

宇宙のゆらぎ：大規模構造の形成と非線形進化

京都大学・基礎物理学研究所 樽家 篤史
Atsushi Taruya
Yukawa Institute for Theoretical Physics,
Kyoto University

August 28, 2018

Abstract

宇宙には大規模構造と呼ばれるきわめて大きなスケールにわたる質量分布の空間非一様性が存在している。この大規模構造は、宇宙が若かりし頃から宇宙膨張と重力の影響を色濃く受けて形成・進化してきたと考えられ、宇宙の成り立ちを探る宇宙論における重要な観測ターゲットとなっている。特に昨年、大規模な観測を通して高精度の統計データが得られるようになり、宇宙論への応用が進むとともに大規模構造の理論的記述をめぐって研究が活発化している。本稿では、宇宙の大規模構造の観測とその理論的記述について、最近の状況を交えながら紹介する。

1 はじめに：宇宙の大規模構造とは

宇宙には、観測できる領域全体にわたり大規模構造と呼ばれる質量分布の非一様空間パターンが広がっている。そのスケールは、ざっと数ギガパーセクにおよぶ（1パーセクは約3光年で、ギガパーセクは 10^9 パーセクである）。こう書いてもなかなかピンとは来ないかもしれないので、まずは身近(?)な天体からそのスケールを想像いただく。我々の太陽系は天の川銀河の外縁部に所属しているが、その銀河のサイズ（直径）はおおよそ50キロパーセク（15万光年）と言われる。この天の川銀河は、大マゼラン、小マゼラン星雲などの矮小銀河を伴い、局所銀河群と呼ばれる群れをなしている。秋の星座で有名なアンドロメダ座に位置するアンドロメダ銀河（アンドロメダ大星雲とも呼ばれる）も局所銀河群に属している。局所銀河群のサイズはおおよそ3メガパーセク（1000万光年）であるが、この局所銀河群も、銀河団と呼ばれる銀河群より大きな銀河の集団とともに、おとめ座超銀河団というさらに大きな階層の集団を形作っている¹。そのサイズは30メガパーセク（1億光年）に達する。こうした超銀河団と呼ばれる構造物は、重力的にも弱くしか束縛されておらず特徴的な形状をもたない。このような構造はあちこちに存在し、さらに上の階層の構造物へとつながり、フィラメントと呼ばれる網目構造やボイドと呼ばれる空洞領域を形作っている。宇宙全体に広がるこれら一連の構造が大規模構造である。銀河を1つの点とみなせるほどの空間スケールに、きわめて広大な構造が広がっている姿はやはり想像し難いものがあるが、この大規模構造が宇宙の成り立ちと進化に密接に関わっていることは間違いない。

現在の標準的なシナリオによると、現在観測される大規模構造は、宇宙誕生のごく初期に生成された原始密度ゆらぎと呼ばれるきわめて小さな密度ムラが重力不安定性により時間発展してきたなれの姿として説明される。宇宙膨張と重力による影響下で進化してきたとはいえ、現在でも初期条件を色濃く残していると考えられるため、宇宙論研究における格好な観測ターゲットとなっている。

