \in C$ より $g(y) \leq 0$ だから,

$$\bigl\langle y - \mathcal{P}_{g,h}(x), J\bigl(x - \mathcal{P}_{g,h}(x)\bigr)\bigr\rangle \leq \frac{g(x)}{\|h(x)\|^2} g(y) \leq 0$$

を得る. したがって, (4.4) が示せた. □

次に, 劣勾配射影が距離射影の一般化であることを示す.

**命題 4.2.** $D$ を $E$ の空でない閉凸部分集合とし, $g\colon E \to \mathbb{R}$ と $h\colon E \to E^*$ を, $x \in E$ に対して, $g(x) = \inf\{\|y - x\| : y \in D\}$ および

$$h(x) = \begin{cases} J\bigl(x - P_D(x)\bigr) / \|x - P_D(x)\| & (x \in E \setminus D); \\ 0 & (x \in D) \end{cases}$$

で定義し, $C = \{x \in E\colon g(x) \leq 0\}$ とおく. このとき

(1) $C = D$;
(2) $g$ は連続で凸;
(3) すべての $x \in E$ に対して, $h(x) \in \partial g(x)$;
(4) すべての $x \in E$ に対して, $\mathcal{P}_{g,h}(x) = P_D(x)$ である.

**証明**. まず, (1) を示す. $x \in D$ ならば $g(x) = 0$ なので, $C \supset D$. 一方, $x \notin D$ のとき, $P_D(x) \neq x$ だから, $g(x) = \|P_D(x) - x\| > 0$. つまり, $x \notin C$. よって, $C \subset D$ が示せた.

(2) を示す. $x_1, x_2 \in E$ とする. $y \in D$ のとき, $\|y - x_1\| \leq \|y - x_2\| + \|x_2 - x_1\|$ だから,

$$\begin{aligned}g(x_1) &= \inf\{\|y - x_1\| : y \in D\} \\ &\leq \inf\{\|y - x_2\| : y \in D\} + \|x_2 - x_1\| = g(x_2) + \|x_2 - x_1\|.\end{aligned}$$

よって, $g(x_1) - g(x_2) \leq \|x_2 - x_1\|$. 同様に, $g(x_2) - g(x_1) \leq \|x_1 - x_2\|$ も得られるから, 結局, $|g(x_1) - g(x_2)| \leq \|x_1 - x_2\|$. したがって, $g$ は連続である. 次に, $x_1, x_2 \in E$,

$\lambda \in [0,1]$ とする．$\lambda P_D(x_1)+(1-\lambda)P_D(x_2) \in D$ だから,

$$\begin{aligned} g\bigl(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\bigr) &= \inf\{\|y-[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\| : y \in D\} \\ &\le \|\lambda P_D(x_1)+(1-\lambda)P_D(x_2)-[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\| \\ &\le \lambda \|P_D(x_1)-x_1\|+(1-\lambda)\|P_D(x_2)-x_2\| \\ &= \lambda g(x_1)+(1-\lambda)g(x_2) \end{aligned}$$

となる．したがって, $g$ は凸である．

(3) を示す．$x \in D$ のとき, $g(x)=0$, $\inf\{g(y)\colon y \in E\} \ge 0$ であるから, $h(x)=0 \in \partial g(0)$ となる．次に, $x \in E \setminus D$, $y \in E$ とする．$P_D(y) \in D$ だから, 補助定理 2.1 より,

$$\bigl\langle P_D(y)-P_D(x), J\bigl(x-P_D(x)\bigr)\bigr\rangle \le 0.$$

よって,

$$\begin{aligned} \|x-P_D(x)\|^2+\bigl\langle y-x, J\bigl(x-P_D(x)\bigr)\bigr\rangle &= \bigl\langle y-P_D(x), J\bigl(x-P_D(x)\bigr)\bigr\rangle \\ &= \bigl\langle y-P_D(y), J\bigl(x-P_D(x)\bigr)\bigr\rangle \\ &\qquad + \bigl\langle P_D(y)-P_D(x), J\bigl(x-P_D(x)\bigr)\bigr\rangle \\ &\le \|y-P_D(y)\|\,\|x-P_D(x)\|. \end{aligned}$$

ゆえに, $g(x)=\|x-P_D(x)\| \neq 0$ に注意すると, 任意の $y \in E$ に対して,

$$g(x)+\langle y-x, h(x)\rangle = \|x-P_D(x)\|+\langle y-x, h(x)\rangle \le \|y-P_D(y)\| = g(y)$$

