数理解析研究所講究録 第2118巻 2019年 51-57

Isometries on uniform algebra valued C^1-space

新潟大学・自然科学系　羽鳥　理
筑波大学・数理物質系　川村　一宏
新潟大学・自然科学系　三浦　毅
新潟県立長岡高等学校　大井　志穂 *

Osamu Hatori, Department of Mathematics, Niigata University
Kazuhiro Kawamura, Institute of Mathematics, University of Tsukuba
Takeshi Miura, Department of Mathematics, Niigata University
Shiho Oi †, Niigata Prefectural Nagaoka High School

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University. The first author is supported by JSPS KAKENHI Grant Number 17K05241. The second and third authors are supported by JSPS KAKENHI Grant Number 15K04921 and 16K05172.

1　導入

実または複素数体上のノルム空間 $(M, \|\cdot\|_M)$, $(N, \|\cdot\|_N)$ に対して，$S\colon M \to N$ が等距離写像とは

$$\|S(f) - S(g)\|_N = \|f - g\|_M \qquad (\forall f, g \in M) \tag{1}$$

が成り立つことである．正確には $S\colon (M, \|\cdot\|_M) \to (N, \|\cdot\|_N)$ を等距離写像と言うべきかもしれないが，ここでは習慣に従い $S\colon M \to N$ のように表すことにする．等距離写像の研究をさかのぼると，少なくとも Banach [1] にまでたどり着く．しかし Banach の結果自身は等距離写像の研究と言うよりも，コンパクト距離空間 X の位相的性質と，その上の実数値連続関数 $C_{\mathbb{R}}(X)$ の代数的性質の関係性，と言った方が正確かもしれな

* 現在の所属：新潟県立八海高等学校
† Current address: Niigata Prefectural Hakkai High School

い．実際 Banach [1] はコンパクト距離空間 X, Y と，その上の実数値連続関数全体のなす実 Banach 空間 $(C_{\mathbb{R}}(X), \|\cdot\|_\infty)$, $(C_{\mathbb{R}}(Y), \|\cdot\|_\infty)$ に対して，X と Y が同相であるための必要十分条件は $C_{\mathbb{R}}(X)$ と $C_{\mathbb{R}}(Y)$ が等距離同型であること，つまり全射等距離写像 $S\colon C_{\mathbb{R}}(X) \to C_{\mathbb{R}}(Y)$ が存在すること，を示している．ただし $\|\cdot\|_\infty$ は通常の supremum norm を表す．このとき Banach は，上のような全射等距離写像の具体的な形を決定しているが，等距離写像は線形とは限らないため，この定理の証明のために，現在では the Mazur-Ulam theorem と呼ばれる次の結果を証明し，それを用いている．Väisälä [15] は reflection を用いて，the Mazur-Ulam theorem の簡明な証明を与えている．

定理 1 (Mazur and Ulam [9])**.** *M, N をノルム空間とする．$S\colon M \to N$ が全射等距離写像ならば，$S - S(0)\colon M \to N$ は実線形である．*

その後，Stone [14] は，Banach の結果が「距離空間とは限らない Hausdorff 空間でも成り立つ」ことを示している．このように，等距離写像の研究が始まった当初は「線形性を仮定せず」に等距離写像を考察していたが，近年は「等距離写像とは線形なノルム保存写像」のことを指すことが多いようである．実際，the Mazur-Ulam theorem から，任意の全射等距離写像は実線形であると仮定しても一般性を失わない．そして等距離写像 S が実線形であることと複素線形であることは，$S(if) = iS(f)$ が任意の f に対して成り立つかどうかの違いだけであり，それを無視してしまえば始めから「全射複素線形等距離写像」を考察すればよいことになる．たとえば A, B を関数環とするとき，$S\colon A \to B$ が全射等距離写像ならば，正確性を欠く表現ではあるが，$S(if) = iS(f)$ または $S(if) = -iS(f)$ が成り立つことが知られている（詳細は [4, 10] を参照頂きたい）．類似の現象は関数環に限らず，ある程度性質のよい関数空間に対しても成り立つ（たとえば [8] 参照）．このように，実線形といっても複素線形でないものが本質的に共役線形に限られてしまうのであれば，これらを区別する意味はないが，一般の関数空間においては複素線形でも共役線形でもない全射実線形等距離写像の存在がしられており，その構造は筆者らの知る限りにおいては解明されていないようである．筆者らは一般の関数空間上の全射等距離写像の構造を解明するため研究を進めてきたが，まだ解明にはほど遠い状況であり（[11] 参照），近年は具体的な関数空間とその上の全射等距離写像を調べ，手掛かりを探しているところである．