¹最近の観測では、おとめ座超銀河団はさらに大きな構造の一部とされ、その構造全体をラニアケア超銀河団と呼ぶようになりつつある。

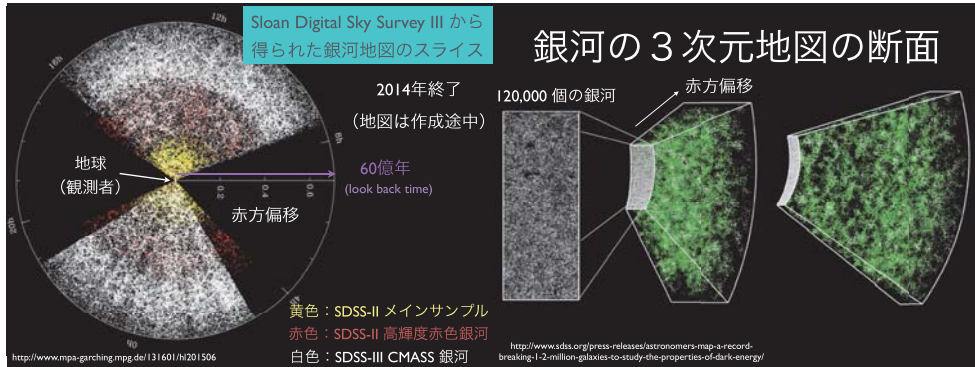


Figure 1: 銀河赤方偏移サーベイ SDSS から得られた銀河分布の地図。左パネルは天球面からあるスライスを取り、観測者を中心にして銀河 1 点 1 点をデータベースの種類にしたがって色分けしたものを。右パネルは天球面上のある観測領域を取り出し、分光観測から得られた赤方偏移の情報をもとに、奥行きのある 3 次元地図としてプロットしたものを。

2 大規模構造の観測

さて、これまであたかも見て来たように大規模構造について述べたが、実際にどうやってその様子を観測するのか、その概略を説明しておこう。現在の宇宙論によると、宇宙にあまねく存在する質量分布の大半を担っているのは、我々生命や惑星などを形作るバリオン（原子）ではなく、ダークマター（暗黒物質）と呼ばれる未知の物質とされる。ダークマターの存在は 1930 年代に指摘され、観測的にその存在はゆるぎないものとなっているが²、その正体は、ほぼ重力相互作用しかしない質量をもった未知の素粒子という以外、何もわかっていない。ダークマター自体、直接検出すらされていないので、ダークマターの形作る大規模構造を直接観測することは困難である。

そのため、光る天体、つまり銀河をマーカー代わりに使うことで、銀河の 3 次元地図から大規模構造の様子を探る手段が取られている³。銀河は基本的にダークマターの密度が高い領域に形成されるため、ダークマターが形作る大規模構造を第ゼロ近似トレースしているとみなせる。それでも、銀河の 3 次元の位置を知るのは容易ではない。天球面上に射影された位置はすぐにはわかるが、奥行き、つまり銀河までの距離は光でも何千万、何億光年もかかるため、正確な距離を測ることは不可能である。しかも、宇宙論的なスケールの距離になると、宇宙膨張の影響が無視できなくなるため、その距離自体が宇宙膨張の振る舞いを司る宇宙モデルに依存してしまう。そこで、厳密な距離ではなく、距離と同等の意味をもち、天文観測から求めることが容易な「距離指標」をもとに、銀河の 3 次元地図を構築する。距離指標として適当な量が、赤方偏移である。同じタイプの銀河でもプリズム分光で銀河のスペクトルを求めてみると、遠方の銀河ほど系統的にスペクトルが赤い側へシフトすることが知られている。これが赤方偏移であり、宇宙膨張によって引き起こされる現象として、1920 年代にル・メートル、ハッブルによって発見された。この赤方偏移はハッブルの法則を通じて距離 r と関係があり、波長のずれを $z \equiv \Delta\lambda/\lambda$ と表すと、 $cz = Hr$ といった関係が得られる (c は光速)⁴。この指標を用いて銀河の 3 次元地図を構築するための観測が「銀河赤方偏移サーベイ」であり、1980 年代から系統的なサーベイが行われるようになり、近年、多天体を同時に分光する機器が開発されたことで、専用望遠鏡を用いた観測が一気に進んだ。

² ニュートン重力の逆 2 乗則を修正することでダークマターを持ち出さず説明できるとする考えもあるが、全ての観測を整合的に説明することは困難である。

³ 重力レンズ効果を使うと、ダークマターを含めた質量分布の 2 次元地図を観測から直接構築することも可能である。最近ではこの効果を用いた観測も進展している。ただし、いずれにせよ、重力レンズ効果をみるためには背景光としての光る天体が必要がある。

