

Generalized arcsine laws for infinite ergodic transformations

世良 透 (京都大学大学院理学研究科)

概要

二つの中立不動点を持つ (決定論的な) 区間写像 T の軌道 $(T^k x)_{k \geq 0}$ の平均滞在測度について考える. この写像は無限測度を保存するエルゴード変換であり, Birkhoff の個別エルゴード定理が適用できない. Thaler (2002) は「中立不動点近傍でのある漸近挙動」と「適切な初期分布の下で平均滞在測度があるランダム確率測度に分布収束すること」が同値であることを実質的に示した. 本稿では Thaler の結果を解説するとともに, その拡張である筆者と矢野孝次氏 (京都大学) との最近の共同研究について紹介する.

1 イントロダクション

X を局所コンパクト完備可分距離空間, $\mu (\neq 0)$ を X 上の σ -有限測度, $T : (X, \mu) \rightarrow (X, \mu)$ を測度保存的エルゴード変換とする. もし μ が有限測度ならば, T の反復代入の軌道 $(T^k x)_{k \geq 0}$ の平均滞在測度は不変確率測度 $\mu/\mu(X)$ に殆ど至るところ収束する (Birkhoff の個別エルゴード定理):

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x} = \frac{1}{n} (\delta_x + \delta_{Tx} + \dots + \delta_{T^{n-1}x}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\mu}{\mu(X)}, \quad \text{in } \mathcal{P}(X), \mu\text{-a.e.}x.$$

ここで δ_y は y における Dirac 測度, $\mathcal{P}(X)$ は X 上の確率測度全体からなる空間で, 弱収束の位相が備わっている. 上の収束は次のようにも言い換えられる: 任意の有界な連続関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ に対し,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu / \mu(X), \quad \text{in } \mathbb{R}, \mu\text{-a.e.}x.$$

では, μ が無限測度の場合に平均滞在測度はどうなるだろうか?

二つの中立不動点を持つ区間写像 (詳しい設定は第3節で述べる) はある無限測度を保存するエルゴード変換である. Thaler [7] はこの区間写像の軌道の「中立不動点近傍への平均滞在時間」に関する一般化逆正弦法則を示した (なおこれは Lamperti [2] の離散時間 Markov 過程の滞在時間に関する一般化逆正弦法則の類推から得られたものである). この結果は無限測度を保存するエルゴード変換の平均滞在測度に関する極限定理の一種と読み替えることができる. 具体例で説明しよう.

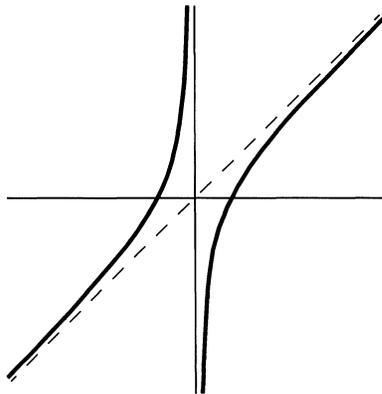


図 1: Boole 変換

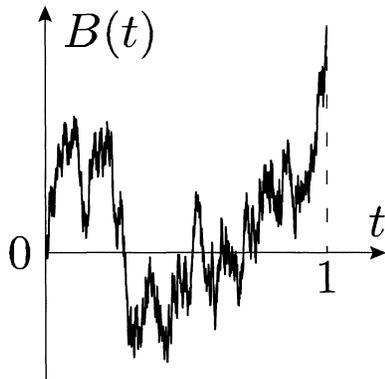


図 2: 原点出発 1 次元 Brown 運動

例 1.1 (Boole 変換の平均滞在測度に関する逆正弦法則 [7, Example 1]). 写像 $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $Tx := x - x^{-1}$ で定める. ただし $T0 := 0$. この写像は **Boole 変換** と呼ばれ, \mathbb{R} 上の Lebesgue 測度 dx (無限測度!) を保存するエルゴード変換であることが知られている. 空間 $[-\infty, +\infty]$ を \mathbb{R} の二点コンパクト化とする. Boole 変換 T が形式的には二つの中立不動点 $+\infty, -\infty$ を持つことに注意せよ. Thaler [7] が示した **逆正弦法則** は次のように書き直せる: 任意の \mathbb{R} 上の確率測度 $\nu(dx) \ll dx$ に対し,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x} \quad (\text{under } \nu(dx))$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} A_+ \delta_{+\infty} + A_- \delta_{-\infty}, \quad \text{in } \mathcal{P}([-\infty, +\infty]).$$