この意味で，閉区間 $[0,1]$ 上の連続微分可能な複素数値関数全体のなす複素線形空間 $C^1([0,1])$ は大変重要な例である．$C^1([0,1])$ は研究対象としては簡単すぎるように感じられるかもしれないが，具体例としては複雑すぎては困るため，筆者らの力量では非常に適切な空間である．それでも $C^1([0,1])$ 空間やそこから自然に発生する空間とその上の全

射等距離写像を考察すると，決して容易とは言えない問題が山積していることに気付かされる．たとえば Banach [1] と Stone [14] の結果を複素数値関数に対して考察した，いわゆる "the Banach-Stone theorem" の一般化として "ベクトル値版" の Banach-Stone 型定理が知られている．この研究を踏まえれば，$C^1([0,1])$ 空間においても自然に "ベクトル値版" の研究がなされるべきである．このような発想は筆者ら独自のものではなく，たとえば Botelho and Jamison [2] は「有限次元 Hilbert 空間」に値をとる C^1 空間上の全射等距離写像を決定している．それでは「無限次元 Hilbert 空間」に対しては類似の結果は成り立たないのか，は誰もが思う疑問であろう．この問題に対しても筆者らは明確な答えを知らない．しかし「Hilbert 空間」を一旦あきらめ「無限次元」に着目すれば，状況は大きく変わりえることに気付いた．実際，Hilbert 空間の代わりに「関数環」を考えることにより，これまで用いられてきた「extreme point による等距離写像の決定」が可能となる．さらに Kawamura, Koshimizu and M. [6] が与えた手法を用いることにより，関数環に値をとる C^1 空間のノルムに，ある程度の自由度を与えることも可能となる．以下では，この定理の具体的な主張とともに，証明の概略について述べることとする．

2 主定理

以下では A をコンパクト Hausdorff 空間 X 上の関数環とする．つまり $C(X)$ を X 上の複素数値連続関数全体のなす複素 Banach 環とするとき，A は $C(X)$ の閉部分多元環であり，定数関数 1 を含み，次の意味で X の点を分離する：任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して，$f(x) \neq f(y)$ となる $f \in A$ が存在する．supremum norm を単に $\|\cdot\|_\infty$ と記述する．このことによって混乱は生じないであろう．関数環 A の，可換 Banach 環としての，極大イデアル空間を M_A で表す．M_A もまたコンパクト Hausdorff 空間である．$f \in A$ に対して，その Gelfand 変換を $\widehat{f}$ で表す．つまり $\widehat{f}(\eta) = \eta(f)$, $\eta \in M_A$ である．

定義 1. 写像 $F\colon [0,1] \to A$ が微分可能であるとは，任意の $t \in [0,1]$ に対して $F'(t) \in A$ が存在して

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - F'(t) \right\|_\infty = 0$$

が成り立つことである；ただし $t = 0, 1$ に対しては，上の極限はそれぞれ右側極限，左側極限を表すものとする．このとき F' を $[0,1]$ で定義され A に値をとる写像とみなす．もし，さらに，$F'\colon [0,1] \to A$ が $[0,1]$ の各点で連続であれば，F を連続微分可能であるという．$F\colon [0,1] \to A$ で連続微分可能であるもの全体を $C^1([0,1], A)$ で表す．このとき $C^1([0,1], A)$ は各点での演算により複素線形空間となる．