⁴ 厳密にはこの関係は $z \ll 1$ の時にのみ成り立つ。

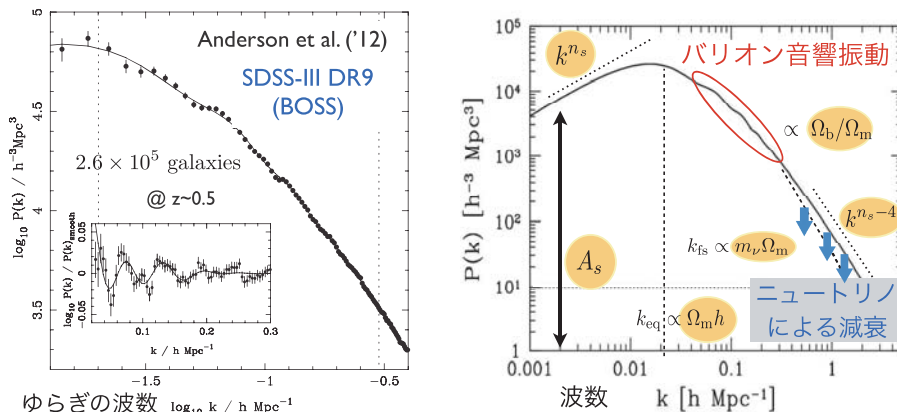


Figure 2: 文献 [1] の銀河赤方偏移サーベイ SDSS BOSS から得られたパワースペクトル (左) と線形理論にもとづくパワースペクトルとその宇宙論パラメータ依存性 (右)

現在、もっとも大きな銀河赤方偏移サーベイは、スローン・デジタルスカイサーベイ (SDSS) と呼ばれるもので、赤方偏移 $z \lesssim 0.3$ までの銀河約 100 万個を分光した上、Luminous red galaxy (LRG) とよばれる明るい銀河を 80 万個ほどをさらに $z \sim 0.6$ まで観測、全天の 1/4 にわたる巨大な銀河地図を作成した (図 1)。SDSS は、現在でも、複数のサブプロジェクトにわかれて継続しており、中でも宇宙論プロジェクトの拡張バリオン振動分光サーベイ (eBOSS) は、遠方の輝線銀河とクエーサーとよばれる天体をターゲットに観測が継続中である。さらに、今後 10 年のタイムスケールでは、世界各地で様々な観測プロジェクトが稼働する予定で、欧米では Euclid、WFIRST と呼ばれるスペース望遠鏡の打ち上げ計画までである。日本でも、ハワイ島のマウナケア山にある口径 8m のすばる望遠鏡を用いた SuMIRe プロジェクトが 2014 年から稼働中で、遠方天体を背景光にした重力レンズ効果の系統的サーベイの後、PFS と呼ばれる最新の多天体分光器を搭載し、大口径を活かして赤方偏移 $z \sim 1.5$ までの深宇宙の銀河の 3 次元地図を作成予定である。

3 大規模構造を使った宇宙論

このように、銀河赤方偏移サーベイによる大規模構造の観測は、今後さらに進展していく予定だが、これはひとえに宇宙論への多大なインパクトが期待されているからである。銀河赤方偏移サーベイから得られた銀河の 3 次元地図は、一見するとランダムだが、その形成には初期条件のみならず、宇宙膨張、重力の影響が色濃く残されており、空間パターンの統計性を通じて宇宙論に関する様々な情報が得られる。

大規模構造の統計的性質を特徴づける上で、もっともよく使われる統計量が 2 点相関関数 $\xi(r)$ 、あるいはそれをフーリエ変換したパワースペクトル $P(k)$ である。銀河の個数密度 $n_{\text{gal}}(\mathbf{x})$ と表し、全空間で平均した量を \bar{n}_{gal} と書くと、個数密度ゆらぎは次のように定義される⁵：

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{n_{\text{gal}}(\mathbf{x})}{\bar{n}_{\text{gal}}} - 1 \quad (1)$$

この個数密度ゆらぎを異なる 2 点間で測り、掛け合わせて統計平均したものが 2 点相関関数である：

$$\xi(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2) \rangle \quad (2)$$