すなわち初期分布 $\nu(dx)$ の下で, 軌道 $(T^k x)_{k \geq 0}$ が $\pm\infty$ の近傍に A_{\pm} の割合で集中していく. ここで \xrightarrow{d} は分布収束を意味し, A_+ (resp. A_-) は原点出発 1 次元 Brown 運動 $(B(t))_{t \geq 0}$ の時刻 1 までの正側 (resp. 負側) 滞在時間を表す, つまり

$$A_+ := \int_0^1 \mathbb{1}\{B(t) > 0\} dt \quad \left(\text{resp. } A_- := \int_0^1 \mathbb{1}\{B(t) < 0\} dt \right).$$

上記の収束は次のようにも言い換えられる: 連続関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ について $f(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ が存在するならば,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \quad (\text{under } \nu(dx))$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} A_+ f(+\infty) + A_- f(-\infty), \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

なお上記の収束を逆正弦法則と呼ぶのは, A_+ と A_- が逆正弦分布に従うためである (Lévy の逆正弦法則 [3]):

$$\mathbb{P}[A_+ \leq s] = \mathbb{P}[A_- \leq s] = \frac{1}{\pi} \int_0^s \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{s}, \quad s \in [0, 1].$$

2 歪み Bessel 拡散過程に関する一般化逆正弦法則

この節では歪み Bessel 拡散過程 (Brown 運動を含む拡散過程のクラス) と, Lamperti の一般化逆正弦分布との関連について解説する.

$\alpha \in (0, 1)$, $\beta = (\beta_+, \beta_-) \in (0, 1)^2$ で $\beta_+ + \beta_- = 1$ とする. $Z^{(\alpha, \beta)} = (Z^{(\alpha, \beta)}(t))_{t \geq 0}$ を \mathbb{R} 上を走る, 原点出発, 次元 $(2 - 2\alpha) \in (0, 2)$, 歪度 β の歪み Bessel 拡散過程とする. 拡散過程 $Z^{(\alpha, \beta)}$ は大雑把に言うと次のような挙動をする:

1. 時刻 0 で原点から出発する: $Z^{(\alpha, \beta)}(0) = 0$.
2. $Z^{(\alpha, \beta)}$ は原点から進む方向をランダムに選ぶ: 正方向へ進む確率は β_+ , 負方向へ進む確率は β_- である.
3. 原点に戻るまで, $Z^{(\alpha, \beta)}$ は選んだ方向に沿って反射壁 $(2 - 2\alpha)$ 次元 Bessel 拡散過程のように振る舞う.
4. いずれ $Z^{(\alpha, \beta)}$ は原点に戻ってくる. その際 (それまでの振る舞いとは独立に) 再び 2 を行う. 以下繰り返し.

上記の説明は正確ではないことに注意. 実際, 反射壁 $(2 - 2\alpha)$ 次元 Bessel 拡散過程は, 原点から出発した際に任意の微小時間内で非可算無限回原点に到達するので, 上記の素朴な説明では $Z^{(\alpha, \beta)}$ の挙動を規定できない. 厳密な $Z^{(\alpha, \beta)}$ の構成には周遊理論または Brown 運動の時間変更を用いる. 詳しくは例えば [1] または [9] を見よ.

反射壁 1 次元 Bessel 拡散過程は 1 次元 Brown 運動の絶対値と同分布である. したがって上記の素朴な説明から推察されるように, $\alpha = \beta_{\pm} = 1/2$ の場合には $Z^{(\alpha, \beta)}$ は原点出発 1 次元 Brown 運動に他ならない.