定義 2. $p_j\colon [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ を第 j 成分への射影とする $(j=1,2)$．$D\subset[0,1]\times[0,1]$ をコンパクト連結集合で

$$p_1(D)=p_2(D)=[0,1]$$

をみたすものとする．このとき $F\in C^1([0,1],A)$ に対して

$$\|F\|_{\langle D\rangle}=\sup_{(s,t)\in D}(\|F(s)\|_\infty+\|F'(t)\|_\infty)$$

と定める．$\|\cdot\|_{\langle D\rangle}$ は $C^1([0,1],A)$ のノルムである．

注意． $\|\cdot\|_{\langle D\rangle}$ が $C^1([0,1],A)$ のノルムであるための必要十分条件は，

$$p_1(D)\cup p_2(D)=[0,1]$$

が成り立つことである．したがって定義 2 の条件をみたすコンパクト連結集合 D に対して $\|\cdot\|_{\langle D\rangle}$ は $C^1([0,1],A)$ のノルムを定める．このような D の例として $D=\{(t,t):t\in[0,1]\}$ や $D=[0,1]\times[0,1]$ がある．これらの D が定める $\|\cdot\|_{\langle D\rangle}$ に対して，Cambern [3] と Rao and Roy [13] はそれぞれ $C^1([0,1],\mathbb{C})$ 上の全射複素線形等距離写像を決定している．一方で，定義 2 の条件をみたさない D として $D=\{0\}\times[0,1]$ があるが，この D に対する $C^1([0,1],\mathbb{C})$ 上の全射複素線形等距離写像は，Koshimizu [7] によって，より一般の場合に決定されている．本稿の主定理では $D=\{0\}\times[0,1]$ に対応する $\|\cdot\|_{\langle D\rangle}$ に関する全射複素線形等距離写像を決定できていない．そのため定義 2 において $\|\cdot\|_{\langle D\rangle}$ をノルムとする D に強い条件を課している．

以上の設定のもとで，主定理を述べることができる．

定理 2. A を関数環とし，D を $[0,1]\times[0,1]$ のコンパクト連結集合で $p_1(D)=p_2(D)=[0,1]$ をみたすものとする．$S\colon C^1([0,1],A)\to C^1([0,1],A)$ を $\|\cdot\|_{\langle D\rangle}$ に関する全射複素線形等距離写像とすると，A の可逆元 α で M_A 上 $|\widehat{\alpha}|=1$ をみたすものと，同相写像 $\psi\colon M_A\to M_A$，さらに M_A の（空でないとは限らない）開かつ閉集合 M_{-1}, M_1 が存在して

$$\widehat{S(F)(t)}(\rho)=\begin{cases}\widehat{\alpha}(\rho)\widehat{F(1-t)}(\psi(\rho)) & \rho\in M_{-1}\\ \widehat{\alpha}(\rho)\widehat{F(t)}(\psi(\rho)) & \rho\in M_1\end{cases}$$

がすべての $F\in C^1([0,1],A)$ 及び $t\in[0,1]$ に対して成り立つ．

定理 2 の証明の詳細は現在準備中である．以下に証明の概略を述べることにする．

証明の概略. 関数環 A の Choquet 境界を $\mathrm{Ch}(A)$ で表す．$\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ とおき，$\tilde{D}=D\times\mathrm{Ch}(A)\times\mathrm{Ch}(A)\times\mathbb{T}$ とする．このとき各 $F\in C^1([0,1],A)$ に対して

$$\tilde{F}(t_1,t_2,x_1,x_2,z)=F(t_1)(x_1)+zF'(t_2)(x_2)\qquad((t_1,t_2,x_1,x_2,z)\in\tilde{D})$$

により $\tilde{F}\colon\tilde{D}\to\mathbb{C}$ を定義する．関数環 A の任意の関数は $\mathrm{Ch}(A)$ で最大絶対値をとることが知られているので，$\sup_{\boldsymbol{p}\in\tilde{D}}|\tilde{F}(\boldsymbol{p})|=\|F\|_{\langle D\rangle}$ が示される．そこで

$$B=\{\tilde{F}:F\in C^1([0,1],A)\}$$

とおくと，B は $\tilde{D}$ 上での supremum norm $\|\cdot\|_{\tilde{D}}$ に関して $(C^1([0,1],A),\|\cdot\|_{\langle D\rangle})$ と等距離同形であることが分かる．したがって $(B,\|\cdot\|_{\tilde{D}})$ 上の全射複素線形等距離写像を決定すればよいことになる．

$$\begin{array}{ccc}
C^1([0,1],A) & \xrightarrow{S} & C^1([0,1],A)\\
{\scriptstyle U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U}\\
B & \xrightarrow[T]{} & B
\end{array}$$