⁵ 銀河は本来、離散的だが、宇宙論的に興味あるスケールは銀河の平均間隔よりずっと大きい。ここでは簡単のため、銀河の個数密度は連続的にみなせるとして話を進める。

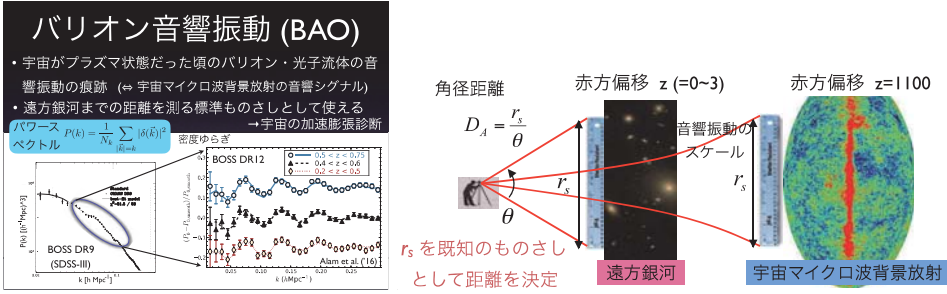


Figure 3: 文献 [1, 2] の銀河パワースペクトルに見られるバリオン音響振動 (左) とそれを用いた宇宙論的な距離の測定方法 (右)

ここで、記号 $\langle \dots \rangle$ は統計平均を表す⁶。統計平均の結果として得られる左辺の量 ξ は2点間の距離にしか依らない形になっているが、これは、銀河分布のランダムネスが一樣かつ等方的だと仮定したからである。なお、パワースペクトルは2点相関関数と次のような関係がある：

$$P(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{x} \xi(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 4\pi \int_0^\infty dx \xi(x) \frac{\sin(kx)}{kx}. \quad (3)$$

2番目の等号は一樣・等方的な場合に成り立ち、この時、パワースペクトルは波数の大きさ $|\mathbf{k}|$ のみに依存する関数となる。

こうした統計量を実際に測ってみると (図2)、ランダムな銀河分布とは一転、きわめて秩序立ったふるまいが見られることがわかる。特にパワースペクトルをみると、べき的な振る舞いの上に「バリオン音響振動」という微小な振動パターンが現れ、宇宙がプラズマ状態だった頃の原始密度ゆらぎの痕跡を垣間見ることができる。こうしたふるまい1つ1つは初期条件と宇宙モデルを記述する宇宙論パラメータに依存しており、精密な測定データを理論と比較することで宇宙論パラメータを決定できる。

なお、こうした統計量を理論計算と比較する際、銀河の位置に距離尺度を入れる必要がある。観測から得られる銀河の位置は、天球面の角度 (θ, ϕ) 、および赤方偏移 z である。2節でも述べたが、これらの位置情報を距離尺度を入れた3次元座標上の位置に換算する場合、宇宙モデルの事前知識が必要になる。つまり、正しい宇宙モデルを知らない限り、銀河の3次元分布を正しく座標変換できない。特に、角度方向と赤方偏移の距離に対する依存性はそれぞれ異なるため、間違った宇宙モデルで変換すると銀河の3次元分布は非等方に見えてしまう。つまり、仮に丸い構造が宇宙にあったとしても観測者からは楕円体に見えるといったことが起こるため、式(2)と(3)の等号が成り立たなくなる。この現象はアルコック-パチンスキー効果と呼ばれるが [3]、最近では、この効果を逆手にとって宇宙論的な距離の推定に使われている。鍵となるのが、バリオン音響振動である (図3)。バリオン音響振動の振動パターンに見られる特徴的スケールは宇宙モデルにほぼ依らず、その性質は理論的にもよくわかっており、宇宙マイクロ波背景放射の観測から精度よく測定されている。そのため、このスケールを標準ものさしとして、座標変換に必要な実距離を決定することができる。バリオン音響振動を用いて銀河のデータから測定された宇宙論的な距離は、宇宙膨張、とくにダークエネルギーという宇宙を加速させている未知のエネルギー体の性質を探る上で強力な手段となる。今後行われる銀河赤方偏移サーベイの多くは、このバリオン音響振動を精密に測定することを一大目標にしており、サーベイ体積、銀河の個数密度ともに、これまでの観測を凌駕することで、サブパーセントレベルでパワースペクトル・2点相関関数の測定を目指している。