が成り立つ．したがって, $h(x) \in \partial g(x)$ が示せた．

最後に, (4) を示す．$x \in D$ のとき, (1) より $x \in C$ だから, (4.3) より $\mathcal{P}_{g,h}(x)=x=P_D(x)$ が成り立つ．次に, $x \in E \setminus D$ とする．(1) より $x \in E \setminus C$ だから, 再び (4.3) より,

$$\mathcal{P}_{g,h}(x) = x-\frac{g(x)}{\|h(x)\|}J^{-1}h(x) = x-\frac{\|x-P_D(x)\|}{1}\cdot\frac{x-P_D(x)}{\|x-P_D(x)\|} = P_D(x)$$

となる．以上より, (4) が示せた． □

**註 3.** 劣勾配射影は, Hilbert 空間においても非拡大にならないことが知られている (例えば, [2, Section 4])．よって, 註 1 より, 本節で定義した劣勾配射影は一般に P 型にならないことがわかる．

## 5 P 型堅擬非拡大写像の列に関する収束定理

本節では, 文献 [3] で得られた P 型堅擬非拡大写像の列に関する収束定理のうち代表的なものを二つ紹介する．

**定理 5.1** ([3, Theorem 4.1])**.** $E$ を滑らか, 狭義凸, 回帰的な Banach 空間, $C$ を $E$ の空でない閉凸部分集合, $\{T_n\}$ を $C$ から $E$ への P 型堅擬非拡大写像の列とし, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}(T_n)$ は空ではないと仮定する. 点列 $\{x_n\}$ を, $x \in E$, $x_1 = P_C(x)$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} C_n = \big\{z \in C : \langle T_n x_n - z, J(x_n - T_n x_n)\rangle \geq 0\big\}; \\ D_n = \big\{z \in C : \langle x_n - z, J(x - x_n)\rangle \geq 0\big\}; \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x) \end{cases}$$

で定義する. このとき,

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F \subset C_n \cap D_n$ であり, $\{x_n\}$ は well-defined である;
(2) $E$ が一様凸で, $\{T_n\}$ が条件 (Z2) を満たすならば, $\{x_n\}$ は $P_F(x)$ に強収束する.

**定理 5.2** ([3, Theorem 4.3])**.** $E$ を滑らか, 狭義凸, 回帰的な Banach 空間, $C$ を $E$ の空でない閉凸部分集合, $\{T_n\}$ を $C$ から $E$ への P 型堅擬非拡大写像の列とし, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}(T_n)$ は空ではないと仮定する. 点列 $\{x_n\}$ を, $x \in E$, $x_1 \in C$, $C_1 = C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} C_{n+1} = \{z \in C : \langle T_n x_n - z, J(x_n - T_n x_n)\rangle \geq 0\} \cap C_n; \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x) \end{cases}$$

で定義する. このとき,

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F \subset C_n$ であり, $\{x_n\}$ は well-defined である;
(2) $E$ が Kadec–Klee 性をもち, $\{T_n\}$ が条件 (Z3) を満たすならば, $\{x_n\}$ は $P_F(x)$ に強収束する.

**註 4.** 不動点をもつ P 型写像は P 型堅擬非拡大であるから, これらの結果は, P 型写像の列に関する収束定理を扱った文献 [4] で得られた結果の拡張になっている. 実際, 定理 5.1 が [4, Theorem 3.2] の定理 5.2 が [4, Theorem 3.5] の一般化である.

## 参考文献


[1] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:95, 13.

[2] ———, *Viscosity approximation process for a sequence of quasinonexpansive mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:17, 11.

[3] ———, *Cutter mappings and subgradient projections in Banach spaces*, Linear Nonlinear Anal. **3** (2017), 457–473.

[4] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a family of mappings of type (P) and applications*, Nonlinear analysis and optimization, 2009, pp. 1–17.

[5] ———, *Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: their relations and continuity properties*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 131–147.

[6] H. H. Bauschke and J. M. Borwein, *On projection algorithms for solving convex feasibility problems*, SIAM Rev. **38** (1996), 367–426.

[7] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *A weak-to-strong convergence principle for Fejér-monotone methods in Hilbert spaces*, Math. Oper. Res. **26** (2001), 248–264.

[8] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[9] Y. Kimura and S. Saejung, *Strong convergence for a common fixed point of two different generalizations of cutter operators*, Linear Nonlinear Anal. **1** (2015), 53–65.

[10] C. H. J. Pang, *Set intersection problems: supporting hyperplanes and quadratic programming*, Math. Program. **149** (2015), 329–359.

[11] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000. Fixed point theory and its applications.

[12] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.