

Two transition routes from stable torus to chaotic attractor: via intermittency and via SNA

大阪大学・情報科学研究科 茶碗谷 毅

Tsuyoshi Chawanya

Graduate School of Information Science and Technology,
Osaka University

本講演では、非自律系における分岐現象の一つで、安定トーラスの不安定化に際してみられる「フラクタル化」と呼ばれるものについて、見た目は大きく異なる2種類の分岐シナリオが存在することを示す数値計算の結果と、数値計算で明らかになったこの系がしめす謎の間欠的挙動について紹介した。ここで紹介した内容は酒井貴郁、高橋野似の両氏との共同研究によりえられた結果をもとにしたものである。

1980年代の前半、準周期的（二重周期的）な駆動系とその影響を受ける応答系からなるような系において、正のリアプノフ指数をもたないという意味で「カオス」ではないにも関わらず、アトラクターはカオスの場合に見られるような複雑な形状をもつ例が報告された [1, 2]。この現象において観測されるアトラクターは Strange Non-chaotic Attractor (SNA) と呼ばれ盛んに研究されてきてきた [3, 4]。準周期外力系におけるこれらの SNA は、吸引的な軌道と不安定（反発的／サドル的）な軌道が、非一様に接した状態で共存する場合にはみられるものと考えられる [5]。SNA の発生を伴う分岐の多くは、吸引的な軌道（アトラクター）と不安定な不変集合（サドル／リペラー）の非一様な接触が発生する過程として理解することができることが示され [6-13]、アトラクターが接触する不安定集合のタイプにより、分岐の分類なども行なわれている。

一方、近傍に不安定な不変集合を持たない安定トーラスが「単独」で SNA に変化する例も報告されている。[14]。これは、元々なめらかな吸引的トーラスの形が、パラメータの変化とともに激しく波打つように変化していき、あるパラメータ値から先では連続性を失い SNA となるという現象である。この現象はトーラスの「フラクタル化」と呼ばれている。フラクタル化ルートによる SNA の発生は、準周期外力ロジスティック写像系 (qpFLM 系) においてよく調べられている。この系は 1 + 1 次元の歪積型の構造を持つ非可逆写像系で、フラクタル化ルートによる SNA の発生に限らず準周期外力系における非線形現象一般を調べる上でよく使われている作業モデル系である。準周期外力ロジスティック写像系にも幾つかのバリエーションがあるが、ここでは次のような系を考える。

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= (\theta_n + \omega) \bmod 1, \\ x_{n+1} &= a - x_n^2 + \epsilon \cos(2\pi\theta_n)\end{aligned}\quad (1)$$

駆動力の振動数 ω が無理数の場合にこの系は準周期駆動系となる。ここでは先行研究の多くと同様に、 ω を $(\sqrt{5}-1)/2$ に固定して、非線形性の強さ、準周期駆動の強度に対応するパラメータ (a, ϵ) を制御パラメータとして変化した際の系の挙動の変化を考える。

数値計算により SNA と安定トーラスの違いを直接的に区別するのは難しいが、SNA が存在する場合共存するはずの「不安定軌道」の出現を捉える方法を使うと比較的効率よくトーラスと SNA の判別を行うことができる。ここで我々が用いた方法は不安定軌道を含むファイバー上の線分 (x 方向に伸びた線分) の像の長さは、写像の反復により 0 に収束することはない（「反発領域」の幅全体に広がる）ということを利用するものであ

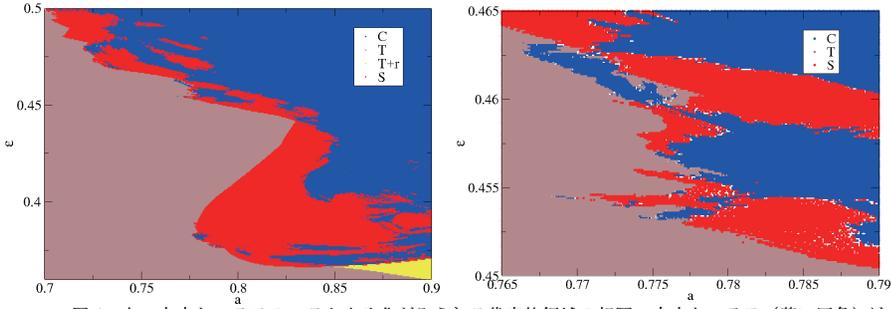


図1 左：安定トーラスのフラクタル化がみられる代表的領域の相図。安定トーラス（薄い灰色）はSNA（灰色）を経由してカオス（黒）に変化することが多い。右：安定トーラスが直接カオスに変化するように見える部分の拡大図