$Z^{(\alpha, \beta)}$ が時刻 1 までに正側 (resp. 負側) に滞在する時間を $A_+^{(\alpha, \beta)}$ (resp. $A_-^{(\alpha, \beta)}$) と置く:

$$A_+^{(\alpha, \beta)} := \int_0^1 \mathbb{1}\{Z^{(\alpha, \beta)}(t) > 0\} dt \quad \left(\text{resp. } A_-^{(\alpha, \beta)} := \int_0^1 \mathbb{1}\{Z^{(\alpha, \beta)}(t) < 0\} dt \right).$$

定理 2.1 (歪み Bessel 拡散過程の正側・負側滞在時間に関する一般化逆正弦法則 [1, Theorem 1]). $\alpha \in (0, 1)$, $\beta = (\beta_+, \beta_-) \in (0, 1)^2$ で $\beta_+ + \beta_- = 1$ とする. この時

$$\left(A_+^{(\alpha, \beta)}, A_-^{(\alpha, \beta)} \right) \stackrel{d}{=} \left(\frac{\xi_+}{\xi_+ + \xi_-}, \frac{\xi_-}{\xi_+ + \xi_-} \right).$$

ここで $\xi_+ = \xi_+^{(\alpha, \beta)}$, $\xi_- = \xi_-^{(\alpha, \beta)}$ は独立な非負値 α -安定確率変数で, その分布は次の Laplace 変換で特徴付けられる:

$$\mathbb{E} \left[\exp(-\lambda \xi_{\pm}) \right] = \exp(-\lambda^{\alpha} \beta_{\pm}), \quad \lambda > 0.$$

注 2.2 (Lamperti の一般化逆正弦分布 [2]). 定理 2.1 の $\xi_+ / (\xi_+ + \xi_-)$ の分布は **Lamperti の一般化逆正弦分布** と呼ばれ, その分布関数は以下で与えられる:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\frac{\xi_+}{\xi_+ + \xi_-} \leq y \right] &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^y \frac{\beta_+ \beta_- x^{-(1-\alpha)} (1-x)^{-(1-\alpha)} dx}{\beta_+^2 (1-x)^{2\alpha} + \beta_-^2 x^{2\alpha} + 2\beta_+ \beta_- x^{\alpha} (1-x)^{\alpha} \cos(\pi\alpha)} \\ &= \frac{1}{\pi\alpha} \operatorname{arccot} \left[\frac{\beta_+ (1-y)^{\alpha}}{\beta_- y^{\alpha} \sin(\pi\alpha)} + \cot(\pi\alpha) \right], \quad y \in (0, 1]. \end{aligned}$$

密度関数が 0 と 1 において発散していることに注意. したがって定理 2.1 より「 $Z^{(\alpha, \beta)}$ が正側または負側の一方に偏って滞在する」ということが確率的に起こりやすいと言える. なお $\alpha = \beta_{\pm} = 1/2$ の場合 $\xi_+ / (\xi_+ + \xi_-)$ の分布は逆正弦分布に他ならない:

$$\mathbb{P} \left[\frac{\xi_+}{\xi_+ + \xi_-} \leq y \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{y}, \quad y \in [0, 1].$$

3 二つの中立不動点を持つ区間写像

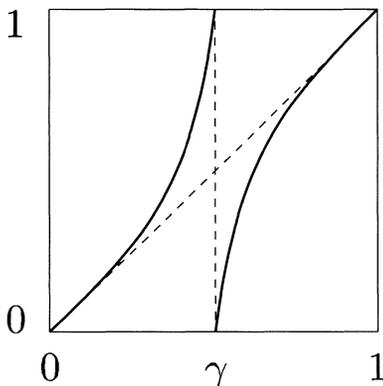


図 3: 区間写像 T のグラフ

次の条件を満たす区間写像 $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を考える: ある定数 $\gamma \in (0, 1)$ に対し,

1. T の $(0, \gamma), (\gamma, 1)$ への制限がそれぞれ $[0, \gamma], [\gamma, 1]$ 上の C^2 級写像に拡張できる.
2. $T((0, \gamma)) = T((\gamma, 1)) = (0, 1)$.
3. $T0 = 0, T1 = 1$ かつ $T'0 = T'1 = 1$.
4. $(0, \gamma)$ 上で $T'' > 0$, $(\gamma, 1)$ 上で $T'' < 0$.