⁶ 本来の統計平均とは、無数の異なる宇宙で測定を行い、それら測定結果を平均することで得られるものだが、そういった操作は原理的に不可能なので、実際には観測領域内でサンプル平均 (体積平均) する。

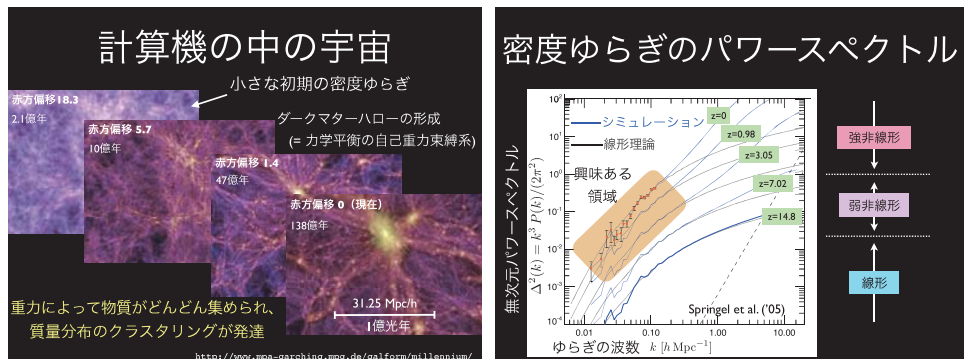


Figure 4: 文献 [4] の宇宙論的 N 体シミュレーションにもとづく大規模構造の時間発展の様子 (左) とそこから得られた無次元パワースペクトル $\Delta^2(k)$ (右)。無次元パワースペクトルは $\Delta^2(k) = k^3 P(k)/(2\pi^2)$ で定義されており、 $\Delta^2(k)$ が 1 より大きくなると重力の非線形性が顕著になる。右パネルのパワースペクトルはボックスサイズがやや小さめのシミュレーションデータから得られたもので試行回数も 1 回のため、サンプルバリエーションで大スケールのがたつきが顕著である。サンプルバリエーションを抑えるにはシミュレーションのボックスサイズを大きくし、試行回数を増やす必要がある。

4 大規模構造の理論的記述

大規模構造の観測は宇宙論研究において重要な手段であるが、大規模構造の物理、特にその形成と進化の理論的記述なくして、観測データから宇宙論の情報を抜き出すことはできない。特に、精密な統計データが得られるようになった昨今、大規模構造の定量的かつ正確な記述は宇宙論研究の根幹に関わる問題である。

冒頭でも触れたが、宇宙にひろがる質量分布の進化に決定的な影響を及ぼす力は重力である。ダークマターが主成分の質量分布を質点の集まりとみなせば、膨張宇宙における自己重力多体系として扱うことができる⁷。その基礎方程式は

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\frac{Gm^2}{a} \sum_{i \neq j}^N \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3}, \quad \mathbf{p}_i = ma^2 \frac{d\mathbf{x}_i}{dt}, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (4)$$

で表される。ここで a は、宇宙膨張を特徴づける宇宙のスケール因子と呼ばれる時間のみの関数である。 N は粒子数を表す。大規模構造は、理想的には粒子数無限大 ($N \rightarrow \infty$) の極限として取り扱うべき系であり、タイムスケールにもとづく分類では無衝突系と呼ばれる自己重力多体系に相当する。こうした系は、初期条件の依存性をいまだ残しており、宇宙論パラメーターに応じて、パワースペクトルなどの統計量も少しずつ異なってくる。そのふるまいをどこまで正しくかつ精度よく記述できるかが、問題の焦点となる。

こうした無衝突自己重力多体系を取り扱う標準的な数値的解法が、 N 体シミュレーションである (図 4)⁸。大スケールの観測と比べるとあたり、十分大きなボックスを用意し、多数の粒子を

⁷ただし、観測ターゲットとしての銀河分布はダークマターの質量分布とは完全に同じものではない。そのため、理論計算でダークマター分布の性質が定量的に求まったとしてもそれを銀河分布の観測結果と対応づける作業が必要になる。この問題は「銀河バイアス」と呼ばれ、宇宙論研究者を悩ませている。