る。「線分」の中心を m_n , 長さを $2w_n$ で表すと、線分の時間発展は、1 + 2 自由度の写像系

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= (\theta_n + \omega) \pmod{1}, \\ m_{n+1} &= \begin{cases} a - m_n^2 - w_n^2 \epsilon \cos(2\pi\theta_n), & (|m_n| \geq w_n) \\ a - (|m_n| + w_n)^2/2 + \epsilon \cos(2\pi\theta_n), & (|m_n| < w_n) \end{cases} \\ w_{n+1} &= \begin{cases} 2|m_n|w_n, & (|m_n| \geq w_n) \\ (|m_n| + w_n)^2/2, & (|m_n| < w_n) \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

により記述される。元の qpFLM 系における不安定な軌道の出現は、同時に軌道の「反発領域」に対応する x 方向の幅が0ではない不変集合の出現を伴う。これはこの系 (2) における $w = 0$ 上にないアトラクターの出現に対応する。このアトラクターの検出は、直接不安定軌道を検出するよりも簡単にできるため、不安定軌道の発生などの分岐現象をある程度分解能よくとらえることが可能である。この結果図 に示すようにこの系においてはトーラスからカオスへの変化の途中に SNA が現れる場合が大きな部分を占めるといった結果がえられたが、一方で比較的細かいところで SNA の発生なしに、トーラスからカオスへと直接変化するように見えるパラメータ領域もみつけた。

この図で直接カオス化が起きているように見えるパラメータの近辺、カオス側のパラメータ領域においては、(2) 系の軌道が間欠的に長時間 $w = 0$ の平面に張り付く、on-off intermittency とよく似た挙動が観測されている。安定トーラスの不安定化に際して、漸近安定性を持たないアトラクター (SNA) の出現と、間欠的挙動の出現という異なる特徴を持つ2つの経路があるように見えるが、これはカオス的な力学系の相互同期などで現れる blowout 分岐において、典型的には riddled basin を持つ (漸近安定性を持たない) アトラクターが出現する場合 [15] と、on-off intermittency [16] が観測される場合がある [17] ことと対応しており、もっともらしいように思われる。

しかし、一方でこの系は準周期外力系で (また $w = 0$ からのずれの拡大率の対数をとったものも θ の関数として連続となる) ため、(1) 系の典型的な軌道が正のリアプノフ指数を持つ、つまり (2) の $\{w = 0\}$ が横断方向に不安定化してしまっている状況において、この面上に on-off 間欠性を引き起こす横断方向に反発的な軌道と吸引的な軌道が共存することはありえない。また「on-off intermittency っぽい挙動を示す軌道」も原理的には (2) の相空間における漸近安定トーラス上の軌道であるため、その時系列は (十分長い観測時間についてみれば) 準周期的なものとなるはずである。

また、この部分でトーラスが直接カオスに分岐しているかどうかという点についても、実はえられている解像度では判別できない狭い範囲で SNA が現れるという可能性も否定できない。実際このパラメータ領域においては、(2) 系の軌道の一部がパラメータに対して極端に鋭敏な依存性をもつことがみられている。そのため、相図が微細な構造を持っているのは十分考えられる。