T は二つの中立不動点 0 と 1 を持ち, $(0, \gamma) \cup (\gamma, 1)$ 上で $T' > 1$ であることに注意.

この時, T は $[0, 1]$ 上の Lebesgue 測度 dx と同値な σ -有限不変測度 $\mu(dx)$ を持ち, それは定数倍を除いて一意に定まる. また T は μ に関してエルゴード的である. さらに μ は任意の $0 < \varepsilon < 1$ に対し

$$\begin{aligned} \mu([\varepsilon, 1 - \varepsilon]) &< \infty, \\ \mu([0, \varepsilon]) &= \mu((1 - \varepsilon, 1]) = \infty. \end{aligned}$$

となる ([5], [6]). すなわち中立不動点 0 と 1 の近傍は μ に関して測度無限大である. これは T の軌道 $(T^k x)_{k \geq 0}$ の平均滞在測度が 0 と 1 の近傍に集中することを意味する:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x}((\varepsilon, 1 - \varepsilon)) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}\{T^k x \in (\varepsilon, 1 - \varepsilon)\} \rightarrow 0, \quad \mu\text{-a.e.} \quad (1)$$

それでは 0 と 1 の近傍にはそれぞれどのような割合で平均滞在測度が集中するのだろうか? これについて解答を与えたのが Thaler [7] である. 次節でこのことについて説明する.

4 区間力学系に関する一般化逆正弦法則

正值可測関数 $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ が原点 0 において指数 $\rho \in \mathbb{R}$ の正則変動であるとは、任意の $\lambda > 0$ に対し

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^\rho$$

が成り立つことである。無限遠 ∞ における正則変動性も同様に定める。原点 0 (resp. 無限遠 ∞) において指数 ρ の正則変動な正值可測関数の全体を $\mathcal{R}_\rho(0+)$ (resp. $\mathcal{R}_\rho(\infty)$) と書くことにする。例えば $f(x) = x^\rho$ は $\mathcal{R}_\rho(0+) \cap \mathcal{R}_\rho(\infty)$ に属する。

二つの中立不動点を持つ区間写像 $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ の平均滞在測度に関する一般化逆正弦法則を述べよう。なお $A_\pm^{(\alpha, \beta)}$ は第 2 節で定めたものとする。

定理 4.1 (区間写像の平均滞在測度に関する一般化逆正弦法則 [7, Theorem]). 区間写像 $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を第 3 節の条件を満たすものとする。また $\alpha \in (0, 1)$, $c_+, c_- > 0$ とし、更に $\beta = (\beta_+, \beta_-) \in (0, 1)^2$ を

$$\beta_+ = \frac{c_+^{-\alpha} T'(\gamma_+)}{c_+^{-\alpha} T'(\gamma_+) + c_-^{-\alpha} T'(\gamma_-)}, \quad \beta_- = 1 - \beta_+,$$

とする。このとき次の三つの条件は同値。

(i) ある $\Phi \in \mathcal{R}_{1+1/\alpha}(0+)$ が存在して、

$$|Tx - x| \sim \begin{cases} c_- \Phi(x), & \text{as } x \downarrow 0, \\ c_+ \Phi(1-x), & \text{as } x \uparrow 1. \end{cases}$$

(ii) ある $\Psi \in \mathcal{R}_{-\alpha}(\infty)$ が存在して、任意の $0 < \varepsilon < \min\{\gamma, (1-\gamma)\}$ に対し、

$$\begin{aligned} \mu[x \in (\varepsilon, 1-\varepsilon); Tx, \dots, T^n x < \varepsilon] &\sim \beta_- \Psi(n), \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \\ \mu[x \in (\varepsilon, 1-\varepsilon); Tx, \dots, T^n x > 1-\varepsilon] &\sim \beta_+ \Psi(n), \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