⁸無衝突系の N 体シミュレーションを行う際、多数の粒子をつぎこむため、式 (4) を実直に解くと多大な計算コストになる。そのため、遠方の粒子をひとまとめにして力を求めたり (ツリー法)、空間をグリッドに区切って高速フーリエ変換を使って密度場から力を計算する手法 (Particl-Mesh 法) などといった高速化のアルゴリズムが開発されており、そうした手法を実装したパブリックコードがあちこちに存在する。

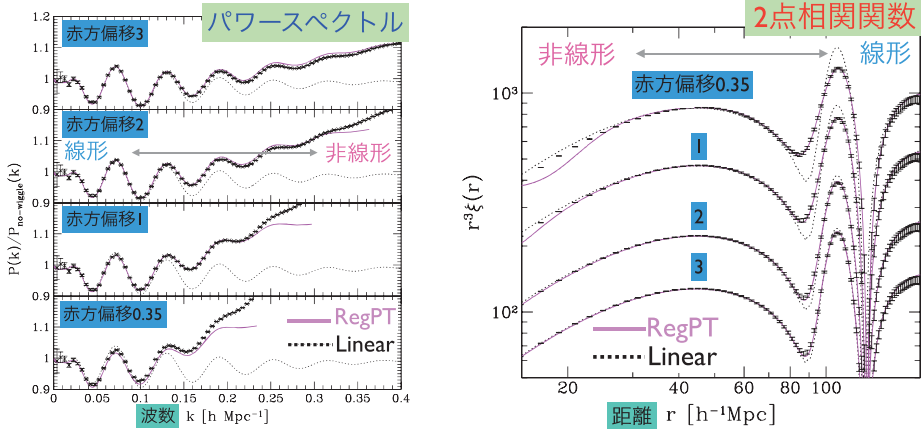


Figure 5: 文献 [6] の摂動計算にもとづく理論予言 (マゼンタ)。左パネルはパワースペクトル、右パネルは 2 点相関関数に対する理論予言を表す。この計算はくりこみ、あるいは再和法などと呼ばれる手法にもとづくもので、従来の摂動計算より収束性が向上している。

つぎ込んで力まかせに重力進化計算を行う必要があるが (現在の計算では、一辺 1 ギガパーセク程度のボックスに、粒子を 1000^3 個以上詰め込むのが典型的である)、重力の非線形性が強い領域を適切に取り扱える手法として、N 体シミュレーションはもはや不可欠な手法である。とはいえ、パワースペクトルなどの統計量を精度よく求めるためには、サンプルバリエーションによるばらつきをおさえるために多数回シミュレーションを試行する必要がある、計算コストはどうしても大きくなる。そのため、シミュレーションそのものを直接データ解析に組み込んで宇宙論パラメータを推定することは困難である。かわりに、いくつかの宇宙モデルで得られた計算結果 (パワースペクトル) からフィッティング公式を作成したり、計算結果を数値テーブルとして保持し、内挿補間することで (あるクラスの) 任意の宇宙モデルのパワースペクトルを求めるなどの手法が取られている。

一方、数値解析手法と並び相補的な手法として、摂動論にもとづく計算手法がある [5]。無衝突自己重力多体系は、 $N \rightarrow \infty$ の極限でヴラソフ-ポアソン系 (ポアソン方程式と無衝突ボルツマン方程式を組み合わせた系) に帰着するが、速度空間方向の分布関数の広がりをゼロとおき、かつ速度場が一価関数として与えられると仮定すると⁹、モーメントを取ることで以下の式が得られる：

$$\frac{\partial \delta(\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot \{ [1 + \delta(\mathbf{x})] \mathbf{u}(\mathbf{x}) \} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \frac{1}{a} \{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{a} \Phi(\mathbf{x}), \quad (7)$$

式 (6), (7) は、ダークマターの質量分布の運動を圧力ゼロの自己重力流体として記述できることを意味する。これらの方程式をポアソン方程式

$$\frac{1}{a^2} \nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) = 4\pi G \bar{\rho} \delta(\mathbf{x}), \quad (8)$$

と組み合わせることで閉じた方程式系が得られる。摂動論的手法では、これらの方程式にもとづき、密度場、速度場を微小量とみなすことで、 $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \dots$ 、 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots$ として逐次展