実際，$U\colon C^1([0,1],A)\to B$ を $U(F)=\tilde{F}$, $F\in\mathbb{C}^1([0,1],A)$ により定めれば，$T=USU^{-1}$ は $(B,\|\cdot\|_{\tilde{D}})$ 上の全射複素線形等距離写像であることが分かる．そこで T を決定すれば，$S=U^{-1}TU$ となり S が解明されることになる．

B は supremum norm に関するノルム空間であるため，その双対空間の単位球 B_1^* の端点全体の集合は比較的調べやすい．実際，Rao and Roy [13] の手法の類似物を用いることにより $\mathrm{Ch}(B)=\tilde{D}$ であることが示される．ここで $\mathrm{Ch}(B)$ は関数空間 B の Choquet 境界である．このことから，写像 $\alpha,w\colon\tilde{D}\to\mathbb{T}$, $\varphi_1,\varphi_2\colon\tilde{D}\to[0,1]$, $\psi_1,\psi_2\colon\tilde{D}\to\mathrm{Ch}(A)$ が存在して，任意の $F\in C^1([0,1],A)$ と $\boldsymbol{p}=(t_1,t_2,x_1,x_2,z)\in\tilde{D}$ に対して

$$S(F)(t_1)(x_1)+zS(F)'(t_2)(x_2)=\alpha(\boldsymbol{p})[F(\varphi_1(\boldsymbol{p}))(\psi_1(\boldsymbol{p}))+w(\boldsymbol{p})F'(\varphi_2(\boldsymbol{p}))(\psi_2(\boldsymbol{p}))]$$

をみたすことが示される．

次に写像 $\alpha,w,\varphi_j,\psi_j$ が本質的に依存する変数を確定し，$\mathrm{Ch}(A)$ 上で $S(F)(t)$ のみたすべき関係を調べる．その際，Hatori, Oi and Takagi [5] と Oi [12] のアイディアを用いて ψ_1 が変数 x_1 のみに依存することを示す．その後，$\mathrm{Ch}(A)$ 上の関係式を A の Shilov 境界にまで拡張し，さらにそれが極大イデアル空間にまで拡張されることを示す．　□

注意 ．全射等距離写像は本質的に実線形であることを述べたが，定理 2 では「複素線形性」を仮定している．この仮定は本質的ではないと筆者らは考えている．つまり定理 2 と

類似の結果が複素線形性を仮定せずに成り立つと考えているが，その証明を与えた訳ではないので正確なことは現時点において述べられない．

参考文献

[1] S. Banach, *Theory of linear operations*, Dover Books on Mathematics, 2009.

[2] F. Botelho and J. Jamison, *Surjective isometries on spaces of differentiable vector-valued functions*, Studia Math. **192** (2009), 39–50.

[3] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras*, Studia Math. **25** (1964-1965) 217–225.

[4] O. Hatori and T. Miura, *Real linear isometries between function algebras. II*, Cent. Eur. J. Math. **11** (2013), 1838–1842.

[5] O. Hatori, S. Oi and H. Takagi *Peculiar homomorphisms on algebras of vector-valued continuously differentiable maps*, Linear Nonlinear Anal. **3** (2017), 101–109.

[6] K. Kawamura, H. Koshimizu and T. Miura, *Norms on* $C^1([0,1])$ *and their isometries*, to appear in Acta Sci. Math. (Szeged).

[7] H. Koshimizu, *Linear isometries on spaces of continuously differentiable and Lipschitz continuous functions*, Nihonkai Math. J. **22** (2011), 73–90.

[8] H. Koshimizu, T. Miura, H. Takagi and S.-E. Takahasi, *Real-linear isometries between subspaces of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. **413** (2014) 229–241.

[9] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformationes isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 946–948.

[10] T. Miura, *Real-linear isometries between function algebras*, Cent. Eur. J. Math. **9** (2011), 778–788.

[11] T. Miura, *Surjective isometries between function spaces*, Contemp. Math. **645** (2015), 231–239.

[12] S. Oi, *Homomorphisms between algebras of Lipschitz functions with the values in function algebras*, J. Math. Anal. Appl. **444** (2016), 210–229.

[13] N.V. Rao and A.K. Roy, *Linear isometries of some function spaces*, Pacific J. Math. **38** (1971), 177–192.

[14] M.H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 375–481.

[15] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly, **110-7** (2003), 633–635.