(iii) 任意の $[0, 1]$ 上の確率測度 $\nu(dx) \ll dx$ に対し、

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x} \quad (\text{under } \nu(dx)) \\ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} A_+^{(\alpha, \beta)} \delta_1 + A_-^{(\alpha, \beta)} \delta_0, \quad \text{in } \mathcal{P}([0, 1]). \end{aligned}$$

例 4.2. 例 1.1 の Boole 変換 $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ について考える。このとき

$$\phi(x) := \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1),$$

による T の変数変換である $(0, 1)$ 上の変換 $S := \phi^{-1} \circ T \circ \phi$ を考えると

$$Sx = 1 - S(1-x) = \frac{x(1-x)}{1-x-x^2}, \quad x \in (0, 1/2),$$

かつ Taylor 展開より

$$Sx - x \sim x^3, \quad \text{as } x \downarrow 0,$$

である. A_{\pm} を例 1.1 の通りとする. $\alpha = \beta_{\pm} = 1/2$ の時 $(A_{\pm}^{(\alpha, \beta)})_{\pm} \stackrel{d}{=} (A_{\pm})_{\pm}$ であることに注意する. 定理 4.1 を区間写像 S に適用することにより, 任意の $[0, 1]$ 上の確率測度 $\nu(dx) \ll dx$ に対して,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{S^k x} \quad (\text{under } \nu(dx))$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} A_+ \delta_1 + A_- \delta_0, \quad \text{in } \mathcal{P}([0, 1]).$$

となることが分かる. このことから例 1.1 の結論も得られる.

定理 4.1 の [(ii) \Rightarrow (iii)] の証明の概要を述べよう. $\varepsilon > 0$ を十分小にとる. $\nu_0 := \mu(\cdot \cap (\varepsilon, 1 - \varepsilon)) / \mu((\varepsilon, 1 - \varepsilon))$ と置く, 式 (1) などから, 条件 (iii) は次と同値であることが分かる:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}\{T^k x < \varepsilon\} \quad (\text{under } \nu_0(dx)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} A_-, \quad \text{in } [0, 1].$$

このためには任意次数のモーメントの収束が示されれば良い, すなわち任意の $r \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\int_{[0, 1]} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}\{T^k x < \varepsilon\} \right)^r \nu_0(dx) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[A_-^r],$$

が示されれば良い. Thaler [7] はこの収束を, モーメントの Laplace 変換に関する漸近挙動に置き換えて示した:

$$\sum_{n \geq 1} e^{-ns} \int_{[0, 1]} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{1}\{T^k x < \varepsilon\} \right)^r \nu_0(dx) \underset{s \downarrow 0}{\sim} r! \mathbb{E}[A_-^r] s^{-(r+1)},$$

このためには, 軌道 $(T^k x)_{k \geq 0}$ の「 $(\varepsilon, 1 - \varepsilon)$ から $[0, \varepsilon)$, $(1 - \varepsilon, 1]$ への周遊」の時間を解析することが非常に重要である. $[0, \varepsilon)$ への滞在時間を周遊時間で分解するというアイデアと, 条件 (ii) の周遊時間の正則変動性によって上記の漸近挙動を示すことができる.

5 一般化逆正弦法則のマルチレイ拡張

三つ以上の中立不動点を持つ区間写像についても, 一般化逆正弦法則の自然な拡張が成り立つ. 本節ではこのことについて紹介する.