⁹この仮定は、一粒子分布関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ を以下のように与えることと等価である：

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \bar{\rho} \{ 1 + \delta(\mathbf{x}) \} \delta_{\text{D}}[\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x})]. \quad (5)$$

ここで、 $\delta_{\text{D}}(\cdot)$ はデルタ関数である。

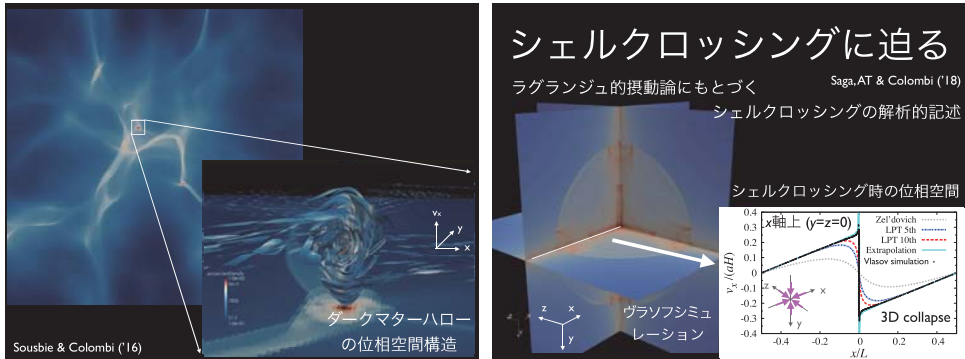


Figure 6: 左パネル：文献 [13] によるヴラソフ-ポアソンシミュレーションから求められたダークマターの空間分布とその位相空間構造。右パネル：ダークマターハローと呼ばれる自己重力束縛系が形成される直前に生じるシェルクロッシング構造をラグランジュ摂動論の理論予言と比較した図。文献 [15] を参照。

開いて解いていく。非線形性が強い領域には適用できない手法だが、解析的にパワースペクトルなどの統計量を高速に計算できるため、非線形性が弱い大スケールの観測が行われるにつれ、観測データに応用され、宇宙論パラメータの推定などにも使われるようになってきた (図 5)。

ただし、圧力ゼロの自己重力流体としての記述はあくまで近似であり、非線形性が強くなる小スケールでその記述は破綻する。そのため、式 (6)(7)(8) にもとづいて、高次の摂動項をいくら頑張っても正しい答えに収束せず、それどころかかえって理論予言の精度を悪化させることが知られるようになった [7]。この問題を便宜的に解決するため、圧力項や粘性項などからなる有効ストレステンソルをオイラー方程式 (7) に取り入れ、近似の破れを現象論的に抑えようとするアプローチが提唱されている [8, 9]。ただし、このアプローチでは、有効ストレステンソルの各項の大きさを見積もるために N 体シミュレーションが必要となり、第 1 原理的な解析計算の長所が失われてしまう。原点に戻って、より基本的な方程式であるヴラソフ-ポアソン方程式にもとづく解析手法を確立することが望ましいが、取り扱いの難しさから、現在のところ、1 次元宇宙という単純化されたセットアップでの解析が少しなされた程度で [10, 11]、3 次元系での統計計算への応用は程遠い。

ごく最近になり、ヴラソフ-ポアソン方程式そのものを数値的に解く試みが徐々にだが進んでいる。速度空間方向の広がりが少ないとする宇宙論的な初期条件のもとでは、ダークマターの分布関数の時間発展は、6 次元位相空間内の 3 次元超局面の運動として記述できる。このような宇宙論的なセットアップに特化したヴラソフ-ポアソン系のシミュレーションコードが近年複数のグループで開発され [12, 13, 14]、解析計算との比較が行われるようになってきた (図 6)。かなりの計算コストがかかるため、大規模構造をシミュレーションするにはまだ少しかかるが、今後、 N 体シミュレーションで調べることが難しい強非線形領域の様子、とりわけ未解明だった NFW プロファイル [16] と呼ばれる自己重力束縛系の普遍的なカスプ構造の起源が解明されるかもしれない。そのためにも、解析的な計算手法の発展は不可欠といえるだろう。今後、数値的・解析的なシナジーが進むことで、この方面の研究が一層活発化することが期待される。