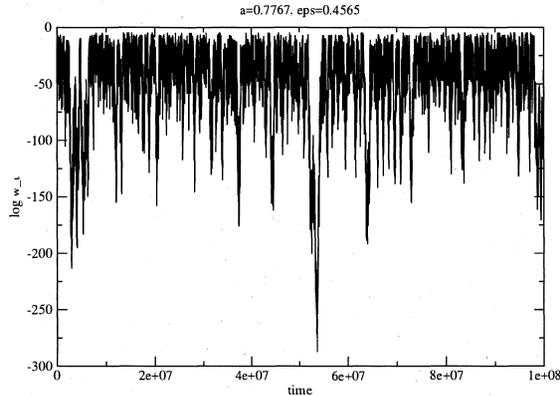


図2 「直接的」カオス化の直後のパラメータで見られる、 $w=0$ 平面への張り付きを含む間欠的挙動の例：横軸は時間（ステップ）、縦軸は w 成分（対数表示） w の値については 80 桁ほどの揺らぎがみられている

これらの点を考慮すると、分岐そのものはこの部分においても正のリアプノフ指数の出現（カオス化）に先立ってトーラスの SNA 化が起きるが、SNA の存在するパラメータ領域は極めて狭い範囲であり、「ほとんど直接的に」安定トーラスが間欠的カオスに変化するように見えている。と考えるのが自然なようにも思われる。

どちらの分岐シナリオが正しいのか、あるいはそれ以外のことが起きているのかについて知るためには、観測されている間欠的にみえる挙動や鋭敏なパラメータ依存性が、どのようなメカニズムで出てきているかという点について理解する必要があると思われる。そこで何が起きているのかについてよりよい手がかりをえるため、反発領域について critical line の方法 [18] を用いることで、より精度の高い計算を試みた。

式 (1) の系が不安定な軌道をもつ場合、その反発領域の境界は (1) の Jacobian が 0 となる集合つまり $\{x=0\}$ の反復像として得られる曲線 ($L_k, k=1, 2, \dots$) の断片を幾つかつなぎ合わせたものになる場合がある。対応する (2) 系の軌道の情報から、ここで考えているパラメータ領域において現れる反発領域はこのタイプのものであることが期待できる。この系の場合 L_k は具体的に関数形を求めることができるので、曲線のつなぎ目となる点が有限個でそれを数値的に求めることができれば、反発領域の形を任意の精度で正確に特定することができる。これは (2) の系の軌道も「解ける」ことを意味するので、間欠的に見える挙動が準周期的構造の中からどのように発生しているのか調べることもできると期待できる。

この計算は一応実際に実行可能で、特に反発領域の形の複雑さがそれほど激しくない場合には、不安定軌道の出現/消失をこれまでの方法よりもかなり効率よく確認することが可能になっている。この方法により求めた不変集合（反発領域）の例をいくつか示しておく。 $a=0.75$ の線上（これはフラクタル化による SNA の発生が最初に報告されたルートに対応する）において、また、不安定軌道の消失に近づくにつれて、不安定軌道の反発領域に細い切れ込み状の構造が発生して形が複雑化する様子を見ることができた。これは反発領域の消失が (2) 系における非一様サドルノード分岐と対応することを示唆していると考えられる。

一方、残念ながら「直接」のカオス化が起きているように見える領域では、分岐点にあまり近づかないうちから反発領域の境界はかなり複雑となっていて、作成したプログラムと手持ちの計算資源ではこの不変集合の形を具体的に求めることはできていない。

ということで、原理的にはなめらかなはずのトーラスの上を準周期的に動く軌道について、観測される「不安定性」の強さが数万ステップあるいはそれ以上の桁の時間スケールで大きく揺らいでいるのだが、そのような揺らぎが発生する仕組みはどうなっているのか？ という謎は残ったままで、その解明は今後の課題となっている。