5.1 マルチレイ上を走る歪み Bessel 拡散過程

$d \geq 2$ を自然数, $I_1, \dots, I_d \subset \mathbb{C}$ を原点から伸びる次の半直線とする:

$$I_j := \{r \exp(2\pi j \sqrt{-1}/d) ; r \geq 0\}, \quad j = 1, \dots, d.$$

$\alpha \in (0, 1)$, $\beta = (\beta_j)_{j=1}^d \in (0, 1)^d$ で $\sum_{j=1}^d \beta_j = 1$ とする. $Z^{(\alpha, \beta)} = (Z^{(\alpha, \beta)}(t))_{t \geq 0}$ をマルチレイ $\bigcup_{j=1}^d I_j$ 上を走る, 原点出発, 次元 $(2 - 2\alpha) \in (0, 2)$, 歪度 β の歪み Bessel 拡散過程とする. 第 2 節で説明したものと同様に, この拡散過程は原点にお

いては確率 β_j で j 番目の半直線 I_j 方向に進み、原点に再び戻るまでは I_j に沿って反射壁 $(2 - 2\alpha)$ 次元 Bessel 拡散過程として振る舞う。

拡散過程 $Z^{(\alpha, \beta)}$ が時刻 1 までに j 番目の半直線 I_j に滞在する時間を $A_j^{(\alpha, \beta)}$ と書くことにする：

$$A_j^{(\alpha, \beta)} := \int_0^1 \mathbb{1} \{Z^{(\alpha, \beta)}(t) \in I_j\} dt, \quad j = 1, \dots, d.$$

定理 5.1 ([1, Theorem 1]). $\alpha \in (0, 1)$, $\beta = (\beta_j)_{j=1}^d \in (0, 1)^d$ で $\sum_{j=1}^d \beta_j = 1$ とする。この時

$$(A_1^{(\alpha, \beta)}, \dots, A_d^{(\alpha, \beta)}) \stackrel{d}{=} \left(\frac{\xi_1}{\sum_{j=1}^d \xi_j}, \dots, \frac{\xi_d}{\sum_{j=1}^d \xi_j} \right).$$

ここで ξ_1, \dots, ξ_d は独立な非負値 α -安定確率変数で、その分布は次の Laplace 変換で特徴付けられる：

$$\mathbb{E} \left[\exp(-\lambda \xi_j) \right] = \exp(-\lambda^\alpha \beta_j), \quad \lambda > 0, \quad j = 1, \dots, d$$

5.2 区間力学系に関する一般化逆正弦法則のマルチレイ拡張

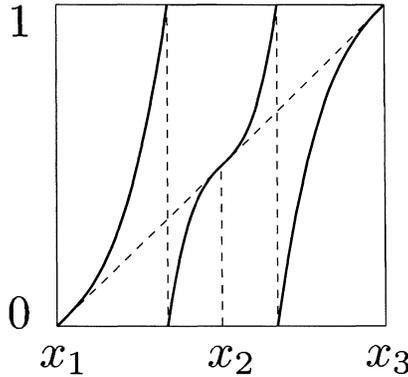


図 4: $d = 3$ の場合の区間写像 T

$d \geq 2$ を自然数とする。 $0 = \gamma_0 = x_1 < \gamma_1 < x_2 < \dots < \gamma_{d-1} < x_d = \gamma_d = 1$ とし、区間写像 $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を次の条件を満たすものとする：各 $i = 1, \dots, d$ に対し、

1. T の (γ_{i-1}, γ_i) への制限が $[\gamma_{i-1}, \gamma_i]$ 上の C^2 級写像に拡張できる。
2. $T((\gamma_{i-1}, \gamma_i)) = (0, 1)$.
3. $Tx_i = x_i$ かつ $T'x_i = 1$.
4. $(\gamma_{i-1}, \gamma_i) \setminus \{x_i\}$ 上で $(x - x_i)T''x > 0$.