5 おわりに

駆け足だが、本稿では、宇宙の大規模構造と呼ばれる対象について、宇宙論への応用を念頭に、観測と理論の現状について解説した。大規模構造は、観測される宇宙の中で最大の物理系と違ってよく、その統計的性質には、宇宙の初期の姿から宇宙膨張のダイナミクスまで、様々な宇宙論の

情報が詰め込まれている。観測の進展に伴い、理論的研究も活発になり、精密な理論的記述に向けた動きが進んでいる。本稿では、大規模構造を宇宙論的重力多体系としてとらえ、その記述法について述べたが、實際上、我々が観測から得られるものは銀河分布であり、重力以外の素過程の影響についても少なからず考慮する必要がある¹⁰。さらに、銀河赤方偏移サーベイから得られる銀河の3次元地図には様々な観測に伴う系統的効果のせいで、ここで述べた扱いだけでは直接観測と比較できない点に注意する必要がある。中でも赤方偏移空間ゆがみと呼ばれる効果は、アルコック-パチンスキー効果と合わせて大規模構造の3次元地図に大きな非等方性を生じることが知られている。逆にこうした効果を通じて宇宙論的な大スケールで一般相対性理論のテストができるとして近年注目を浴びているが、そうした検証を精度よく行う上でも、観測的效果を適切に考慮した大規模構造の記述が不可欠である。大規模構造の研究は、観測と理論双方のシナジーで発展してきた宇宙論の一大研究分野であるが、今後さらに観測が進むことで、新たな問題が提起され、宇宙論の進展とともに違った様相の研究が進むかもしれない。

References

- [1] L. Anderson, *et al.* MNRAS 427 (2012) 3435-3467 (arXiv:1203.6594)
- [2] S. Alam, *et al.* MNRAS 470 (2017) 2617-2652 (arXiv:1607.03155)
- [3] C. Alcock, B. Paczynski, Nature 358 (1979) 358
- [4] V. Springel, *et al.* Nature 435 (2005) 629-636 (arXiv:astro-ph/0504097)
- [5] F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztanaga, R. Scoccimarro, Phys.Rep. 367 (2002) 1-248 (arXiv:astro-ph/0112551)
- [6] A. Taruya, F. Bernardeau, T. Nishimichi, S. Codis, Phys.Rev.D 86 (2012) 103528 (arXiv:1208.1191)
- [7] D. Blas, M. Garny, T. Konstandin, JCAP 1401 (2014) 010 (arXiv:1309.3308)
- [8] D. Baumann, A. Nicolis, L. Senatore, M. Zaldarriaga, JCAP 7 (2012) 051 (arXiv:1004.2488)
- [9] J. J. M. Carrasco, M. P. Hertzberg, L. Senatore, JHEP 9 (2012) 82 (arXiv:1206.2926)
- [10] S. Colombi, MNRAS 446 (2015) 2902-2920 (arXiv:1411.4165)
- [11] A. Taruya, S. Colombi, MNRAS 470 (2017) 4858-4884 (arXiv:1701.09088)
- [12] K. Yoshikawa, N. Yoshida, M. Umemura, Astrophys.J. 762 (2013) 116 (arXiv:1206.6152)
- [13] T. Sousbie, S. Colombi, J.Comput.Phys. 321 (2016) 644-697 (arXiv:1509.07720)
- [14] O. Hahn, R.E. Angulo, MNRAS 455 (2016) 1115-1133 (arXiv:1501.01959)
- [15] S. Saga, A. Taruya, S. Colombi, arXiv:1805.08787
- [16] J. F. Navarro, C. S. Frenk, S. D. White, Astrophys.J 490 (1997) 493 (arXiv:astro-ph/9611107)

¹⁰ただし、第1原理的な銀河形成シミュレーションを宇宙論的セットアップで行うのは現在でも不可能なため、サブグリッドモデルを用いるか、現象論的なパラメトリゼーションを行うなどの方法を取らざるをえない。