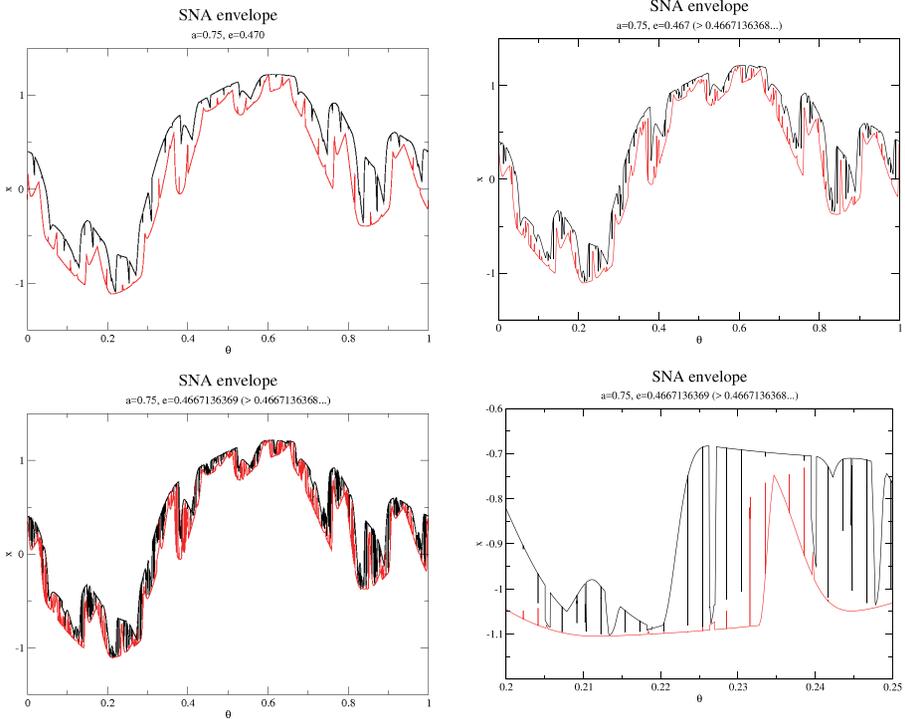


図3 不安定軌道の反発領域の複雑化の様子: 左上 ($\epsilon = 0.47$)、右上 ($\epsilon = 0.467$)、左下 ($\epsilon = 0.4667136369$) の順に消失に近づいている。(右下は左下の一部の拡大図)。左上は 365 個の区間にわかれた L_1 から L_{55} までの曲線、右上は 657 個の区間で L_{122} まで、左下は 4569 個の区間で L_{565} までの曲線により囲まれている。

参考文献

- [1] C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan and J. A. Yorke, *Physica D*, 13, 261 (1984)
- [2] K. Kaneko, *Prog. Theor. Phys.*, 71, 1112 (1984)
- [3] U. Feudel, S. Kuznetsov and A. Pikovsky, *Strange nonchaotic attractors*, (World Scientific, Singapore, 2006)
- [4] A. Prasad, V. Mehra and R. Ramaswamy, *Phys. Rev. E* 57, 1576 (1998)
- [5] R. Sturman and J. Stark, *Nonlinearity* 13, 113 (2000)
- [6] J. F. Heagy and S. M. Hammel, *Physica D*, 70, 140 (1994)
- [7] T. Yalçinkaya and Y-C. Lai, *Phys. Rev. E*, 56 1623 (1997)
- [8] A. Witt, U. Feudel and A. Pikovsky, *Physica D*, 109, 180 (1997)
- [9] A. Prasad, V. Mehra and R. Ramaswamy, *Phys. Rev. E*, 79, 4127 (1997)
- [10] U. Feudel, A. Witt, Y-C. Lai and C. Grebogi, *Phys. Rev. E*, 58, 3060 (1998)
- [11] H. M. Osinga and U. Feudel, *Physica D*, 141, 54 (2000)

- [12] S-Y. Kim, W. Lim and E. Ott, Physical Review E, 67, 056203 (2003)
- [13] W. Lim and S-Y. Kim, J. of Korea. Phys. Soc., 47, 414 (2005)
- [14] T. Nishikawa and K. Kaneko, Physical Review E, 54, 6114 (1996)
- [15] J.C. Alexander, J.A. Yorke, Z. You and I. Kan, Int. J. Bifurcation Chaos 2, 795 (1992)
- [16] H. Fujisaka and T. Yamada, Prog. Theor. Phys. 74,918 (1985)
- [17] P. Ashwin, J. Buescu, I. Stewart, Nonlinearity, 9, 903 (1996)
- [18] C. Mira, L. Gardini, A. Barugola and JC. Cathala, CHAOTIC DYNAMICS IN TWO-DIMENSIONAL NONINVERTIBLE MAPS, (World Scientific, Singapore, 1996)