T は d 個の中立不動点 x_1, \dots, x_d を持ち、 $[0, 1] \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_d\}$ 上で $T' \geq 1$ であることに注意。

この時、 T は $[0, 1]$ 上の Lebesgue 測度 dx と同値な σ -有限不変測度 $\mu(dx)$ を持ち、それは定数倍を除いて一意に定まる。また T は μ に関してエルゴード的である。さらに μ は任意の $0 < \varepsilon < 1$ に対し

$$\begin{aligned} \mu\left([0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^d (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)\right) &< \infty, \\ \mu((x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)) &= \infty, \quad i = 1, \dots, d \end{aligned}$$

となる ([5], [6])。第 3 節と同様に、軌道 $(T^k x)_{k \geq 0}$ の平均滞在測度は中立不動点たちの近傍に集中する。

平均滞在測度がどのような割合で集中するかを考える際に、中立不動点たちの近傍を考えるよりも、左側/右側近傍に分けて考える方が都合がよいので、次のような空間 \widehat{X} を考える：

$$\widehat{X} = \bigcup_{i=1}^{d-1} (x_i, x_{i+1}) \cup \{x_{1+}, x_{2-}, x_{2+}, \dots, x_{d-}\},$$

ここで \widehat{X} は $\bigcup_{i=1}^{d-1} (x_i, x_{i+1})$ の $(2d-2)$ 点コンパクト化で、 $x_i/x_{i+1}-$ は \widehat{X} における (x_i, x_{i+1}) の左側/右側境界点である。したがって \widehat{X} は「互いに交わらない $(d-1)$ 個の有界閉区間たちの合併集合」と位相同型である。 $d=2$ の場合は \widehat{X} は区間 $[0, 1]$ に他ならない。

$h = d\mu/dx$ を μ の Lebesgue 測度に関する密度関数で $[0, 1] \setminus \{x_1, \dots, x_d\}$ 上連続な version とし、各 $i = 1, \dots, d$ に対し、 $f_i : [0, 1] \rightarrow [\gamma_{i-1}, \gamma_i]$ を、 $T|_{(\gamma_{i-1}, \gamma_i)} : (\gamma_{i-1}, \gamma_i) \rightarrow (0, 1)$ の逆関数の $[0, 1]$ 上への C^2 級拡張とする。

第 5.1 小節と同様に、 $\alpha \in (0, 1)$ および $\beta = (\beta_{i,\pm})_{i,\pm} = (\beta_{1,+}, \beta_{2,-}, \beta_{2,+}, \dots, \beta_{d,-}) \in (0, 1)^{2d-2}$ で $\sum_{i,\pm} \beta_{i,\pm} = 1$ なるものに対し、「 $(2d-2)$ 本の半直線たちからなるマルチレイ」上を走る歪み Bessel 拡散過程 $Z^{(\alpha,\beta)}$ や、 $Z^{(\alpha,\beta)}$ の半直線毎の時刻 1 までの滞在時間 $(A_{i,\pm}^{(\alpha,\beta)})_{i,\pm}$ を考える。

複数の中立不動点を持つ区間力学系の一般化逆正弦法則について述べよう。

定理 5.2 ([4, Corollaries 2.12 and 2.13]). $\alpha \in (0, 1)$, $c = (c_{i,\pm})_{i,\pm} \in (0, \infty)^{2d-2}$ とし、また $\beta = (\beta_{i,\pm})_{i,\pm} \in (0, 1)^{2d-2}$ を

$$\beta_{i,\pm} = \frac{c_{i,\pm}^{-\alpha} v_i}{\sum_{j,\pm} c_{j,\pm}^{-\alpha} v_j}, \quad \text{with } v_i = \sum_{j \neq i} (h \circ f_j)(x_i) f_j'(x_i),$$

とする。このとき次の三つの条件は同値。

(i) ある $\Phi \in \mathcal{R}_{1+1/\alpha}(0+)$ が存在して、各 i, \pm に対し、

$$|Tx - x| \sim c_{i,\pm} \Phi(|x - x_i|), \quad \text{as } x \rightarrow x_i \pm 0.$$

(ii) ある $\Psi \in \mathcal{R}_{-\alpha}(\infty)$ が存在して、任意の十分小なる $\varepsilon > 0$ および各 i, \pm に対し、 $X_{i,+} := (x_i, x_i + \varepsilon)$, $X_{i,-} := (x_i - \varepsilon, x_i)$, $Y := [0, 1] \setminus \bigcup_{i,\pm} X_{i,\pm}$ と置くと、

$$\mu[x \in Y; Tx, \dots, T^n x \in X_{i,\pm}] \sim \beta_{i,\pm} \Psi(n), \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

(iii) 任意の $[0, 1]$ 上の確率測度 $\nu(dx) \ll dx$ に対し、

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x} \quad (\text{under } \nu(dx)) \\ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} A_{1,+}^{(\alpha,\beta)} \delta_{x_{1+}} + \dots + A_{d,-}^{(\alpha,\beta)} \delta_{x_{d-}}, \quad \text{in } \mathcal{P}(\widehat{X}). \end{aligned}$$

注 5.3. 定理 5.2 の条件 (iii) は次のように言い換えられる：任意に $[0, 1]$ 上の確率測度 $\nu(dx) \ll dx$ を取った時， $\bigcup_{i=1}^{d-1} (x_i, x_{i+1})$ 上の実数値連続関数 f で各 i, \pm に対し $f(x_i \pm) := \lim_{x \rightarrow x_i, \pm 0} f(x) \in \mathbb{R}$ が存在するものについて，

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \quad (\text{under } \nu(dx))$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} A_{1,+}^{(\alpha,\beta)} f(x_{1+}) + \cdots + A_{d,-}^{(\alpha,\beta)} f(x_{d-}), \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

が成立.

$d = 2$ の場合は式 (1) により 1 次元分布収束に問題を帰着することができたが， $d \geq 3$ の場合に同様のことを考えても多次元分布収束の問題になってしまう．この場合にモーメントの類似物の収束を示すのは非常に難しいものと思われる．そこで世良-矢野 [4] では代わりに二重 Laplace 変換

$$\int_0^\infty du e^{-qu} \int_{[0,1]} \nu(dx) \exp \left(-\frac{1}{t} \sum_{i,\pm} \lambda_{i,\pm} + \sum_{k=1}^{[ut]} \mathbb{1}\{T^k x \in X_{i,\pm}\} \right)$$

(ただし $X_{i,\pm}$ は定理 5.2 の条件 (ii) のものとし， $q > 0$ ， $(\lambda_{i,\pm})_{i,\pm} \in [0, \infty)^{2d-2}$ の $t \rightarrow \infty$ における漸近挙動を解析することにより定理 5.2 を証明した．二重 Laplace 変換の計算においても「 Y から $X_{i,\pm}$ への周遊」の時間の解析が非常に重要である．なお二重 Laplace 変換は Barlow-Pitman-Yor [1] や渡辺 [9] などにおいても拡散過程の滞在時間の分布を調べるために用いられている．

参考文献

- [1] M. Barlow, J. Pitman and M. Yor. Une extension multidimensionnelle de la loi de l'arc sinus. In *Séminaire de Probabilités, XXIII*, volume 1372 of *Lecture Notes in Math.*, pages 294–314. Springer, Berlin, 1989.
- [2] J. Lamperti. An occupation time theorem for a class of stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88:380–387, 1958.
- [3] P. Lévy. Sur certains processus stochastiques homogènes. *Compositio Math.*, 7:283–339, 1939.
- [4] T. Sera and K. Yano. Multiray generalization of the arcsine laws for occupation times of infinite ergodic transformations, Preprint available at arXiv:1711.03260.
- [5] M. Thaler. Estimates of the invariant densities of endomorphisms with indifferent fixed points. *Israel J. Math.*, 37(4):303–314, 1980.
- [6] M. Thaler. Transformations on $[0, 1]$ with infinite invariant measures. *Israel J. Math.*, 46(1-2):67–96, 1983.
- [7] M. Thaler. A limit theorem for sojourns near indifferent fixed points of one-dimensional maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 22(4):1289–1312, 2002.
- [8] M. Thaler and R. Zweimüller. Distributional limit theorems in infinite ergodic theory. *Probab. Theory Related Fields*, 135(1):15–52, 2006.
- [9] S. Watanabe. Generalized arc-sine laws for one-dimensional diffusion processes and random walks. In *Stochastic analysis (Ithaca, NY, 1993)*, volume 57 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 157–172. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.